

TATA69 Flervariabelanalys

Föreläsning 4: funktionalmatriser, kedjeregeln och partiella differentialekvationer

David Rule

Linköpings universitet

21 april 2026

Sammanfattning av föreläsning 3

Efter Föreläsning 3 ska man veta:

- vad partiella derivator är för någonting och hur man beräkna de för “vanliga” funktioner;
- vad det betyder för en funktion att vara differentierbar och tillräckliga villkor för att veta när en funktion är den;
- hur man kan ta fram tangentplanen till grafen av en funktion i en punkt;
- att det finns funktioner som har sina första ordnings partiella derivator men som inte är differentierbara (eller ens kontinuerliga).

Variabelbyte i flervar och partiella derivator

Ett luddig exempel

Betrakta functionen $F(u, v) = u^2v$ och variabelbytet $\begin{cases} u &= x \\ v &= x + y \end{cases}$.

Frågan: Vad är derivatan av F sett som en funktion av x ?

Slavigt skrivit vad är $\frac{\partial F}{\partial x}$?

Svar: $F = u^2v = x^2(x + y) = x^3 + x^2y$ så $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$.

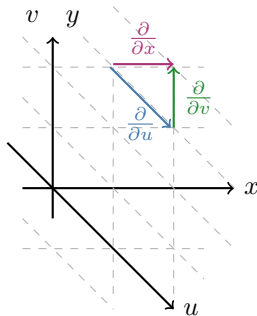
Fel!

~~Vanligt fel:~~ $u = x$ så $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} = 2uv$

och $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xv$. Sen är

$v = x + y$ så $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x(x + y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} &= 2uv + u^2 = 2x(x + y) + x^2 \\ &= 3x^2 + 2xy = \frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned}$$



Kedjeregeln

Vi ser för en differentierbar funktion $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ att

$$f(\bar{a} + \bar{h}_1) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h}_1 + R(\bar{h}_1)$$

Och därmed för en differentierbar funktion $u: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ är

$$u(\bar{x} + \bar{h}_2) = u(\bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) \bar{h}_2^t + \tilde{R}(\bar{h}_2)$$

där

Matrisprodukt!

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \frac{\partial u_m}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

kallas för *funktionalmatrisen* (eller *Jacobimatrisen* eller *Jacobianen*) till u .

Så, med $\bar{a} = u(\bar{x})$ och $\bar{h}_1^t = \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) \bar{h}_2^t + \tilde{R}(\bar{h}_2)$, är

$$f(u(\bar{x} + \bar{h}_2)) - f(u(\bar{x})) = \nabla f(u(\bar{x})) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) \bar{h}_2^t + \tilde{R}(\bar{h}_2) \right) + R(\bar{h}_1)$$

Kedjeregeln

$$f(u(\bar{x} + \bar{h}_2)) - f(u(\bar{x})) = \nabla f(u(\bar{x})) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) \bar{h}_2^t + \tilde{R}(\bar{h}_2) \right) + R(\bar{h}_1)$$

$\bar{e}_j$: enhetsvektor parallellt med j :e koordinataxeln

Så om vi tar $\bar{h}_2 = h\bar{e}_j = (0, \dots, h, \dots, 0)$, delar med h och tar $h \rightarrow 0$ får vi satsen:

Sats (Kedjeregeln)

Om den reellvärda funktionen f som beror på m variabler

$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ som i sin tur beror på n variabler

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ då gäller

$$\frac{\partial(f \circ u)}{\partial x_j}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_k}(u(\bar{x})) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{för varje } j = 1, \dots, n.$$

I matrisform kan det skrivas som

$$\nabla(f \circ u) = \nabla f(u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}(\bar{x}).$$

Kedjeregeln

Exempel

- Om $F(u, v) = u^2v$ och $U(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x, x + y)$, är

$$\frac{\partial(F \circ U)}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy \quad \text{och} \quad \frac{\partial(F \circ U)}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

- $f(u, v) = u^2v^3$, $u(x) = \sin x$, $v(x) = x^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 2x^6 \sin x \cos x + 6x^5 \sin^2 x.$$

- Uttryck z'_x och z'_y i termer av z'_u , z'_v , y och y där

$$\begin{cases} u = x^2y \\ v = x - y^2 \end{cases}$$

Svar: $z'_x = 2xyz'_u + z'_v$ och $z'_y = x^2z'_u - 2yz'_v$

- Hitta lösningar till $7z'_x - 2z'_y = 0$ med hjälp av ansatsen $z(x, y) = f(u(x, y))$. **Svar:** $z(x, y) = f(2x + 7y)$.

Partiella differentialekvationer

Hur kan kedjeregeln hjälpa?

Svårt att lösa med två olika derivator av z i ekvationen.

Exempel

Lös differentialekvationen och bivillkoret
$$\begin{cases} 3z'_x - z'_y = 0 \\ z(0, y) = \cos y \end{cases}$$

Lösningen:

Första steget: Hitta en variabelbyte som gör ekvationen enklare att lösa.

Vi skriver $z(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ och jämför med kedjeregeln:

$$\begin{cases} z'_x = \frac{\partial u}{\partial x} f'_u + \frac{\partial v}{\partial x} f'_v \\ z'_y = \frac{\partial u}{\partial y} f'_u + \frac{\partial v}{\partial y} f'_v \end{cases} \quad \text{så } 3z'_x - z'_y = 3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} f'_u + \frac{\partial v}{\partial x} f'_v \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} f'_u + \frac{\partial v}{\partial y} f'_v \right)$$
$$= \left(3 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) f'_u + \left(3 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) f'_v$$

Vi tar
$$\begin{cases} u = x + 3y \\ v = y \end{cases}$$

Gärna = 0

Gärna $\neq$ 0

Då är $0 = 3z'_x - z'_y = -f'_v$ så $f(u, v) = F(u)$ och $z(x, y) = F(x + 3y)$.

Enligt bivillkoret är $\cos y = z(0, y) = F(3y)$, så $F(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$.

Därmed är lösningen
$$z(x, y) = \cos\left(\frac{x+3y}{3}\right).$$

Partiella differentialekvationer

Hur kan kedjeregeln hjälpa?

Exempel: Lös differentialekvationen och bivillkoret $\begin{cases} xz'_x - yz'_y = 0 \\ z(x, y) = e^x \end{cases}$
i $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ med hjälp av variabelbytan $\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$

Lösning:

Vi har att $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$ och $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -2y$.

Enligt kedjeregeln är $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} y + \frac{\partial z}{\partial v} 2x$
och $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} x - \frac{\partial z}{\partial v} 2y$

så $0 = xz'_x - yz'_y = x \left(\frac{\partial z}{\partial u} y + \frac{\partial z}{\partial v} 2x \right) - y \left(\frac{\partial z}{\partial u} x - \frac{\partial z}{\partial v} 2y \right)$
 $= 2(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial v} \implies z'_v(u, v) = 0 \implies z(u, v) = h(u)$
 $\implies z(x, y) = h(xy)$

Det tillsammans med bivillkoret säger att $e^x = z(x, x) = h(x^2)$

så $h(u) = e^{\sqrt{u}}$ och $z(x, y) = e^{\sqrt{xy}}$

Sammanfattning av föreläsning 4

Efter Föreläsning 4 ska man veta:

- vad kedjeregeln är för någonting och hur man tillämpar den för att räkna ut partiella derivator av funktioner av flera variabler;
- hur man kan använda kedjeregeln och en variabelbyte för att förenkla en differentialekvation;
- Lösa partiella differentialekvationer med hjälp av kedjeregeln.