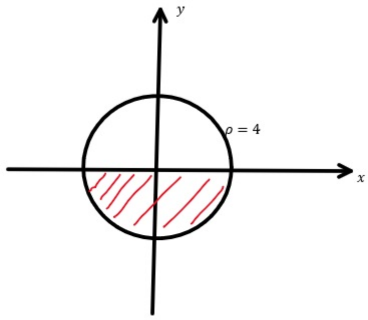
Lösningsförslag till TATA69 Flervariabelanalys 2024-10-30

OBS! På uppgift 1-3 ska bara svar anges på tentan. Nedan finns dock lösningsskisser med även för dessa uppgifter.

1. a) **Svar:** $0 \leq \rho \leq 4$, $-\pi \leq \varphi \leq 0$ (eller $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ funkar också).



b)

$$\begin{aligned}
z = \sin(2x+y) &\Rightarrow z'_x - 2z'_y = (2\cos(2x+y)) - 2(\cos(2x+y)) = 0, \\
z = \mathrm{e}^{x-y} &\Rightarrow z'_x - 2z'_y = (\mathrm{e}^{x-y}) - 2(-\mathrm{e}^{x-y}) = 3\mathrm{e}^{x-y} \neq 0, \\
z = f(2x+y) &\Rightarrow z'_x - 2z'_y = (2f'(2x+y)) - 2(f'(2x+y)) = 0.
\end{aligned}$$

Svar: $\sin(2x+y)$ och $f(2x+y)$.

2. a) Med $F(x,y) = x^2 + 2y^4$ gäller att $F(2,1) = 4+2 = 6$, så punkten ligger på kurvan. $\nabla F = (2x, 8y^3)$, $\nabla F(2,1) = (4,8) = 4(1,2)$. Vektorn $(1,2)$ är nu en normalvektor till den sökta tangentlinjen, vilket ger ekvationen $(1,2) \bullet (x,y) = (1,2) \bullet (2,1) \Leftrightarrow x + 2y = 4$.
Svar: $x + 2y = 4$.

b) Vi har $x + x^2 f(x) + f(x)^2 = 1$ i en omgivning till $x = 1$. Eftersom grafen $y = f(x)$ ska gå genom $(1,-1)$ har vi att $f(1) = -1$. Deriverar vi båda sidor i ekvationen ovan får vi

$$1 + 2xf(x) + x^2 f'(x) + 2f(x)f'(x) = 0.$$

Sätter vi nu in $x = 1$ och använder $f(1) = -1$ leder detta till ekvationen

$$1 - 2 + f'(1) - 2f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = -1.$$

Svar: $f(1) = -1$ och $f'(1) = -1$.

3. a) Om vi inför koordinaterna $u = x$ och $v = 2x + 4y$ ges området av gränserna $0 \leq u \leq 1$ och $0 \leq v \leq 6$. Vidare gäller att

$$3x + 4y = x + (2x + 4y) = u + v$$

samt

$$dudv = \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| dxdy = |\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}| dxdy = 4dxdy.$$

Så

$$\begin{aligned}
\iint_D (3x+4y)dxdy &= \int_0^6 (\int_0^1 \frac{u+v}{4} du) dv = \int_0^6 \left[\frac{u^2}{8} + \frac{uv}{4}\right]_{u=0}^1 dv \\
&= \int_0^6 \left(\frac{1}{8} + \frac{v}{4}\right) dv = \left[\frac{v}{8} + \frac{v^2}{8}\right]_{v=0}^6 = \frac{6}{8} + \frac{36}{8} = \frac{21}{4}.
\end{aligned}$$

Svar: $21/4$.

(Man kan alternativt direkt skriva om olikheterna som $0 \leq x \leq 1$, $-x/2 \leq y \leq 3/2 - x/2$ och tillämpa Fubini direkt:

$$\iint_D (3x+4y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x/2}^{3/2-x/2} (3x+4y)\, dy \right) dx = \ldots = \frac{21}{4}.)$$

b) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ger $0 \leq r \leq 3$, $x \geq 0$ ger $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ och $z \geq 0$ ger $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Integralen är visserligen generaliserad i 0, men integranden är positiv så vi kan räkna på som vanligt:

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\int_0^{\pi/2} (\int_0^3 \frac{r^2 \sin\theta}{r} dr) d\theta) d\varphi = \ldots = \frac{9\pi}{2}.$$

Svar: $9\pi/2$.

4. Vi börjar med att beräkna $f(3,1) = 12$, $f'_x = 2x$, $f'_x(3,1) = 6$, $f'_y = 3y^2$ och $f'_y(3,1) = 3$, som vi behöver nedan. Riktningsderivatan beräknas med formeln

$$f'_{\overline{v}}(3,1) = \frac{\nabla f(3,1) \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{(f'_x(3,1), f'_y(3,1)) \bullet (-1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{(6,3) \bullet (-1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}}.$$

Tangentplanet för grafen $z = f(x,y)$ i $(3, 1, f(3,1))$ ges av ekvationen

$$z = f(3,1) + f'_x(3,1)(x-3) + f'_y(3,1)(y-1),$$

vilket med värdena ovanifrån insatta ger

$$z = 12 + 6(x-3) + 3(y-1),$$

vilket omskrivet på normalform blir

$$6x + 3y - z = 9$$

där vi kan läsa av en normalvektor $(6, 3, -1)$ (notera att ovanstående ekvation också kan skrivas som $(6,3,-1) \bullet ((x,y,z) - (3,1,12)) = 0$).
Svar: Riktningsderivata $f'_{\overline{v}}(3,1) = -3/\sqrt{2}$, plan $z = 12 + 6(x-3) + 3(y-1)$, normalvektor $(6, 3, -1)$.

5. Vi börjar med att hitta alla kritiska punkter:

$$\nabla f = (-12x^2 + 12x^3, 4 + 2y) = (0,0)$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} -12x^2 + 12x^3 = 0, \\ 4 + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ eller } -12 + 12x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ eller } x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Alltså får vi två kritiska punkter $(0, -2)$ och $(1, -2)$. Vi tittar nu på den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$$

i respektive punkt och ser om vi kan få svar på frågan direkt från denna. Vi har

$$f''_{xx} = -24x + 36x^2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 2.$$

I punkten $(0,-2)$ får vi $f''_{xx}(0,-2)=0$, så

$$Q(h,k)=2k^2.$$

Denna är enbart semidefinit, så den kvadratiska formen ger inte svar på frågan. Men vi noterar att

$$f(x,-2)=-3+3x^4-4x^3=-3-x^3(4-3x),$$

och eftersom $x^3<0$ då $x<0$ och $x^3>0$ om $x>0$ men $(4-3x)>0$ för alla x nära noll så ser vi att $f(x,-2)>-3$ om $x<0$ och x är nära 0, men $f(x,-2)<-3$ om $x>0$ och x är nära 0. Så detta är inte en lokal extrempunkt.

I punkten $(1,-2)$ får vi istället $f''_{xx}(1,-2)=-24+36=12$ så att

$$Q(h,k)=12h^2+2k^2.$$

Eftersom denna uppenbarligen är positivt definit (dvs. $Q(h,k)>0$ om $(h,k)\neq(0,0)$) så har funktionen ett lokalt minimum i denna punkt.
Svar: f har ett lokalt minimum i $(1,-2)$.

6.

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},xy\right) &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}(xy)^2=\frac{x^4y^2-x^2y^4}{x^2+y^2}\\
&=\frac{\rho^6(\cos^4\varphi\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\sin^4\varphi)}{\rho^2}\\
&=\underbrace{\rho_4}_{\to 0}\cdot\underbrace{(\cos^4\varphi\sin^2\varphi-\cos^2\varphi\sin^4\varphi)}_{\text{begränsad}}\to 0 \text{ då } \rho\to 0.
\end{aligned}$$

Alltså, eftersom $\rho\to 0$ då $(x,y)\to(0,0)$, följer det att gränsvärdet existerar och är 0.

Om vi nu istället tittar på

$$f(x,y)=g\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},1+xy\right)$$

så ser vi att

$$f(0,y)=g(-1,1)=-1\to -1 \text{ då } y\to 0$$

och

$$f(x,0)=g(1,1)=1\to 1 \text{ då } x\to 0.$$

Alltså existerar inte gränsvärdet $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
Svar: Endast det första gränsvärdet existerar, och det är 0.

7. Området är helt enkelt snittet mellan halvrummet $x+y+z<0$ och klotet med centrum i $(1,1,1)$ och radie 4. Genom att göra ett ON-basbyte till ny bas, t ex

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{u}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{v}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\frac{w}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

där vi lägger den sista basvektorn i $(1,1,1)$-riktningen så ges området i de nya koordinaterna (u,v,w) av snittet mellan halvrummet $w<0$ och klotet med centrum i $(0,0,\sqrt{3})$ och radie 4, eftersom ett ON-basbyte inte ändrar avstånd (och avståndet från $(1,1,1)$ till origo är $\sqrt{3}$). Eftersom skalfaktorn vid ett sådant byte är 1 (Jacobianen är en ortogonal matris, som vi vet har determinant ± 1) kan vi nu helt enkelt räkna ut volymen av denna mängd i (u, v, w)-rummet (se 3D-bilder på nästa sida). Om vi projicerar mängden på w-axeln får vi $[-4+\sqrt{3}, 0]$, och för varje c i detta intervall är snittet mellan planet $w = c$ och mängden en cirkelskiva

$$u^2 + v^2 \leq 16 - (w - \sqrt{3})^2$$

som har radie $r = \sqrt{16 - (w - \sqrt{3})^2}$, vilket ger arean $\pi(16 - (w - \sqrt{3})^2)$. Fubinis sats (skivformeln) ger alltså att volymen ges av

$$\int_{-4+\sqrt{3}}^{0} \pi(16 - (w - \sqrt{3})^2)dw = \pi \left[16w - \frac{(w - \sqrt{3})^3}{3}\right]_{-4+\sqrt{3}}^{0} = \cdots = \pi \left(\frac{128}{3} - 15\sqrt{3}\right).$$

Svar: $\pi(128/3 - 15\sqrt{3})$.

Nedan är bilder först i xyz-rummet och sedan i uvw-rummet på klotet och planet i uppgift 7. Mängden i fråga är delen av klotet “under” planet.