

TATA69 Flervariabelanalys

Föreläsning 2: gränsvärden och kontinuitet

David Rule

Linköpings universitet

1 april 2026

Sammanfattning av föreläsning 1

Efter föreläsning 1 ska man ha lärt sig att:

- rita en mängd utifrån sin algebraisk beskrivning (och vice versa).
- identifiera inre punkter, yttre punkter och rand punkter till en mängd;
- avgör om en mängd är öppen, sluten eller varken eller;
- använd sig av olika metod (t.ex. grafer, nivå-mängder) för att föreställa sig en funktion i en två eller tre variabler.
- rita grafer och mängder som beskrivs i polära eller sfäriska koordinater samt byta mellan olika koordinat beskrivningar av funktioner och mängder.

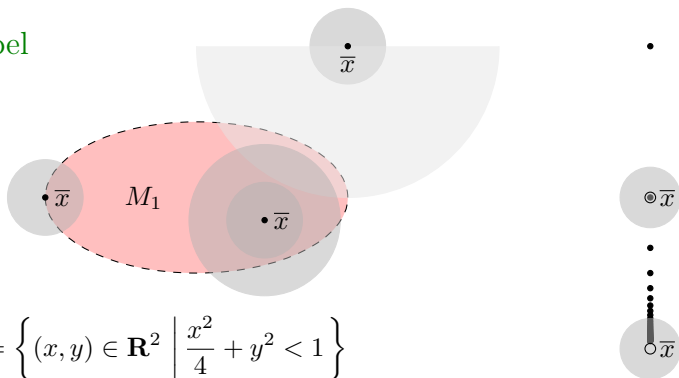
Hopningspunkter

Definition och intuition

Definition 2.1 (Hopningspunkt)

Givet en mängd $M \subseteq \mathbf{R}^n$ så säger vi att $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ är en *hopningspunkt* till M om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en punkt $\bar{y} \in M \setminus \{\bar{x}\}$ sådan att $|\bar{x} - \bar{y}| < \varepsilon$. Med andra ord, för varje $\varepsilon > 0$ är $(M \setminus \{\bar{x}\}) \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Exempel



$$M_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 < 1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

Gränsvärden och kontinuitet

Formella definitioner

Definition 2.2 (Gränsvärde)

Låt $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ där $D_f \subseteq \mathbf{R}^n$ och anta att $\bar{a}$ är en hoppningspunkt till D_f . Vi säger att f har *gränsvärde* $b \in \mathbf{R}$ i $\bar{a}$ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ sådant att

$$|\bar{x} - \bar{a}| < \delta \quad \text{och} \quad \bar{x} \in D_f \setminus \{\bar{a}\} \implies |f(\bar{x}) - b| < \varepsilon.$$

Vi skriver i så fall

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = b.$$

Definition 2.9 (Kontinuitet)

En funktion f sägs vara *kontinuerlig* i $\bar{a} \in D_f$ om $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$, eller om $\bar{a} \in D_f$ inte är en hoppningspunkt till D_f .

En funktion f sägs vara *kontinuerlig* om den är kontinuerlig i varje $\bar{a} \in D_f$.

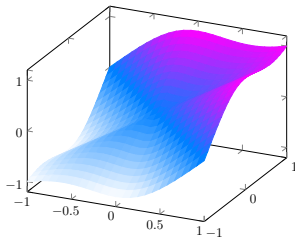
Gränsvärden

Beräknar gränsvärden i praktiken

Exempel

Låt $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ ($D_f = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$).

Visa att $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} f(\bar{x}) = 0$.



Sats (Instängningssatsen, jfr sats 2.3)

Om det finns ett $r > 0$ sådant att

$$|f(\bar{x}) - b| \leq \psi(\bar{x})h(|\bar{x} - \bar{a}|)$$

för $\bar{x} \in B(\bar{a}, r) \setminus \{\bar{a}\}$ där $\bar{\psi}$ är en (uppåt) begränsad funktion och $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$, då är

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = b.$$

Gränsvärden

Flera exempel

Exempel

- Låt $f(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 + z^4}{x^2 + y^2 + z^2}$ där $D_f = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Undersök

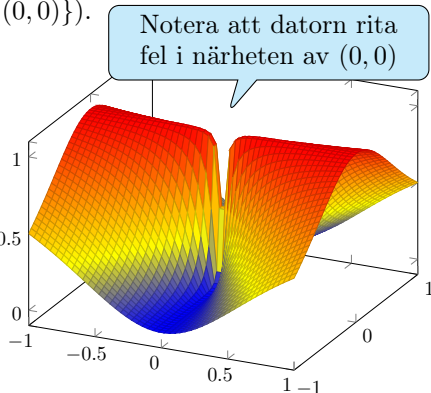
$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} f(\bar{x}).$$

- Låt $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ ($D_f = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$).

Undersök $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{0}} f(\bar{x})$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + 0^2} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^2}{0^2 + t^2} = 0$$



Gränsvärden

När en gränsvärde inte existerar

Sats 2.4

Låt $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$ och $\bar{a}$ vara en hopningspunkt till D . Antag att $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = b$. Om $\bar{r}: [c, d] \rightarrow D \cup \{\bar{a}\}$ är en kontinuerlig parameterkurva sådan att

- $\bar{r}(c) = \bar{a}$, och
- $\bar{r}(t) \neq \bar{a}$ för $t \neq c$

så gäller att $\lim_{t \rightarrow c} f(\bar{r}(t)) = b$.

Om $\bar{r}_1(t)$ och $\bar{r}_2(t)$ är två olika parameterkurva som i satsen och $\lim_{t \rightarrow c} f(\bar{r}_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow c} f(\bar{r}_2(t))$ kan gränsvärdet $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x})$ inte existera.

Exempel

$$\bullet f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \bullet f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

där $D_f = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Gränsvärden och kontinuerliga funktioner

Egenskaper och räkneregler

Sats 2.5-2.6

Om $\bar{a}$ är en hoppningspunkt till $D_f \cap D_g$ och $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, då är

- $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x})) = \alpha \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) + \beta \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x})$,
- $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{x})g(\bar{x})) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) \cdot \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x})$, och
- $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \left(\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} \right) = \frac{\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x})}{\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x})}$ om $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(\bar{x}) \neq 0$.

Om $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$ och $\lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{b}} g(\bar{y}) = \bar{c}$, så är $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} g(f(\bar{x})) = \bar{c}$, under förutsättningar att

- $\bar{a}$ är en hoppningspunkt till $D_{g \circ f}$, $\bar{b}$ är en hoppningspunkt till D_g , och
- $\bar{c} = g(\bar{b})$ (g är kontinuerligt i $\bar{b}$) eller $f(\bar{x}) \neq \bar{b}$ för alla $\bar{x}$ nära $\bar{a}$.

Exempel

- Undersök $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)^2(y-2)}{x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5}$.
- Är $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x^2 y) - 1}{x^2 + y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ en kontinuerlig funktion?

Gränsvärden i oändlighet

Definition 2.8 (Gränsvärde i oändlighet)

Vi säger att f har gränsvärde b i oändligheten och skriver

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} f(\bar{x}) = b$$

om det för varje $\varepsilon > 0$ finns $R > 0$ sådant att $|f(\bar{x}) - b| < \varepsilon$ närhelst $|\bar{x}| > R$.

Exempel

Beräkna, om möjligt, följande gränsvärde:

- $\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + y^2};$
- $\lim_{\bar{x} \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2}.$

Sammanfattning

Efter den här föreläsningen ska man veta:

- definitionen av gränsvärde och kontinuitet som gäller för en funktion av flervariabler;
- hur man använder instängningssatsen (Sats 2.3) för att visa att ett gränsvärde existera;
- hur man bevisa (med hjälpa av Sats 2.4) att ett gränsvärde inte existera;
- olika räkneregler för gränsvärden
- definitionen av gränsvärdet av en funktion då $\bar{x} \rightarrow \infty$.