Lösningsförslag till TATA69 Flervariabelanalys 2025-01-07

OBS! På uppgift 1-3 ska bara svar anges på tentan. Nedan finns dock lösningsskisser med även för dessa uppgifter.

1. a) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ är ekvivalent med $0 \leq r \leq 3$, $y \geq 0$ är ekvivalent med att $\varphi \in [0, \pi]$, och θ har inga ytterligare begränsningar än det som följer av definitionen av sfäriska koordinater, dvs. $\theta \in [0, \pi]$.
Svar: $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$.

b) Med det föreslagna variabelbytet $u = 2x - 3y$, $v = x$ får vi

$$\begin{aligned} z'_x &= z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2z'_u + z'_v \\ z'_y &= z'_u u'_y + z'_v v'_y = -3z'_u. \end{aligned}$$

Alltså får vi

$$3z'_x + 2z'_y = 6z'_u + 3z'_v - 6z'_u = 3z'_v = 0$$

vilket ger

$$z = f(u) = f(2x - 3y), \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

Svar: $z = f(2x - 3y), \quad f \in C^1(\mathbb{R})$.

2. a) Man kan antingen derivera uttrycket direkt, eller använda standardutvecklingen $\mathrm{e}^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$ med $t = xy - y = (x - 1)y$ (OBS! $(x, y) = (1, 0) \Rightarrow t = 0$), samt kvadratkompletteringen $-8x + 4x^2 = 4(x - 1)^2 - 4$. Här visar vi den sistnämnda metoden:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(1, 0) + f'_x(1, 0)(x - 1) + f'_y(1, 0)y + \\ &\quad + \frac{f''_{xx}(1, 0)}{2}(x - 1)^2 + f''_{xy}(1, 0)(x - 1)y + \frac{f''_{yy}(1, 0)}{2}y^2 + \mathcal{O}(|(x - 1, y)|^3) \\ &= -8x + 4x^2 + 2y^2 + (1 + ((x - 1)y) + \mathcal{O}(((x - 1)y)^2) \\ &= -3 + 4(x - 1)^2 + (x - 1)y + 2y^2 + \mathcal{O}(|(x - 1, y)|^3). \end{aligned}$$

Här kan vi nu läsa av att $f'_x(1, 0) = f'_y(1, 0) = 0$, så $(1, 0)$ är en stationär punkt, och

$$f''_{xx}(1, 0) = 8, \quad f''_{xy}(1, 0) = 1, \quad f''_{yy}(1, 0) = 4.$$

Eftersom

$$4h^2 + hk + 2k^2 = 4(h + k/8)^2 - 4k^2/64 + 2k^2 = 4(h + k/8)^2 + 31k^2/16$$

är positivt definit ser vi att f har ett lokalt minimum i $(1, 0)$.
Svar: $f'_x(1, 0) = f'_y(1, 0) = 0, f''_{xx}(1, 0) = 8$, $f''_{xy}(1, 0) = 1$, $f''_{yy}(1, 0) = 4$. Lokalt min.

b) Med $F(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + z$ gäller $F(1, -1, 2) = 5$ så punkten ligger på den givna nivåmängden. Vidare gäller att

$$\nabla F(x, y, z) = (3x^2, 4y, 1), \quad \nabla F(1, -1, 2) = (3, -4, 1),$$

och vi vet då att denna pekar i normalriktningen till ytan i punkten $(1, -1, 2)$, så tangentplanet ges av

$$(3, -4, 1) \bullet (x, y, z) = (3, -4, 1) \bullet (1, -1, 2) \Leftrightarrow 3x - 4y + z = 9.$$

Svar: $3x - 4y + z = 9$.

3. a) D ges i polära koordinater av $0 \leq \rho \leq 1$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Så

$$\iint_D 3x\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\int_0^1 3\rho\cos\varphi\,\rho d\rho) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^1 3\rho^2\,d\rho$$
$$= [\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \left[\rho^3\right]_0^1 = 2.$$

Svar: 2.

b) Kruvorna $y = x^2$ och $y = 1$ skär varandra då $x = \pm 1$, och vi ser att området kan skrivas som

$$-1 \leq x \leq 1,\; x^2 \leq y \leq 1.$$

Fubinis sats ger nu

$$\iint_D 2y\,dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{1} 2y\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^4)\,dx = \left[x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{5}.$$

Svar: 8/5.

4. Vi börjar med att beräkna $f(1,2) = 1$, $f'_x = 3x^2$, $f'_x(1,2) = 3$, $f'_y = 2y - 2$ och $f'_y(1,2) = 2$, som vi behöver nedan. Riktningsderivatan beräknas med formeln

$$f'_{\overline{v}}(1,2) = \frac{\nabla f(1,2) \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|} = \frac{(f'_x(1,2), f'_y(1,2)) \bullet (2,-1)}{\sqrt{5}} = \frac{(3,2) \bullet (2,-1)}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Tangentplanet för grafen $z = f(x,y)$ i $(1,2,f(1,2))$ ges av ekvationen

$$z = f(1,2) + f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2),$$

vilket med värdena ovanifrån insatta ger

$$z = 1 + 3(x-1) + 2(y-2),$$

vilket omskrivet på normalform blir

$$3x + 2y - z = 6$$

där vi kan läsa av en normalvektor $(3,2,-1)$ (notera att ovanstående ekvation också kan skrivas som $(3,2,-1) \bullet ((x,y,z) - (1,2,1)) = 0$).
Svar: Riktningsderivata $f'_{\overline{v}}(1,2) = 4/\sqrt{5}$, plan $z = 1 + 3(x-1) + 2(y-2)$, normalvektor $(3,2,-1)$.

5. Med $F(x,y) = x^2 + xy + x^2y^3$ gäller $F(1,-1) = -1$, så punkten ligger på den givna nivåmängden. Vi har nu

$$\nabla F = (F'_x, F'_y) = (2x + y + 2xy^3, x + 3x^2y^2), \quad \nabla F(1,-1) = (-1,4),$$

och eftersom $F'_y(1,-1) \neq 0$, och F uppenbarligen är av klass C^1, så följer det från implicita funktionssatsen att nivåmängden $F(x,y) = -1$ lokalt kring $(1,-1)$ ges av en graf $y = f(x)$, där $f(1) = -1$. Vidare gäller

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

så speciellt

$$f'(1) = -\frac{F'_x(1,-1)}{F'_y(1,-1)} = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}.$$

(Alternativt kan man derivera ekvationen $x^2 + xf(x) + x^2 f(x)^3 = -1$ på båda sidor och få ekvationen $2x + f(x) + xf'(x) + 2xf(x)^3 + 3x^2 f(x)^2 f'(x) = 0$ vilket ger

$$f'(x) = -\frac{2x + f(x) + 2xf(x)^3}{x + 3x^2 f(x)^2}.$$

Notera att det senare precis är $-F'_x(x, f(x))/F'_y(x, f(x))$.)
Svar: $f(1) = -1$, $f'(1) = 1/4$.

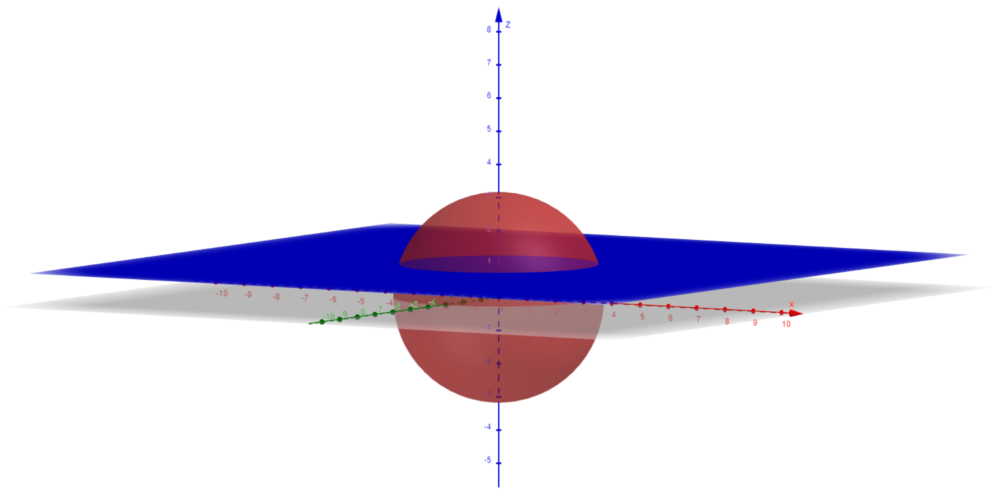
6. Vi noterar att $z = 1$ insatt i olikheten $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ ger $x^2 + y^2 + 1^2 \leq 10$, vilket är ekvivalent med $x^2 + y^2 \leq 9$, och vi inser lätt att detta är projektionen av det givna området på xy-planet (se plot nedan), så att vår mängd kan skrivas som

$$x^2 + y^2 \leq 9, \quad 1 \leq z \leq \sqrt{10 - x^2 - y^2}.$$

Alltså ger Fubinis sats

$$\begin{aligned}\iiint_D 2z\, dxdydz &= \iint_{\{x^2+y^2\leq 9\}} \left(\int_1^{\sqrt{10-x^2-y^2}} 2z\, dz \right) dxdy \\ &= \iint_{\{x^2+y^2\leq 9\}} ((10 - x^2 - y^2) - 1)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 (9 - \rho^2)\rho d\rho \right) d\varphi \\ &= 2\pi \left[\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}.\end{aligned}$$

Nedan är en bild med sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ och planet $z = 1$ plottade. Området är i detta fall den del av klotet innanför sfären som ligger över planet, och vi kan i detta fall se projektionen på xy-planet i princip som snittet mellan planet och klotet.



Svar: $81\pi/2$.

7. Vi börjar med att undersöka om partialderivatorna $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ existerar:

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^3/2h^2 - 0}{h} \to \frac{1}{2} \text{ då } h \to 0$$

så $f'_x(0,0) = 1/2$.

$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{2k^3/3k^2 - 0}{k} \to \frac{2}{3} \text{ då } k \to 0$$

så $f'_y(0,0) = 2/3$. Funktionen är då differentierbar om och endast om

$$R(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \text{ då } (h,k) \to (0,0).$$

Men vi har i detta fall längs $h = k$

$$R(h,h) = \ldots = \frac{-17h^3}{30\sqrt{2}h^3} = \frac{-17}{30\sqrt{2}} \not\to 0 \text{ då } h \to 0.$$

Alltså är funktionen inte differentierbar i origo.
Svar: Ej differentierbar i origo.