Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA69
Modul: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2025-01-07, 8:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas.** Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.**

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: minst 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Skriv området som ges av
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, y \geq 0\}$$
i sfäriska koordinater.

   (b) Bestäm alla lösningar z i $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ till $3z'_x + 2z'_y = 0$. (Tips: använd variablerna $u = 2x - 3y$, $v = x$.)

2. (a) Bestäm de partiella derivatorna av första och andra ordningen i punkten $(1, 0)$ till funktionen som ges av
$$f(x, y) = -8x + 4x^2 + 2y^2 + \mathrm{e}^{xy-y},$$
samt avgör om f har en lokal extrempunkt i denna punkt (och ange i så fall vilken typ).

   (b) Bestäm en ekvation, på normalform, för tangenplanet i punkten $(1, -1, 2)$ till den yta i $\mathbb{R}^3$ som ges av
$$x^3 + 2y^2 + z = 5.$$

3. (a) Beräkna integralen

$$\iint_D 3x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

där D är det område i $\mathbb{R}^2$ som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 1, \; x \geq 0.$$

(b) Beräkna integralen

$$\iint_D 2y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

där D är det område i $\mathbb{R}^2$ som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 1$.

Del B

4. Låt $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2y$. Beräkna riktningsderivatan $f'_{\overline{v}}(1, 2)$ då $\overline{v} = (2, -1)$. Bestäm även tangentplanet, samt en normalvektor, till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x, y, z) = (1, 2, f(1, 2))$.

5. Visa att ekvationen $x^2 + xy + x^2y^3 = -1$ definierar en funktion $y = f(x)$ i någon omgivning till $(x, y) = (1, -1)$, samt bestäm $f(1)$ och $f'(1)$ för denna funktion.

6. Beräkna integralen

$$\iiint_D 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

där D är det område i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$, $z \geq 1$.

7. Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^3}{2x^2 + 3y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Avgör om $f(x, y)$ är differentierbar i $(0, 0)$.
