Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2024-10-30, 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas.** Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.**

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: minst 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Skriv området som ges av

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, y \leq 0\}$$

i polära koordinater.

(b) Bestäm vilka (om några) funktioner av nedanstående som löser $z'_x - 2z'_y = 0$:

$$z = \sin(2x+y), \quad z = \mathrm{e}^{x-y}, \quad z = f(2x+y) \text{ där } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

2. (a) Bestäm en ekvation, på normalform, för tangentlinjen i punkten $(2,1)$ till den kurva i planet som ges av

$$x^2 + 2y^4 = 6.$$

(b) Betrakta ekvationen $x + x^2y + y^2 = 1$. Eftersom $F(x,y) = x + x^2y + y^2$ är av klass $\mathcal{C}^1$, $F(1,-1) = 1$ och $F'_y(1,-1) \neq 0$ följer det från implicita funktionssatsen att ekvationen i en omgivning till $(x,y) = (1,-1)$ definierar en funktion $y = f(x)$. Bestäm $f(1)$ och $f'(1)$ för denna funktion.

3. (a) Beräkna integralen

$$\iint_D (3x + 4y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

där D är det område i $\mathbb{R}^2$ som ges av olikheterna

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq 2x + 4y \leq 6.$$

(b) Beräkna integralen

$$\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

där

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Del B

4. Låt $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2$. Beräkna riktningsderivatan $f'_{\overline{v}}(3, 1)$ då $\overline{v} = (-1, 1)$. Bestäm även tangentplanet, samt en normalvektor, till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y, z) = (3, 1, f(3, 1))$.

5. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen

$$f(x, y) = 1 + 4y + y^2 - 4x^3 + 3x^4.$$

6. Låt $g(u, v) = uv^2$. Avgör om följande gränsvärden existerar (och beräkna dem i så fall):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, xy\right) \text{ och } \lim_{(x,y)\to(0,0)} g\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, 1 + xy\right).$$

7. Beräkna volymen av det område $D \subset \mathbb{R}^3$ som består av alla punkter (x, y, z) sådana att $x + y + z < 0$ och avståndet till punkten $(1, 1, 1)$ är mindre än 4.
