

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2023-10-26 kl. 8.00–13.00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler. 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Lösningsskisser publiceras på kursens webbsida efter tentan.

1. (a) Beräkna gränsvärdet, eller visa att det inte existerar:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

(1p)

- (b) Låt $f(x, y) = x + 2x^2 - y^3$. Bestäm riktningsderivatan $f'_{\bar{v}}(1, -1)$ där $\bar{v} = (2, 1)$ samt tangentplanet till $z = f(x, y)$ i punkten $(1, -1, 4)$. (2p)

2. (a) Bestäm alla lösningar $z \in C^1(\mathbb{R}^2)$ till $3z'_x - z'_y = 0$.
(**Tips:** använd variabelbytet $u = x + 3y, v = y$). (2p)

- (b) Bestäm alla lösningar $z \in C^2(\mathbb{R}^2)$ till $z''_{xx} = 1$. (1p)

3. (a) Avgör om $f(x, y) = 1 + x - x^2 - y^2$ har en lokal extrempunkt i $(0, 0)$, och ange i så fall vilken typ.

- (b) Avgör om $f(x, y) = 1 + 2x^2 + xy + y^2 + y^3 - x^4$ har en lokal extrempunkt i $(0, 0)$, och ange i så fall vilken typ.

- (c) Avgör om $f(x, y) = -6 + 8y + x^2 - 4y^2 - x^3 + x^3y$ har en lokal extrempunkt i $(0, 1)$, och ange i så fall vilken typ.

4. Beräkna integralen $\iint_D (x + 2y) \, dx \, dy$, där

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, -x \leq y \leq x\}.$$

5. Beräkna integralen (eller visa divergens) $\iiint_D \frac{1}{x^2 z^2} \, dx \, dy \, dz$, där $D \subset \mathbb{R}^3$ är det

$$\text{område som ges av olikheterna } \begin{cases} 0 < x^3 < y < x^2, \\ z > 4. \end{cases}$$

6. Bestäm alla värden på konstanten d sådana att planet $x + 2y + z = d$ tangerar parameterytan given av

$$\begin{cases} x = st^2 - s - 4t \\ y = s - t^2 \\ z = s^2 + 4t \end{cases} \quad -1 < s < 1, -1 < t < 1$$

i någon punkt. Bestäm även för dessa värden på d i vilken punkt (eller vilka punkter) som planet tangerar ytan.