

Tentamen i Flervariabelanalys

2026-01-05, 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel är manuella skriv- och ritverktyg, inklusive linjal, passare och gradskiva utan formler.

Tentamen består av två delar: A och B.

- **Del A** består av 3 uppgifter, numrerade 1–3, värda 2p vardera. På dessa uppgifter **ska endast svar lämnas**. Skriv svaren på **ett gemensamt papper**.
- **Del B** består av 4 uppgifter, numrerade 4–7, värda 3p vardera. Till dessa **krävs fullständiga och välmotiverade lösningar**.

Med **godkänd uppgift** menas en uppgift som bedömts med minst 2p.

För godkänd tentamen (**betyg 3/4/5**) skall följande krav vara uppfyllda:

K1: minst 1 poäng på varje uppgift på del A, och

K2: minst 1/2/3 godkända uppgifter på del B samt minst 8/12/16 poäng totalt på tentan.

Notera: Rättningen kan komma att avbrytas ifall det står klart att kraven för godkänt betyg inte längre kan uppfyllas.

Del A

OBS! Endast svar ska lämnas på del A, på ett gemensamt papper.

1. (a) Skriv området som i polära koordinater ges av olikheterna

$$2 \leq \rho \leq 5, \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$$

i kartesiska koordinater x, y .

(**OBS!** De enda tillåtna variablerna i svaret är x, y .)

- (b) Bestäm alla lösningar z i $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ till

$$\begin{cases} z'_x = 2xy^4 + y^3, \\ z'_y = 4x^2y^3 + 3xy^2. \end{cases}$$

2. (a) Vilken eller vilka (om någon) av funktionerna g, h, k på $\mathbb{R}^2$ har ett lokalt minimum i origo om

$$g(x, y) = -2 + x^2 - 2xy + 2y^2,$$

$$h(x, y) = -2x + x^2 + 2xy + 2y^2,$$

$$k(x, y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^3).$$

- (b) Bestäm en ekvation på parameterform för normallinjen i punkten $(-1, 2, -5)$ till ytan som ges av

$$z = x^3 + xy^2.$$

3. (a) Beräkna integralen

$$\iint_D 3x dx dy,$$

där D är det område i $\mathbb{R}^2$ som ges av olikheterna $0 \leq x+y \leq 3$, $1 \leq 2x-y \leq 4$.

- (b) Beräkna integralen

$$\iiint_D z dx dy dz,$$

där D är det område i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Del B

4. (a) Bestäm ekvationer på normalform och parameterform för tangentplanet till ytan som ges av $x^2y + y^2z + z^2 = 1$ i punkten $(2, 0, 1)$.
(b) Avgör om gränsvärdet existerar (och beräkna det i så fall)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}.$$

5. Beräkna volymen av den kropp som ges av olikheterna

$$y^2 + z^2 \leq x, \quad x + 4y + 6z \leq 4.$$

6. Betrakta mängderna

$$A = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 = 1\} \text{ och } D_k = \{(x, y) : y \leq 2 - k|x|\} \text{ för } k \geq 0.$$

Bestäm det största värdet på k sådant att $A \subset D_k$, och beskriv för detta k snittet $A \cap \partial D_k$ där ∂D_k betecknar randen till D_k (dvs. där $y = 2 - k|x|$).

7. Antag att funktionen $f(x, y)$ är definierad i en omgivning till origo, och att den uppfyller $0 \leq f(x, y) \leq x^2 + y^2$. Följer det att f är differentierbar i $(0, 0)$? Bevisa eller ge motexempel.