Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2024-08-21, 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas.** Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.**

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: minst 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Låt D vara parallellogramen i xy-planet med hörn i punkterna $(1,0)$, $(2,1)$, $(2,-1)$ samt $(1,-2)$. Ange nya variabler u, v sådana att området D uttryckt i dessa ges av $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$.

   Du kan ange u och v som funktioner av x och y, eller tvärt om.

   (b) Bestäm alla funktioner $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ som uppfyller $\begin{cases} f'_x(x,y) = ye^{xy} - 1 + y\,, \\ f'_y(x,y) = xe^{xy} + x\,, \\ f(0,0) = 0\,. \end{cases}$

2. (a) Bestäm en ekvation, på normalform, för tangentlinjen i punkten $\bar{r}(2)$ till den kurva i planet som ges av $\bar{r} : [1,3] \to \mathbb{R}^2\,,\ \bar{r}(t) = (\ln(t^2), 1/t)$.

   (b) Två deriverbara, reellvärda funktioner f och g, definierade i en omgivning av 1, uppfyller $f(1) = g(1) = 1$, samt

$$\begin{cases} x^2 f(x) + g(x) = 2, \\ f(x) + g(x)^2 = 2. \end{cases}$$

   Bestäm $f'(1)$ och $g'(1)$.

3. (a) Låt D vara det område i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $z \geq 0$ och $x^2+y^2+z^2 \leq 5$. Skriv integralen $\displaystyle\iiint_D xz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ i sfäriska koordinater.
Du skall inte beräkna integralen. Kom ihåg att specificera integrationsgränserna i de nya koordinaterna.

   (b) Bestäm integralen $\displaystyle\iint_K \frac{1}{x^2y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,,$ där $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < y < x\}$.

Del B

4. Funktionen f ges av $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$, och $f(0,0) = A$ där $A \in \mathbb{R}$. För vilka värden (om några) på konstanten A är f

   (a) kontinuerlig i origo?

   (b) differentierbar i origo?

5. Två differentierbara funktioner f och g uppfyller

$$f(\rho,\phi) = g(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi), \quad f'_\rho\left(4, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{och} \quad f'_\phi\left(4, \frac{\pi}{6}\right) = -2.$$

   Bestäm de partiella derivatorna $g'_x(2\sqrt{3}, 2)$ och $g'_y(2\sqrt{3}, 2)$.

6. Låt A och B vara de två skärningspunkterna mellan z-axeln och den yta som ges av ekvationen

$$(x+y-z)^2 + (y-2z)^2 + 3y^2 = 5.$$

   Bestäm ytans tangentplan i punkterna A och B, och det minsta avståndet mellan dessa två plan.

7. Bestäm volymen av det område M i världsrymden, som består av alla punkter som ligger närmare solen än vad Proxima Centauri gör, och närmare Proxima Centauri än vad solen gör. Avståndet mellan solen och Proxima Centauri är $R > 0$.

   För enkelhets skull ignorerar vi relativitetsteorin och betraktar rymden som ett tredimensionellt euklidiskt rum, och de båda stjärnorna som punktformiga.
   Glöm inte att redovisa dina antaganden, och ange betydelsen av alla variabler du introducerar.
   I verkligheten är $R \approx 4{,}25$ l.å. $\approx 4{,}02 \cdot 10^{16}$ m; här skall dock svaret vara exakt uttryckt i R.
