

TATA69 Flervariabelanalys

Föreläsning 3: differentierbarhet och partiella derivator

David Rule

Linköpings universitet

14 april 2026

Sammanfattning av föreläsning 2

Efter föreläsning 2 ska man veta:

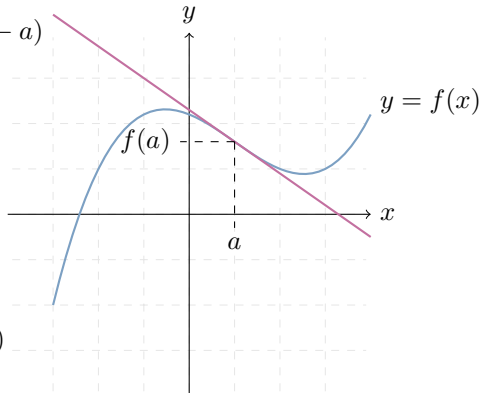
- definitionen av gränsvärde och kontinuitet som gäller för en funktion av flervariabler;
- hur man använder instängningssatsen (Sats 2.3) för att visa att ett gränsvärde existera;
- hur man bevisa (med hjälpa av Sats 2.4) att ett gränsvärde inte existera;
- olika räkneregler för gränsvärden
- definitionen av gränsvärdet av en funktion då $\bar{x} \rightarrow \infty$.

Derivator

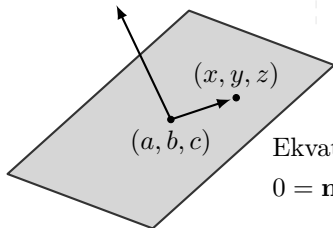
Repetition från en variabel analys och linjär algebra

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Linjen som bäst
approximerar
grafen av f i när-
heten av $(a, f(a))$



$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$$



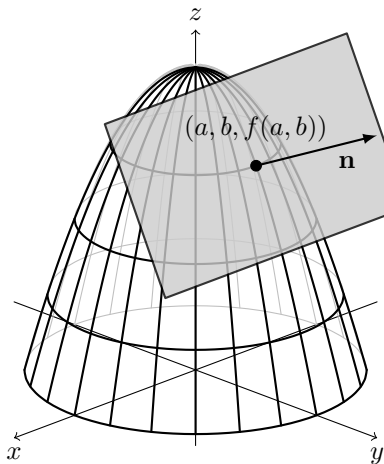
$$\mathbf{v} = (x - a, y - b, z - c)$$

Ekvationen av planen:

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = n_1(x - a) + n_2(y - b) + n_3(z - c)$$

Derivator

Planen som bäst approximerar grafen av en funktion och partiella derivator



Vi antar att normalen inte är vågrätt, d.v.s vi antar att normalen kan skalas så att $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 1)$

Då blir ekvationen av planen:

$$n_1(x - a) + n_2(y - b) + (z - f(a, b)) = 0$$

Skriv om för z :

$$z = f(a, b) - n_1(x - a) - n_2(y - b)$$

Felet ska uppfylla

$$\frac{\tilde{R}(x, y)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \rightarrow 0$$

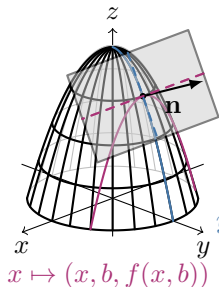
då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

Planen ska approximeras funktionens graf:

$$f(x, y) = \left(f(a, b) - n_1(x - a) - n_2(y - b) \right) + \tilde{R}(x, y)$$

Derivator

Partiella derivator



$$f(x, y) = \left(f(a, b) - n_1(x - a) - n_2(y - b) \right) + \tilde{R}(x, y)$$

Ta $y = b$:

$$f(x, b) = f(a, b) - n_1(x - a) + \tilde{R}(x, b)$$

$$\implies -n_1 = \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} - \frac{\tilde{R}(x, b)}{x - a}$$

$$\implies -n_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

På liknande sätt: $-n_2 = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Vi ser från definitionen att man kan t.ex. räkna $\frac{\partial f}{\partial x}$ som vanliga derivator $f'(x)$ i envar genom att betrakta y som konstant.

Partiella derivator

Exempel

Exempel

Betrakta $f(x, y) = xy - y^2e^x + y + 4$:

$$f'_x(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - y^2e^x,$$

$$f'_y(x, y) := \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - 2ye^x + 1.$$

Begreppet fungerar lika bra med 3 eller flera variabler.

Högre ordnings partiella derivator:

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \text{o.s.v.}$$

Exempel forts.

Här spelar ordning roll, men...

$$f''_{xx}(x, y) = -y^2e^x \quad f''_{yy}(x, y) = -2e^x$$

$$f''_{xy}(x, y) = 1 - 2ye^x \quad f''_{yx}(x, y) = 1 - 2ye^x$$

...i många fall är
 $f''_{xy} = f''_{yx}$ (se sats 3.8)

Partiella differentialekvationer

Potentialer till vektorfält

Exempel

Betrakta systemet:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = e^x \cos y; \\ f'_y(x, y) = -e^x \sin y. \end{cases}$$

Lös systematiskt!
(jfr. exemplen 3.4–3.7.)

Bestäm alla $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ som uppfyller systemet.

Lösningar: $f(x, y) = e^x \cos y + C$, ($C \in \mathbf{R}$).

Vi kallar vektorfältet $\nabla f(x, y) := (f'_x(x, y), f'_y(x, y))$ *gradienten* av f .

I exemplet ovan har vi hitta alla möjliga f sådan att

$$\nabla f = V$$

där $V(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$.

Ett *vektorfält* är inget
mer än en funktion
från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$.

När en sådan lösning f finns, kallas V ett *potentialfält*
och f en *potentialfunktion* till vektorfältet V .

Differentierbarhet

När finns det en plan som bäst approximerar grafen av en funktion?

Kom ihåg approximationen av en f med en plan:

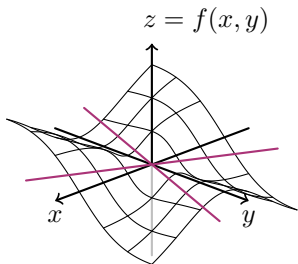
$$f(x, y) = \left(f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) \right) + \tilde{R}(x, y)$$

Exempel $(a, b) = (0, 0)$, $f(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{om } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{om } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ så kandidat tangentplanet är $z = 0$,

men $f(t, kt) = -\frac{t^2 kt}{t^2 + (kt)^2} = \left(-\frac{k}{1+k^2} \right) t$

så $\frac{\tilde{R}(x, y)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} \not\rightarrow 0$ när $(x, y) \rightarrow (0, 0)$



Definition: En funktion f sägs vara *differentierbar* i (a, b) om

$$\frac{\tilde{R}(x, y)}{|(x - a, y - b)|} \rightarrow 0 \text{ när } (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Differentierbarhet $\Rightarrow f'_x, f'_y$ existerar.

En "bra" tangentplan finns.

Klasserna $\mathcal{C}^k$

kontinuerligt deriverbara funktioner

Definition

Mängden av alla funktioner $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ som har kontinuerliga partiella derivator upp till ordning k på D betäknas $\mathcal{C}^k$.

Exempel

Hitta alla $z \in \mathcal{C}^2$ sådana att $z''_{xy}(x, y) = x$.

Sats 3.8

Om f är av klass $\mathcal{C}^2$ i någon omgivning till $\bar{a}$ så gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a}).$$

Sats 3.5

Om f är av klass $\mathcal{C}^1$ i någon omgivning till $\bar{a}$ så är f differentierbar i $\bar{a}$.

Exempel

Beräkna ekvationen av tangentplanen till $f(x, y) = \sin x + \cos y$ i $(x, y) = (1, 2)$. **Svar:** $z = (\sin(1) + \sin(2)) + \cos(1)(x - 1) - \sin(2)(y - 2)$.

Sammanfattning

Efter den här föreläsningen ska man veta:

- vad partiella derivator är för någonting och hur man beräkna de för “vanliga” funktioner;
- vad det betyder för en funktion att vara differentierbar och tillräckliga villkor för att veta när en funktion är den;
- hur man kan ta fram tangentplanen till grafen av en funktion i en punkt;
- att det finns funktioner som har sina första ordnings partiella derivator men som inte är differentierbara (eller ens kontinuerliga).