

Tentamen i Flervariabelanalys

2025-10-29, 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas**. Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar**.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: minst 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Skriv området som ges av

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 9, -x \leq y \leq 0\} \quad (1p)$$

i polära koordinater.

- (b) Bestäm alla lösningar z i $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ till $5z'_x - 2z'_y = 10x$.
(Tips: använd variablerna $u = 2x + 5y$, $v = x$.) (1p)

2. (a) Låt $F(x, y) = y^2 + e^{x^2+y}$. Man kan visa via implicita funktionssatsen att ekvationen

$$F(x, y) = 17 \quad (1p)$$

lokalt runt $(2, -4)$ definierar en funktion $y = f(x)$. Beräkna $f(2)$ och $f'(2)$ för denna.

- (b) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(-1, 2, -5)$ till ytan som ges av

$$z = x^3 + xy^2. \quad (1p)$$

3. (a) Beräkna integralen

$$\iint_D y \, dx \, dy, \quad (1p)$$

där D är det område i $\mathbb{R}^2$ som ges av olikheterna $0 \leq y \leq 4 - x^2$.

- (b) Beräkna integralen

$$\iiint_D 2z \, dx \, dy \, dz, \quad (1p)$$

där D är det område i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \leq 0$.

Del B

4. Bestäm alla stationära punkter till $f(x, y, z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2$ samt ange deras karaktär.

5. Beräkna gränsvärdena (eller visa att de inte existerar):

- (a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^4}{x^2 + y^2}.$$

- (b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + y + x^2) - y - x^2}{y^2 + x^4}.$$

(Att $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$ får användas utan motivering.)

6. Låt $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2$. Det finns då en unik punkt $(a, b, f(a, b))$ i $\mathbb{R}^3$ sådan att tangentplanet till grafen av $z = f(x, y)$ i denna punkt är parallellt med planet $2x - 8y - z = 0$. Beräkna volymen av det område $D \subset \mathbb{R}^3$ som består av alla punkter (x, y, z) sådana att

$$f(x, y) \leq z \leq f(a, b).$$

7. Visa att det för varje reellt tal r finns en växande följd $K_1, K_2, K_3, \dots$ av begränsade mängder sådan att $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathbb{R}^2$ och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{K_n} (x - y) \, dx \, dy = r.$$