**Lösningsförslag till TATA69 Flervariabelanalys 2024-05-31**

**1.** a) $z'_x = 5z'_u + z'_v,\ \ z'_y = 2z'_u - z'_v;$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+y)x^2 + (1+x)y^2}{x^2+y^2} = 1.$

**2.** a) Tangentplanet beskrivs av ekvationen $ex + ey + z = e$.

b) Punkten $(1,-1)$ är den enda stationära punkten, den är en sadelpunkt.

**3.** a) $\displaystyle\iint_D 6y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16;$

b) $\displaystyle\iint_D (x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{8}.$

**4.** Vi utgår från att $z$ som funktion av $x$ och $y$ är differentierbar för alla $x > y > 0$. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u + z'_v$ och $z'_y = -z'_u + z'_v$; det följer att $z'_x + z'_y = 2z'_v$. Dessutom är $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, varvid

$$z'_x + z'_y = \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}} \ \Leftrightarrow\ 2z'_v = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \ \Leftrightarrow\ z'_v = \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \ \Leftrightarrow\ z = \sqrt{uv} + g(u)$$

för någon differentierbar funktion $g : ]0,\infty[ \to \mathbf{R}$. Uttryckt i de ursprungliga variablerna $x$ och $y$ får vi alltså $z = \sqrt{x^2-y^2} + g(x-y)$, vilket är den allmänna lösningen till ekvationen.

Utifrån den allmänna lösningen ovan blir bivillkoret

$$\sqrt{(5t)^2 - (4t)^2} + g(5t-4t) = 3t + \cos t \ \Leftrightarrow\ \sqrt{9t^2} + g(t) = 3t + \cos t \ \overset{t>0}{\Leftrightarrow}\ g(t) = \cos t\,,$$

det vill säga att $z = \sqrt{x^2-y^2} + \cos(x-y)\,.$

**Svar:** Allmän lösning: $z = \sqrt{x^2-y^2} + g(x-y)$, där $g : ]0,\infty[ \to \mathbf{R}$ är en differentierbar funktion.
Partikulärlösning: $z = \sqrt{x^2-y^2} + \cos(x-y)$.

**5.** Skärningspunkter: En skärningspunkt $(x,y)$ måste uppfylla sambandet $x^2 + y^2 = 1 = (x-1)^2 + y^2$, varav det följer att

$$0 = x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1 \quad \text{och därmed att} \quad x = 1/2.$$

Insatt i ekvationerna för $\gamma_1$ och $\gamma_2$ ger detta $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Det finns alltså två skärningspunkter: $p_+ = (1/2, \sqrt{3}/2)$ och $p_- = (1/2, -\sqrt{3}/2)$.

Skärningsvinkel: Låt $f$ och $g$ vara de funktioner $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som ges av $f(x,y) = x^2 + y^2$ respektive $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2$. Då är $\gamma_1$ och $\gamma_2$ nivåkurvor till $f$ respektive $g$, och vinkeln mellan kurvorna i en skärningspunkt är densamma som vinkeln mellan gradientvektorerna till $f$ och $g$ i den aktuella punkten.

Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= (2x, 2y), &\quad \nabla f(p_\pm) &= (1, \pm\sqrt{3}), \quad \text{och} \\ \nabla g(x,y) &= (2(x-1), 2y), &\quad \nabla g(p_\pm) &= (-1, \pm\sqrt{3})\,. \end{aligned}$$

Låt $\theta_\pm$ beteckna vinkeln mellan kurvorna i punkten $p_\pm$. Då gäller att

$$\cos\theta_\pm = \frac{\nabla f(p_\pm) \bullet \nabla g(p_\pm)}{|\nabla f(p_\pm)| \cdot |\nabla g(p_\pm)|} = \frac{1 \cdot (-1) + (\pm\sqrt{3})^2}{\sqrt{1^2 + (\pm\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2}} = \frac{-1+3}{\sqrt{4}^2} = \frac{1}{2},$$

och alltså är $\theta_\pm = \dfrac{\pi}{3}$.

**Svar:** Det finns två skärningspunkter: $(1/2, \sqrt{3}/2)$ och $(1/2, -\sqrt{3}/2)$. I båda punkterna är vinkeln mellan kurvorna $\pi/3$.

**6.** a) Funktionen $f$ är $\mathcal{C}^1$, och funktionaldeterminanten

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(x,y)}(x,y) = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ 2x\sin y & x^2\cos y \end{vmatrix} = x^2(\cos y)^2 + 2x^2(\sin y)^2 = x^2\left(1 + (\sin y)^2\right) \geq x^2 > 0$$

eftersom $x > 0$. Enligt inversa funktionssatsen följer nu att det för varje punkt $(x,y) \in {]0,\infty[} \times \mathbf{R}$ finns någon öppen delmängd $U$ som innehåller $(x,y)$ sådan att $f$ är inverterbar som funktion $U \to f(U)$.

b) $f(1,0) = (1,0) = f(1,2\pi)$, så $f$ är inte injektiv, och därmed inte inverterbar.

**7.** Villkoren för området $D$ kan uttryckas som $\dfrac{z^4}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \dfrac{3}{2} - z^2$. Projektionen av $D$ på $z$-axeln består av de $z \in \mathbf{R}$ som uppfyller $z^4 \leq 2(\frac{3}{2} - z^2)$, alltså

$$0 \geq z^4 + 2z^2 - 3 = (z^2+1)^2 - 4 = (z^2+3)(z^2-1) \iff z^2 \leq 1 \iff -1 \leq z \leq 1.$$

Givet $z \in [-1,1]$ låt

$$D_z = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{z^4}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2} - z^2 \right\}.$$

Området $D_z$ utgörs av den del av disken med radie $\sqrt{3/2 - z^2}$ och centrum i origo som ligger utanför disken med radie $\sqrt{z^4/2}$ och centrum i origo, och dess area, $\iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, är alltså lika med

$$\pi\left(\frac{3}{2} - z^2\right) - \pi\frac{z^4}{2} = \pi\left(\frac{3}{2} - z^2 - \frac{z^4}{2}\right).$$

Volymen av $D$ beräknas nu med Fubinis sats:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(D) &= \iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{-1}^{1}\left(\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1}\pi\left(\frac{3}{2} - z^2 - \frac{z^4}{2}\right)\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{2} - z^2 - \frac{z^4}{2}\right)\mathrm{d}z = 2\pi\left[\frac{3}{2}z - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{10}z^5\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{10}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{45}{30} - \frac{10}{30} - \frac{3}{30}\right) = \frac{32}{15}\pi.
\end{aligned}$$

**Svar:** Området $D$ har volymen $\dfrac{32}{15}\pi$.