Lösningsförslag till TATA69 Flervariabelanalys 2024-08-21

1. a) $\begin{cases} x = 1 + u, \\ y = u - 2v. \end{cases}$

b) $f(x, y) = e^{xy} - x + xy - 1$.

2. a) $x + 4y = 2 + 2\ln 2$.

b) $f'(1) = -4$, $g'(1) = 2$.

3. a) $\iiint_{\tilde{D}} r^4 \cos\theta(\sin\theta)^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, där

$$\tilde{D} = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le r \le \sqrt{5},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}.$$

b) $\iint_K \frac{1}{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$.

4. a) Funktionen f är kontinuerlig i origo om och endast om $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = A$. Vi beräknar gränsvärdet genom att införa polära koordinater. För alla $(x, y) \ne (0, 0)$ är

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \overset{\text{pol.}}{=} \frac{\rho^3(\cos\varphi)^2 \sin\varphi}{\rho^2} = \rho(\cos\varphi)^2 \sin\varphi\,.$$

Eftersom $|(\cos\varphi)^2 \sin\varphi| \le 1$ gäller enligt sats att $f(x, y) = \rho(\cos\varphi)^2 \sin\varphi \to 0$ då $(x, y) \to (0, 0)$. Funktionen f är alltså kontinuerlig i $(0, 0)$ om och endast om $A = 0$.

b) Om en funktion är differentierbar i en punkt så är den även kontinuerlig där. Därför är f *inte* differentierbar i origo om $A \ne 0$.

Antag istället att $A = 0$, det vill säga att $f(0, 0) = 0$. Funktionen f är differentierbar i origo om och endast om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{|(x, y)|} = 0.$$

Vi har $f'_x(0, 0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$ och $f'_y(0, 0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(y, 0) - f(0, 0)}{y} = 0$, och alltså

$$R(x, y) := \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)x - f'_y(0, 0)y}{|(x, y)|} = \frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Längs x-axeln blir detta uttryck $R(x, 0) = 0 \to 0$ då $x \to 0$, medan $x = y > 0$ ger

$$R(x, x) = \frac{x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}} = \frac{x^3}{2\sqrt{2}x^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{då } x \to 0\,.$$

Uttrycket $R(x, y)$ har alltså olika gränsvärden längs olika kurvor mot origo, vilket betyder att gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} R(x, y)$ inte existerar.

Svar: Funktionen f är kontinuerlig i origo om och endast om $A = 0$. Den är inte differentierbar i origo för något värde på A.

5. Sätt $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Om $(\rho,\varphi) = (4,\pi/6)$ så blir då $(x,y) = \left(4\cos\frac{\pi}{6}, 4\sin\frac{\pi}{6}\right) = (2\sqrt{3}, 2)$.

Enligt kedjeregeln gäller sambanden

$$f'_\rho(\rho,\varphi) = g'_x(x,y)\cdot\cos\varphi + g'_y(x,y)\cdot\sin\varphi \quad \text{och}$$
$$f'_\varphi(\rho,\varphi) = g'_x(x,y)\cdot(-\rho\sin\varphi) + g'_y(x,y)\cdot\rho\cos\varphi\,.$$

Insättning av $\rho = 4$ och $\varphi = \pi/6$ ger

$$\begin{cases} f'_\rho(4,\pi/6) = 1/2 \\ f'_\varphi(4,\pi/6) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'_x(2\sqrt{3},2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + g'_y(2\sqrt{3},2)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ g'_x(2\sqrt{3},2)\cdot(-2) + g'_y(2\sqrt{3},2)\cdot 2\sqrt{3} = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}g'_x(2\sqrt{3},2) + g'_y(2\sqrt{3},2) = 1 \\ -g'_x(2\sqrt{3},2) + \sqrt{3}g'_y(2\sqrt{3},2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4g'_y(2\sqrt{3},2) = 1-\sqrt{3} \\ g'_x(2\sqrt{3},2) - \sqrt{3}g'_y(2\sqrt{3},2) = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g'_y(2\sqrt{3},2) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ g'_x(2\sqrt{3},2) - \sqrt{3}g'_y(2\sqrt{3},2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'_y(2\sqrt{3},2) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \\ g'_x(2\sqrt{3},2) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Svar: $\quad g'_x(2\sqrt{3},2) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ och $g'_y(2\sqrt{3},2) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

6. Skärningspunkterna A och B fås genom att sätta in $x = y = 0$ i ytans ekvation:

$$(-z)^2 + (-2z)^2 = 5 \;\Leftrightarrow\; 5z^2 = 5 \;\Leftrightarrow\; z = -1 \text{ eller } z = 1.$$

Skärningspunkterna är alltså $A = (0,0,-1)$ och $B = (0,0,1)$.

Låt $F(x,y,z) = (x+y-z)^2 + (y-2z)^2 + 3y^2$. Då är ytan en nivåyta till funktionen F, och gradientvektorerna $\nabla F(A)$ och $\nabla F(B)$ är normalvektorer till ytan i punkterna A respektive B. Vi beräknar

$$\nabla F(x,y,z) = (\,2(x+y-z)\,,\,2(x+y-z)+2(y-2z)+6y\,,\,-2(x+y-z)-4(y-2z)\,)$$

vilket ger $\nabla F(0,0,-1) = (2,6,-10)$ och $\nabla F(0,0,1) = (-2,-6,10)$. I och med att $\nabla F(0,0,1) = -\nabla F(0,0,-1)$ så är vektorn $\bar{n} := \frac{1}{2}\nabla F(0,0,-1) = (1,3,-5)$ normalvektor till ytan i båda punkterna.

Tangentplanet i punkten $A = (0,0,-1)$ ges nu av ekvationen

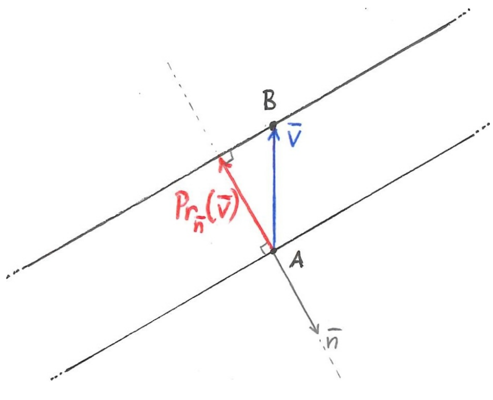
$$0 = \bar{n}\bullet((x,y,z)-(0,0,-1)) = (1,3,-5)\bullet(x,y,z+1) = x+3y-5z-5$$

det vill säga $x+3y-5z = 5$. På samma sätt fås ekvationen till tangentplanet i punkten $B = (0,0,1)$ som

$$0 = \bar{n}\bullet((x,y,z)-(0,0,1)) = (1,3,-5)\bullet(x,y,z-1) = x+3y-5z+5,$$

alltså $x+3y-5z = -5$.

De två tangentplanen sammanfaller inte (exempelvis ligger punkten A i det ena, men inte i det andra). Då planen har en gemensam normalvektor är de parallella, och saknar därmed skärningspunkter. Vektorn $\bar{v} := B - A = (0,0,2)$ representerar den riktade sträckan $\overline{AB}$. Längden av dess projektion på planens normalriktning ger avståndet mellan de två tangentplanen:



$$|\operatorname{Pr}_{\bar{n}}(\bar{v})| = \left|\frac{\bar{v}\bullet\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n}\right| = \left|\frac{\bar{v}\bullet\bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|2\cdot(-5)|}{\sqrt{1^2+3^2+(-5)^2}} = \frac{10}{\sqrt{35}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\,.$$

Svar: Tangentplanen i $A=(0,0,-1)$ och $B=(0,0,1)$ ges av ekvationerna $x+3y-5z=5$ respektive $x+3y-5z=-5$. Avståndet mellan planen är $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

7. Vi inför ett ortonormerat koordinatsystem med solen i origo, och Proxima Centauri i punkten $P=(0,0,R)$. Området vars volym vi söker blir då

$$M = B(\bar{0};R)\cap B(P;R) = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le R^2\,,\ x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2\}\,.$$

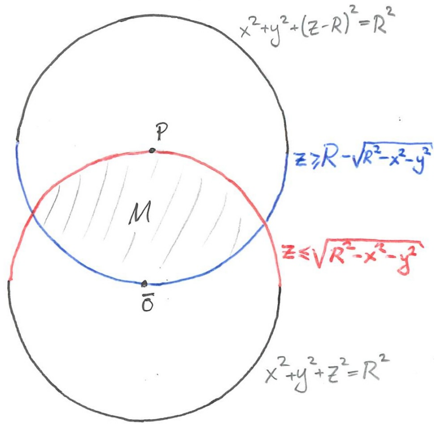
Skärningen mellan de två sfärer som begränsar området M ges av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 & (1) \\ (z-R)^2-z^2=0 & (2) \end{cases}$$

Av (2) får vi $0=(z-R)^2-z^2=(-R)(2z-R)$, alltså $2z-R=0$ och $z=R/2$. Insättning i (1) ger $x^2+y^2+(R/2)^2=R^2$, vilket är ekvivalent med att $x^2+y^2=3R^2/4$. Skärningsytan ges alltså av ekvationerna $\begin{cases} x^2+y^2=3R^2/4, \\ z=R/2. \end{cases}$

Låt $\tilde{M}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\le 3R^2/4\}$. Området $M\subset\mathbf{R}^3$ ges nu av

$$\begin{cases} (x,y)\in\tilde{M}, \\ R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}. \end{cases}$$



Vi beräknar volymen av området M med hjälp av Fubinis sats, och variabelbyte till polära koordinater. Området $\tilde{M}$ motsvaras i polära koordinater av det område $\tilde{D}$ som ges av olikheterna $0\le\rho\le\sqrt{3}R/2$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol}(M) &= \iiint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \overset{\text{Fub.}}{=} \iint_{\tilde{M}}\left(\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\tilde{M}}\left(2\sqrt{R^2-x^2-y^2}-R\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\tilde{M}}\left(2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - R\iint_{\tilde{M}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{pol.}}{=} \iint_{\tilde{D}} 2\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi - R\cdot\pi\frac{3R^2}{4} \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}R/2} 2\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi - \frac{3\pi}{4}R^3 \\
&= 2\pi\cdot\frac{2}{3}\left[-\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}R/2} - \frac{3\pi}{4}R^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\left(R^2\right)^{3/2}-\left(R^2-\frac{3R^2}{4}\right)^{3/2}\right) - \frac{3\pi}{4}R^3 \\
&= \frac{4\pi}{3}\left(R^3-\frac{R^3}{8}\right) - \frac{3\pi}{4}R^3 = \frac{14\pi}{12}R^3 - \frac{9\pi}{12}R^3 = \frac{5\pi}{12}R^3\,.
\end{aligned}$$

Svar: Områdets volym är $\dfrac{5\pi}{12}R^3$.