Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i TATA69 Flervariabelanalys

2024-01-02 kl. 8.00–13.00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler. 8/11/14 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Lösningsskisser publiceras på kursens webbsida efter tentan.

1. (a) Avgör om
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^3}{2x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
är kontinuerlig i $(0,0)$. (1p)

   (b) Ekvationen
$$x^2 + xy + z^2 = 3$$
definierar lokalt kring $(-1,2,2)$ en funktion $z = f(x,y)$. Bestäm $f'_x(-1,2)$, $f'_y(-1,2)$ samt tangentplanet till grafen $z = f(x,y)$ i punkten $(-1,2,2)$ för denna funktion. (2p)

2. Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$, samt ange deras karaktär.

3. (a) Bestäm lösningen $z(x,y)$ till
$$\begin{cases} z'_x = 2x + 3x^2 y, \\ z'_y = x^3 + 2y, \\ z(0,0) = 3. \end{cases}$$
(1p)

   (b) Bestäm en lösning till $z'_x - 2z'_y = 4y$ med bivillkoret $z(0,y) = y^4$.
(Tips: använd variabelbytet $u = 2x + y$, $v = y$.) (2p)

4. Beräkna integralen $\displaystyle\iiint_D (4x^2 + 8xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, där D är det område i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $1 \leqslant x + 2y + 3z \leqslant 2$, $\quad 1 \leqslant x + 2y \leqslant 3$, $\quad 1 \leqslant x \leqslant 4$.

Var god vänd!

5. Låt D vara det område i $\mathbb{R}^2$ som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leqslant 4$ och $|x| \leqslant y$. Visa att

$$\iint_D \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[4]{(x^2+y^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

är konvergent, samt bestäm dess värde.

6. Låt S vara sfären med radie 1 och centrum i $(1, 0, 0)$. Bestäm för en given punkt (a, b, c) på S en ekvation på normalform för tangentplanet till S i (a, b, c). Bestäm även mängden av alla punkter (a, b, c) på S sådana att detta tangentplan går genom punkten $(1, 0, 3)$, samt skriv denna mängd som en parameterkurva.