

TATA69 Flervariabelanalys

Föreläsning 7: kurvor, ytor, funktionalmatriser och inversa funktioner

David Rule

Linköpings universitet

27 april 2026

Sammanfattning av föreläsning 6

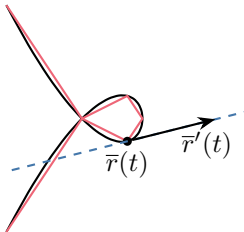
Efter Föreläsning 6 ska man veta:

- att en Taylorpolynom av ordning k till f i $\bar{a}$ är ett polynom vars partiella derivator (upp till ordning k) är lika med f :s derivator i punkten $\bar{a}$
- att en funktion $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ kan approximeras av sin k :e Taylor polynom i $\bar{a}$ och skillnaden mellan $f(\bar{x})$ och $f(\bar{a})$ är $O(|\bar{x} - \bar{a}|^{k+1})$. (sats 6.1)
- definitionerna av lokala extrempunkter (definition 6.3)
- hur man kan identifiera en kritisk punkt som en lokal extrempunkt med hjälp av den kvadratiska formen $Q(\bar{h}) = \bar{h}H(\bar{a})\bar{h}^t$.
- när den kvadratiska formen $Q(\bar{h}) = \bar{h}H(\bar{a})\bar{h}^t$ inte räcker för att säga en kritisk punkt är en extrempunkt.

Linjer på parameterform

Normal- och tangentlinjer till kurvor

Betrakta en parameterkurva $\bar{r}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\bar{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$



$\bar{r}'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t+h) - \bar{r}(t)}{h}$ ger en tangent vector till kurvan i $\bar{r}(t)$.

$\bar{r}'(t) = (r'_1(t), r'_2(t), \dots, r'_n(t))$ är *hastigheten*

$|\bar{r}'(t)|$ är *farten*. Tangentlinje: $\bar{\ell}(s) = \bar{r}(t) + \bar{r}'(t)s$.

Om $n = 2$ är en normalvektor till kurven $(-r_2(t), r_1(t))$.

Sätt: $\delta t = \frac{(b-a)}{N}$; $t_0 = a$, $t_1 = a + \delta t$, $t_2 = a + 2\delta t$, $\dots$, $t_N = b$

$$\sum_{k=1}^N |\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^N \left| \frac{\bar{r}(t_k) - \bar{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| \delta t$$

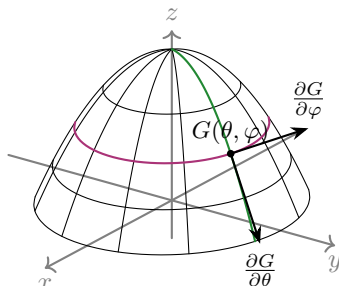
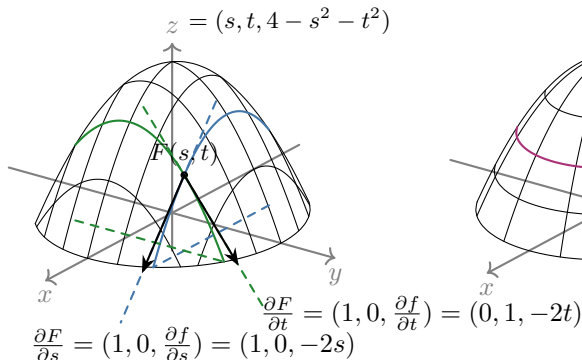
$N \rightarrow \infty$: Längden av kurven är $\int_a^b |\bar{r}'(t)| dt$

Exempel: Låt $r(t) = (t^2 + \frac{1}{3}t^3, t + \frac{1}{2}t^2)$. Bestäm normal- och tangentlinje i $r(1)$.

Ytor på parameterform

Betrakta grafen av $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ på parameterform:

$$F(s, t) = (s, t, f(s, t)) \quad G(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, 4 - \sin^2 \theta)$$



Om $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ parametriserar en yta och $F(s, t) = (u_1(s, t), u_2(s, t), u_3(s, t))$ är $\frac{\partial F}{\partial s}$ och $\frac{\partial F}{\partial t}$ tangentvektorer (skrivna som kolonner).

Tangentplanet till ytan genom punkten $F(s, t)$ med parametrar (h, k) är

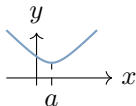
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F(s, t) + \frac{\partial F}{\partial s}(s, t)h + \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)k = F(s, t) + \frac{\partial F}{\partial (s, t)}(s, t) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Inversa funktionssatsen

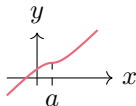
Sats (envar) Låt $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion. Om $f'(a) \neq 0$ är f inverterbart i en omgivning av a och

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

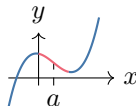
En öppen mängd
som innehåller a



ej inverterbar



inverterbar, $f^{-1} \notin \mathcal{C}^1$



inverterbar, $f^{-1} \in \mathcal{C}^1$

Sats 7.2 (Inversa funktionsatsen) Låt $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ vara en funktion av klass $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ ($f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))$ och varje $f_j \in \mathcal{C}^k$). För $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ är följande påståenden ekvivalenta:

- Det finns en öppen omgivning $U \subseteq \mathbf{R}^n$ av $\bar{a}$ sådan att $V = \{\bar{y} = f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}$ är öppen, $f: U \rightarrow V$ är inverterbar och $f^{-1} \in \mathcal{C}^k$.
- Funktionalmatrisen $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(\bar{a})$ är inverterbar.

$\Leftrightarrow 0 \neq \det\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}\right)$
"Tangentlinjer pekar
i olika riktningar"

I så fall är $\frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{y}}(f(\bar{x})) = \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}(\bar{a})\right)^{-1}$

Sammanfattning av föreläsning 7

Efter föreläsning 7 ska man veta:

- att derivatan av en parameterkurva $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ är tangent till kurvan och kan räknas komponentvis, så $r'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$.
- $r'(t)$ är hastigheten och $|r'(t)|$ är farten av en parameterkurva vid tiden t . Längden av kurvan ges av $\int_a^b |r'(t)| dt$.
- hur man utifrån en ekvation för en ytor i parameterform tar fram en ekvation för tangentplanet till ytan.
- inversa funktionssatsen och hur man kan använda det för att visa en funktion av flervariabler är inverterbar, samt räknar ut funktionalmatrisen för inversen.