

TATA69 Flervariabelanalys

Föreläsning 8: Implicita funktionssatsen

David Rule

Linköpings universitet

29 april 2026

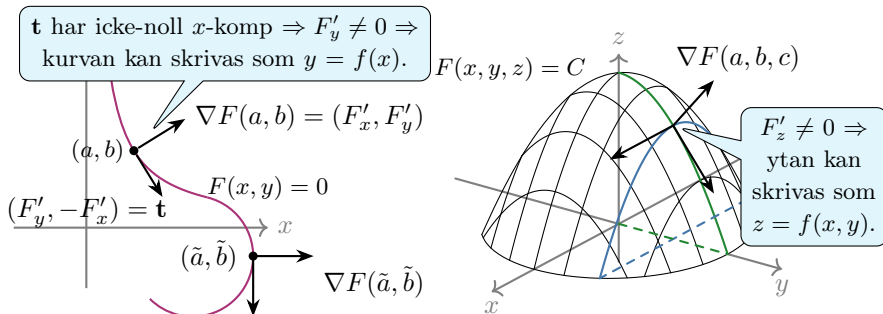
Sammanfattning av föreläsning 7

Efter Föreläsning 7 ska man veta:

- att derivatan av en parameterkurva $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ är tangent till kurvan och kan räknas komponentvis, så $r'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$.
- $r'(t)$ är hastigheten och $|r'(t)|$ är farten av en parameterkurva vid tiden t . Längden av kurvan ges av $\int_a^b |r'(t)| dt$.
- hur man utifrån en ekvation för en ytor i parameterform tar fram en ekvation för tangentplanet till ytan.
- inversa funktionssatsen och hur man kan använda det för att visa en funktion av flervariabler är inverterbar, samt räknar ut funktionalmatrisen för inversen.

Implicita funktionssatsen

En ekvation



Sats 8.2 (Implicita funktionsatsen, en ekvation, tre variabler) Låt $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ vara en funktion av klass $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. Om

$$F(a, b, c) = C \quad \text{och} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$$

så finns det en $\mathcal{C}^k$ -funktion $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ där $U \subseteq \mathbf{R}^2$ är en öppen omgivning av (a, b) sådan att

$$f(a, b) = c \quad \text{och} \quad F(x, y, f(x, y)) = C \quad \text{for all } (x, y) \in U.$$

Implicita funktionssatsen

Två ekvationer

Sats 8.3 (Implicita funktionsatsen, två ekvationer) Anta att $F, G: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ är funktioner av klass C^k , $k \geq 1$, och uppfyller

$$\begin{cases} F(a, b, c) = C_1 & \text{och} \\ G(a, b, c) = C_2, \end{cases}$$

och

$$\frac{d(F, G)}{d(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a, b, c) & \frac{\partial G}{\partial z}(a, b, c) \end{vmatrix} \neq 0$$

Då finns det en omgivning U till a sådan att

$$\begin{cases} f(a) = b & \text{och} \\ g(a) = c, \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} F(x, f(x), g(x)) = C_1 \\ G(x, f(x), g(x)) = C_2, \end{cases}$$

för alla $x \in U$.

