

Tentamen i Flervariabelanalys

2025-08-20, 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas**. Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar**.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: minst 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

- (a) Uttryck $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + z}$ i sfäriska koordinater.

(b) Låt $w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, där $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, och
$$\begin{cases} x(t) = \cos t, \\ y(t) = \sin t, \\ z(t) = t^2. \end{cases} \quad \text{Ge ett}$$
uttryck för $w'(t)$ i termer av f'_x, f'_y, f'_z , och t .
- (a) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $x^3 + x + y^2 + 1 = 0$ i punkten $(-1, 1)$.

(b) Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 2y$, och ange deras karaktär.
- (a) Bestäm $\iint_M x \, dx \, dy$, där $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$.

(b) Bestäm $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, där D är cirkelskivan med radie två och centrum i origo.

Var god vänd!

Del B

4. Låt $\bar{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\bar{v}(x, y, z) = (e^x \cos y + 2xz, 1 - e^x \sin y, x^2)$. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ som uppfyller $\nabla f(x, y, z) = \bar{v}(x, y, z)$ för alla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, och $f(0, 0, 0) = 0$.

5. Beräkna $\iint_T (x - y) \, dx \, dy$, där T är triangeln med hörn i $(1, 0)$, $(2, 1)$ och $(0, 4)$.

6. Bestäm följande gränsvärden (eller visa att de inte existerar):

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 2xy + x + y}{x + y}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2y - xy^2 - 2xy + y^2 + y}{(x - 1)^3 + y^3}.$$

7. Bestäm alla punkter på kurvan $x^2 = y^3 - y$ sådana att kurvans tangentlinje i punkten innehåller $(0, 0)$.
