

Lösningsförslag till TATA69 Flervariabelanalys 2025-06-04

1. a) $f(x, y) = x \arctan y + \ln y + C$.
b) $z = x^3 + xy + f(x^2 + y)$, där $f \in C^1(\mathbf{R})$.
2. a) $z = 4x + 2y - 3$;
b) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(1, -1) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. a) $\iint_D x dx dy = 2/3$;
b) $I_1 \in B, I_2 \in C$.
4. Sätt $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ och $G(x, y, z) = x + y - z$. Notera att $F(1, 1, -2) = 0$, $G(1, 1, -2) = 4$, vilket innebär att punkten $(1, 1, -2)$ ligger i skärningen mellan ytorna, som ges av $F(x, y, z) = 0$ respektive $G(x, y, z) = 4$. Eftersom tangentlinjen till skärningskurvan är tangentiell till de båda ytorna, och gradientvektorerna $\nabla F(1, 1, -2)$ och $\nabla G(1, 1, -2)$ vinkelräta mot dessa, så följer att de båda gradientvektorerna är vinkelräta mot skärningskurvans tangentlinje. I synnerhet är vektorn $\nabla F(1, 1, -2) \times \nabla G(1, 1, -2)$ parallell med den sökta tangentlinjen.
Vi har $\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$ och $\nabla G(x, y, z) = (1, 1, -1)$, och alltså
$$\nabla F(1, 1, -2) \times \nabla G(1, 1, -2) = (2, 2, 1) \times (1, 1, -1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{e}_3 = (-3, 3, 0).$$
Således är vektorn $(-1, 1, 0)$ parallell med tangentlinjen, som alltså (på parameterform) beskrivs av
$$(x, y, z) = (1, 1, -2) + t(-1, 1, 0) = (1 - t, 1 + t, -2) \quad \text{där } t \in \mathbf{R}.$$
Svar: $(x, y, z) = (1 - t, 1 + t, -2)$, där $t \in \mathbf{R}$.

5. Låt $B = B((0, 0); 1)$ och $M = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Med ett variabelbyte till polära koordinater, och Fubinis sats, fås

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \iint_B (2x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\text{pol.}}{=} \iint_M \rho^2 ((\cos \varphi)^2 + 1) \rho d\rho d\varphi \\ &\stackrel{\text{Fub.}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^3 ((\cos \varphi)^2 + 1) d\rho \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} ((\cos \varphi)^2 + 1) d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos 2\varphi + 1}{2} + 1 \right) d\varphi \cdot \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{3}{2} \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Svar: Volymen av K är $3\pi/4$.

Alternativ lösning: Man kan med fördel utnyttja symmetrin mellan x och y för att förenkla problemet. Uppenbarligen är $\iint_B x^2 dx dy = \iint_B y^2 dx dy$, och därmed

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \iint_B (2x^2 + y^2) dx dy = 3 \iint_B x^2 dx dy = \frac{3}{2} \iint_B (x^2 + y^2) dx dy \stackrel{\text{pol.}}{=} \frac{3}{2} \iint_M \rho^3 d\rho d\varphi \\ &\stackrel{\text{Fub.}}{=} \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

6. Vi har $\nabla f(x, y, z) = (3x^2 \cos(x^3) + 2ax, 2by)$, så $\nabla f(0, 0, 0) = 0$; origo är alltså en stationär punkt till f . Vidare är

$$f''_{xx}(x, y) = 6x \cos(x^3) - 9x^4 \sin(x^3) + 2a, \quad f''_{xy}(x, y) = 0, \quad \text{och} \quad f''_{yy}(x, y) = 2b,$$

varvid Hessianen i $(0, 0)$ är

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(0, 0) & f''_{xy}(0, 0) \\ f''_{xy}(0, 0) & f''_{yy}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}.$$

Eigenvärdena till $H(0, 0)$ är $2a$ och $2b$. Om $a, b > 0$ så är eigenvärdena positiva, och den kvadratiske formen $q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ positivt definit. Enligt sats gäller då att $(0, 0)$ är en minimipunkt till funktionen f .

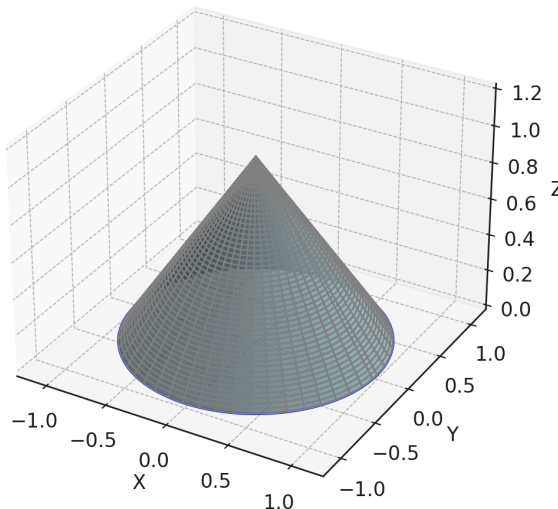
Om minst en av a och b är negativ så är q antingen indefinit eller negativt definit/semidefinit, och $(0, 0)$ är därmed inte en minimipunkt.

Antag att $a = 0$. Då är $f(x, y) = \sin(x^3) + by^2$, och $f(x, 0) = \sin(x^3)$. Eftersom $f(x, 0) < 0 = f(0, 0)$ för små $x < 0$ (närmare bestämt för alla $x \in]-\pi, 0[$), och $f(x, 0) > 0$ för små $x > 0$, så är $(0, 0)$ inte en minimipunkt i detta fall.

Antag slutligen att $a > 0$ och $b = 0$. Då är $f(x, y) = \sin(x^3) + ax^2$. Eftersom $f'_x(0, 0) = 0$ och $f''_{xx}(0, 0) = 2a > 0$, så är $(0, 0)$ en minimipunkt till f , enligt en sats från envariabelanalysen.

Svar: Funktionen f har ett lokalt minimum i origo om och endast om $a > 0$ och $b \geq 0$.

7. a) En cirkulär kon med basradie 1 och höjd 1:



- b) För $z \in [0, 1]$, låt $K_z \subset \mathbf{R}^2$ vara mängden av alla punkter på formen

$$(x, y) = ((1 - z)u, (1 - z)v) \quad \text{för någon punkt } (u, v) \in M.$$

Variabelbytet $\begin{cases} x = (1 - z)u \\ y = (1 - z)v \end{cases}$ avbildar då M på K_z , och $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = (1 - z)^2$. Dessutom gäller att $(x, y, z) \in K_M$ om och endast om $z \in [0, 1]$ och $(x, y) \in K_z$. Med hjälp av Fubinis sats, följt av ovan beskrivna variabelbyte, får vi nu

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_M) &= \iiint_{K_M} dx dy dz \stackrel{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 \left(\iint_{K_z} dx dy \right) dz \stackrel{\text{var.}}{=} \int_0^1 \left(\iint_M (1 - z)^2 du dv \right) dz \\ &= \int_0^1 (1 - z)^2 dz \cdot \iint_M du dv = \left[-\frac{(1 - z)^3}{3} \right]_0^1 \cdot A = \frac{A}{3}, \end{aligned} \quad \text{vilket skulle bevisas.}$$