Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2024-05-31, 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas.** Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.**

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Låt
$$\begin{cases} u(x,y) = 5x + 2y, \\ v(x,y) = x - y, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad z = f(u(x,y), v(x,y)),$$
där f är en funktion av klass $\mathcal{C}^1$. Skriv de partiella derivatorna z'_x och z'_y av z uttryckt i termer av z'_u och z'_v.

   (b) Bestäm, om det existerar, gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+y)x^2 + (1+x)y^2}{x^2+y^2}$.

2. (a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till den yta som ges av ekvationen $e^{xy} + z = 0$, i punkten $(1, 1, -e)$.

   (b) Bestäm alla stationära punkter till den funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$, och ange deras karaktär.

Var god vänd!

3. (a) Beräkna integralen

$$\iint_D 6y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{där} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ -x \le y \le x\}.$$

(b) Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara det område i planet som bestäms av olikheterna $\begin{cases} 0 \le x - y \le 1, \\ 0 \le x + 3y \le 1. \end{cases}$

Bestäm integralen $\displaystyle\iint_D (x + 3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Del B

4. Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$z'_x + z'_y = \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}, \qquad x > y > 0\,,$$

genom att använda variabelbytet $u = x - y$, $v = x + y$. Ange specifikt alla lösningar $z = f(x,y)$ som uppfyller $f(5t, 4t) = 3t + \cos t$ för alla $t > 0$.

5. Låt γ_1 och γ_2 vara de kurvor i $\mathbb{R}^2$ som ges av ekvationerna $x^2 + y^2 = 1$ respektive $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Bestäm samtliga skärningspunkter mellan γ_1 och γ_2, samt vinkeln mellan dem i varje skärningspunkt.

6. Låt $f :]0,\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x \cos y, x^2 \sin y)$.

   (a) Visa att f är lokalt inverterbar nära varje punkt i sin definitionsmängd.

   (b) Visa att f *inte* är en inverterbar funktion.

7. Bestäm volymen av området

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 3/2\,,\ 2x^2 + 2y^2 \ge z^4 \right\} \subset \mathbb{R}^3\,.$$
