Lösningsskisser till TATA69 Flervariabelanalys 2024-01-02

1. (a) Eftersom
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$
är funktionen inte kontinuerlig i $(0,0)$.
Svar: Funktionen är inte kontinuerlig i $(0,0)$.

(b) Låt $F(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ Tangentplanet ges på normalform av
$$\nabla F(-1,2,2) \bullet ((x,y,z) - (-1,2,2)) = 0,$$
eller ekvivalent
$$\nabla F(-1,2,2) \bullet (x,y,z) = \nabla F(-1,2,2) \bullet (-1,2,2).$$
Vi har
$$\nabla F(x,y,z) = (2x+y, x, 2z), \quad \nabla F(-1,2,2) = (0,-1,4).$$
Alltså får vi
$$(0,-1,4) \bullet (x,y,z) = -y + 4z = (0,-1,4) \bullet (-1,2,2) = 6.$$
Det vill säga, det sökta tangentplanet ges av $-y + 4z = 6$, eller ekvivalent
$$z = \frac{3}{2} + \frac{y}{4} = 2 + \frac{y-2}{4}.$$
Men vi vet även att detta tangentplan ges av
$$z = f(-1,2) + f'_x(-1,2)(x+1) + f'_y(-1,2)(y-2),$$
alltså ser vi att $f'_x(-1,2) = 0$ och $f'_y(-1,2) = 1/4$.
Svar: $f'_x(-1,2) = 0$, $f'_y(-1,2) = 1/4$, $-y + 4z = 6$.
(OBS! Att ekvationen verkligen definierar z som funktion av x och y kan ses från implicita funktionssatsen eftersom $F(-1,2,2) = 3$ samt $F'_z(-1,2,2) = 4 \neq 0$. I detta fall är det ju dessutom lätt att faktiskt lösa ut z. Ekvationen $x^2+xy+z^2 = 3$ har lösningarna $z = \pm\sqrt{3 - x^2 - xy}$, och eftersom vi i detta fall tittar lokalt kring $(-1,2,2)$ där z är positivt är funktionen $z = f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - xy}$. Notera att $f(-1,2) = \sqrt{3 - 1 + 2} = 2$.)

2. De stationära punkterna ges av
$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 2y = 0 \\ f'_y = -2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ eller } x = 2/3 \\ y = x. \end{cases}$$
Dvs. vi har två kritiska punkter, $(0,0)$ och $(2/3, 2/3)$. Vidare gäller att
$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = -2 \text{ och } f''_{yy} = 2.$$

Så i $(0,0)$ får vi den kvadratiska formen:

$Q_{(0,0)}(h,k) = f''_{xx}(0,0)h^2 + 2f''_{xy}(0,0)hk + f''_{yy}(0,0)k^2 = -4hk + 2k^2 = 2(k-h)^2 - 2h^2,$

som är indefinit. Alltså är $(0,0)$ en sadelpunkt.

I $(2/3, 2/3)$ får vi

$$\begin{aligned} Q_{(2/3,2/3)}(h,k) &= f''_{xx}(2/3,2/3)h^2 + 2f''_{xy}(2/3,2/3)hk + f''_{yy}(2/3,2/3)k^2 \\ &= 4h^2 - 4hk + 2k^2 = 2(k-h)^2 + 2h^2, \end{aligned}$$

som är positivt definit. Alltså är $(2/3, 2/3)$ ett lokalt minimum.

Svar: Funktionen har ett lokalt minimum i $(2/3, 2/3)$.

3. (a) Den första ekvationen ger

$$z'_x = 2x + 3x^2y \Leftrightarrow z = x^2 + x^3y + h(y).$$

Eftersom detta medför att $z'_y = x^3 + h'(y)$ ser vi att

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 3x^2y, \\ z'_y = x^3 + 2y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + x^3y + h(y), \\ x^3 + 2y = x^3 + h'(y). \end{cases}$$

Vidare gäller

$$x^3 + 2y = x^3 + h'(y) \Leftrightarrow h'(y) = 2y \Leftrightarrow h(y) = y^2 + c,$$

så den allmänna lösningen till systemet (utan bivillkor) ges alltså av

$$z = x^2 + x^3y + y^2 + c.$$

Bivillkoret ger nu i sin tur

$$z(0,0) = c = 3.$$

Det vill säga

$$z = x^2 + x^3y + y^2 + 3.$$

Svar: $z = x^2 + x^3y + y^2 + 3$.

(b) Kedjeregeln ger

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2z'_u, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u + z'_v.$$

Så

$$z'_x - 2z'_y = (2z'_u) - 2(z'_u + z'_v) = -2z'_v = 4y = 4v.$$

Dvs.

$$z'_v = -2v \Leftrightarrow z = -v^2 + h(u) = -y^2 + h(2x+y).$$

Bivillkoret ger nu att

$$z(0,y) = -y^2 + h(y) = y^4,$$

dvs. $h(y) = y^2 + y^4$, så

$$z = -y^2 + (2x+y)^2 + (2x+y)^4.$$

Svar: $z = -y^2 + (2x+y)^2 + (2x+y)^4$.

4. Vi inför variablerna

$$\begin{cases} u = x + 2y + 3z, \\ v = x + 2y, \\ w = x \end{cases}$$

som avbildar D på området Ω som ges av $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 3$, $1 \leq w \leq 4$. Vidare har vi

$$\frac{\mathrm{d}(u,v,w)}{\mathrm{d}(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

och

$$4x^2 + 8xy = 4(x+2y)x = 4vw.$$

Alltså får vi

$$\begin{aligned} \iiint_D (4x^2 + 8xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_\Omega 4vw\frac{1}{6}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{6}\int_1^2 \mathrm{d}u \int_1^3 2v\mathrm{d}v \int_1^4 2w\mathrm{d}w = \frac{(2-1)(9-1)(16-1)}{6} = 20. \end{aligned}$$

Svar: 20.

5. Integralen är generaliserad i origo och integranden växlar tecken. Man kan tänka sig två alternativ här. Antingen delar vi upp integranden

$$\iint_D \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

eller integrationsområdet

$$\iint_D \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_+} \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_-} \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

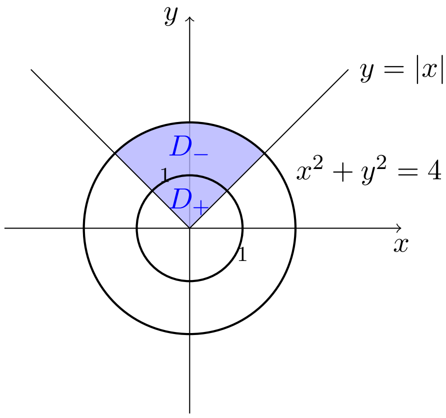
där

$$D_+ = \left\{(x,y) \in D : \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} > 0\right\}, \quad D_- = \left\{(x,y) \in D : \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}} < 0\right\},$$

och visar sedan att de två integralerna i högerledet båda är konvergenta, vilket reducerar problemet (oberoende av val av metod ovan) till att behandla integrander som inte växlar tecken. Vi väljer det senare alternativet här. I polära koordinater ges integranden av

$$\frac{1-\rho}{\rho^{3/2}},$$

och områdena D_+, D_- ges av $0 \leq \rho < 1$, $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$ respektive $1 < \rho \leq 2$, $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$.



Eftersom integranden på D_+ respektive D_- inte växlar tecken kan vi använda polära koordinater och Fubini's sats direkt på dessa. Övergång till polära koordinater (ρ, φ) ger

$$\iint_{D_+} \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,dxdy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_0^1 \frac{1-\rho}{\rho^{3/2}} \rho d\rho \right) d\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\rho^{1/2}} - \rho^{1/2} \right) d\rho = \frac{\pi}{2} \left[2\sqrt{\rho} - \frac{2\rho^{3/2}}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

På samma sätt får vi nu

$$\iint_{D_-} \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,dxdy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_1^2 \frac{1-\rho}{\rho^{3/2}} \rho d\rho \right) d\varphi$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho^{1/2}} - \rho^{1/2} \right) d\rho = \frac{\pi}{2} \left[2\sqrt{\rho} - \frac{2\rho^{3/2}}{3} \right]_1^2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

Eftersom bägge dessa integraler är konvergenta följer det att integralen över D också är det och

$$\iint_D \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,dxdy = \left(\frac{2\pi}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Svar: $\sqrt{2}\pi/3$.

6. Sfären S med radie 1 och centrum i $(1,0,0)$ ges av ekvationen

$$F(x,y,z) := (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Eftersom

$$\nabla F(x,y,z) = 2(x-1,y,z)$$

så följer det att tangentplanet i en punkt (a,b,c) som ligger på S ges av

$$2(a-1,b,c) \bullet (x,y,z) = 2(a-1,b,c) \bullet (a,b,c)$$

vilket ger ekvationen

$$(a-1)x + by + cz = (a-1)a + b^2 + c^2. \tag{1}$$

Vidare gäller om $(a, b, c) \in S$ att

$$(a-1)a + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 + (a-1) = 1 + (a-1) = a. \tag{2}$$

Så (1) och (2) ger tillsammans att tangentplanet ges av

$$(a-1)x + by + cz = a.$$

Att detta plan går genom $(1, 0, 3)$, samt att $(a, b, c) \in S$, betyder alltså att (a, b, c) ska uppfylla

$$\begin{cases} (a-1)\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 3 = a \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1) + 3c = a \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1/3 \\ (a-1)^2 + b^2 = 8/9. \end{cases}$$

Detta är en cirkel i planet $c = 1/3$ med radie $2\sqrt{2}/3$ och centrum i $(1, 0, 1/3)$, så den kan t ex parametriseras som

$$\begin{cases} a = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos t, \\ b = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin t, \\ c = \frac{1}{3}, \quad t \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Svar: Tangentplan: $(a-1)x + by + cz = a$.

Sökta punkter: $(a, b, c) = \dfrac{1}{3}(3 + 2\sqrt{2}\cos t, 2\sqrt{2}\sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi[$.