Lösningsförslag till TATA69 Flervariabelanalys 2025-08-20

1. Svar:

a) $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+z} = \dfrac{r}{r(\sin\theta)^2\cos\varphi\sin\varphi+\cos\theta}$;

b) $w'(t) = -\sin t\cdot f'_x(\bar{u}(t)) + \cos t\cdot f'_y(\bar{u}(t)) + 2t\cdot f'_z(\bar{u}(t))$, där $\bar{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

2. Svar:

a) $2x+y=-1$;

b) funktionen har endast en lokal extrempunkt, $(1,0)$, som är en minimipunkt.

3. Svar:

a) $\displaystyle\iint_M x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$;

b) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8\pi$.

4. Av uppgiften framgår att $f'_x(x,y,z) = e^x\cos y + 2xz$, varav det följer att $f(x,y,z) = e^x\cos y + x^2z + g(y,z)$ för någon funktion $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$. Derivering av detta uttryck med avseende på y ger att $f'_y(x,y,z) = -e^x\sin y + g'_y(y,z)$. Enligt uppgiften är $f'_y(x,y,z) = 1-e^x\sin y$, alltså gäller att $1-e^x\sin y = -e^x\sin y + g'_y(y,z)$, det vill säga $g'_y(y,z)=1$. Det följer att $g(y,z) = y+h(z)$ för någon funktion $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ vilket, insatt i uttrycket för f, ger

$$f(x,y,z) = e^x\cos y + x^2z + y + h(z)\,.$$

Derivering med avseende på z ger nu att $f'_z(x,y,z) = x^2+h'(z)$ villket, jämfört med villkoret $f'_z(x,y,z) = x^2$, ger $h'(z)=0$, alltså att funktionen h är konstant. Därmed gäller att $f(x,y,z) = e^x\cos y + x^2z + y + C$ för något $C\in\mathbf{R}$. Insättning i villkoret $f(0,0,0)=0$ ger $C=-1$.

Kontrollderivering med avseende på x, y, respektive z visar att det härledda uttrycket även uppfyller $\nabla f = \bar{v}$, och alltså är den unika lösningen till ekvationssystemet.

Svar: $f(x,y,z) = e^x\cos y + x^2z + y - 1$.

5. För variabelbytet $\binom{x}{y} = \binom{1}{0} + s\binom{1}{1} + t\binom{-1}{4}$ fås

$$\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(s,t)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-(-1) = 5\,.$$

Dessutom gäller att

$$(x,y)\in T \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 0\le s,t, \\ s+t\le 1, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 0\le s\le 1-t, \\ 0\le t\le 1. \end{cases}$$

Låt D beteckna mängden av $(s,t) \in \mathbf{R}^2$ som uppfyller ovanstående villkor. Vi får

$$\begin{aligned}\iint_T (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D ((1+s-t)-(s+4t))\left|\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(s,t)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 5\iint_D (1-5t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{Fub.}}{=} 5\int_0^1 \left(\int_0^{1-t}(1-5t)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = 5\int_0^1 (1-5t)(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= 5\int_0^1 (1-6t+5t^2)\,\mathrm{d}t = 5\left[t-3t^2+\frac{5t^3}{3}\right]_0^1 = 5\left(1-3+\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Svar: $\displaystyle\iint_T (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{5}{3}$.

6. a) $\displaystyle\frac{2x^2+2xy+x+y}{x+y} = \frac{2x(x+y)+(x+y)}{x+y} = 2x+1 \to 1$ då $(x,y)\to(0,0)$
(eftersom uttrycket $2x+1$ beror kontinuerligt av (x,y)).

b) Låt $g(x,y) = \dfrac{x^2y-xy^2-2xy+y^2+y}{(x-1)^3+y^3}$, och $(x,y)=(1+h,k)$. Då är

$$\begin{aligned}g(1+h,k) &= \frac{(1+h)^2k-(1+h)k^2-2(1+h)k+k^2+k}{h^3+k^3} \\ &= \frac{k+2hk+h^2k-k^2-hk^2-2k-2hk+k^2+k}{h^3+k^3} = \frac{h^2k-hk^2}{h^3+k^3}\end{aligned}$$

För $(h,k)=(2t,t)$ fås då

$$\begin{aligned}&g(1+2t,t) = \frac{4t^3-2t^3}{9t^3} = \frac{2}{9} \to \frac{2}{9} \quad \text{då } t\to 0\,, \quad \text{medan} \\ &g(1+h,0) = 0 \to 0 \quad \text{då } h \to 0\,.\end{aligned}$$

Alltså existerar inte gränsvärdet.

Svar: (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+2xy+x+y}{x+y} = 1$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y-xy^2-2xy+y^2+y}{(x-1)^3+y^3}$ existerar ej.

7. Sätt $f(x,y) = x^2+y-y^3$, så att kurvans ekvation ges av $f(x,y)=0$. Eftersom f är en polynomfunktion gäller att $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$, och i synnerhet är f differentierbar i varje punkt i $\mathbf{R}^2$.

En ekvation för tangentlinjen i en punkt (a,b) på kurvan ges nu av $\nabla f(a,b)\bullet(x-a,y-b)=0$. Att origo ligger på denna tangentlinje är alltså ekvivalent med att $\nabla f(a,b)\bullet(a,b)=0$.

Vi har $\nabla f(x,y) = (2x, 1-3y^2)$, och därmed

$$\nabla f(a,b)\bullet(a,b) = (2a,1-3b^2)\bullet(a,b) = 2a^2+b-3b^3\,.$$

Vi söker alltså alla punkter $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ som uppfyller

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a^2+b-3b^3 &=& 0 \\ a^2+b-b^3 &=& 0\end{array}\right. \overset{\text{r1}-2\cdot\text{r2}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} -b-b^3 &=& 0 \\ a^2+b-b^3 &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b(1+b^2) &=& 0 \\ a^2+b-b^3 &=& 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0 \\ a+b-b^3 &=& 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0 \\ a &=& 0\end{array}\right.$$

Svar: Den enda punkt på kurvan som uppfyller villkoret är $(0,0)$.