Föreläsning 1

Differentialekvationer av första ordningen

1.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(1.1) Differential Equations and Mathematical Models. (Speciellt exemplen 3, 4 och 5.)

(1.2) Integrals as General and Particular Solutions. (Speciellt exempel 4)

(1.4) Separable Equations and Applications.

(1.5) Linear First-Order Equations.

(1.6) Substitution Methods and Exact Equations.

Se också analysboken [12, Kapitel 8.] eller motsvarande.

1.2 Några grundbegrepp

1.2.1 Vad är en differentialekvation?

Matematiska modeller som beskriver förändring kallas dynamiska system. Dynamiska system där förändringen sker kontinuerligt leder ofta till differentialekvationer. En differentialekvation av första ordningen har formen

$$g\left(x,y,y'\right)=0 \tag{1.1}$$

där g är en kontinuerlig funktion av tre reella variabler. Kan vi lösa ut den sista variabeln y' får vi

$$y'=f\left(x,y\right) \tag{1.2}$$

där f är en kontinuerlig funktion av två variabler.

1.2.2 Vad är en lösning?

En lösning $y=y(x)$ till (1.1) eller (1.2) är en kontinuerligt deriverbar *funktion* som är definierad i ett *intervall* $a<x<b$ sådan att för alla $x\in\,]a,b[$ gäller att

$$g\left(x,y(x),y'(x)\right)=0 \text{ alternativt } y'(x)=f\left(x,y(x)\right)$$

Exempel 1 *Funktionen*

$$y(x)=\frac{1}{c-x},\quad x<c \tag{1.3}$$

är en lösning till $y'=y^2$ eftersom

$$y'(x)=-\frac{-1}{(c-x)^2}=y^2(x)$$

gäller för alla $x<c$. Funktionen

$$y(x)=\frac{1}{c-x},\quad x>c \tag{1.4}$$

är en annan *lösning till ekvationen eftersom* definitionsintervallen är olika.

1.2.3 Vad är ett begynnelsevillkor?

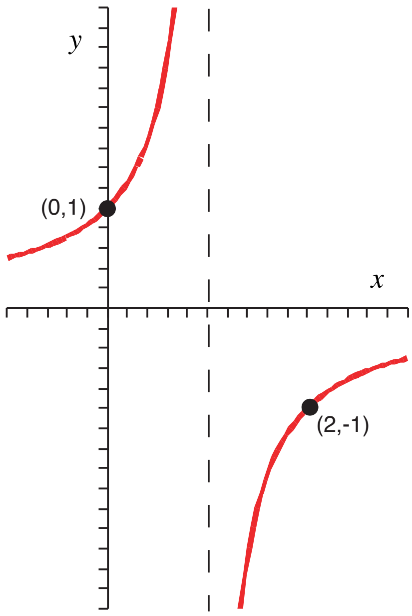
Normalt har differentialekvationer oändligt många lösningar vilket syns i exempel 1 eftersom c kan vara en godtycklig konstant. För att få entydiga lösningar krävs ytterligare villkor på funktionen $y(x)$. Ofta söker man en lösningskurva som går genom en given punkt (x_0,y_0). Villkoret blir då att $y(x_0)=y_0$. Ett sådant villkor kallas *begynnelsevillkor,* även när variabeln x inte representerar tid.

Exempel 2 *Lös ekvationen $y'=y^2$ med begynnelsevillkoren $y(0)=1$ respektive $y(2)=-1$.*

Lösning

Eftersom $y(x) = (c-x)^{-1}$ för $x \neq c$ måste vi i första fallet ha $c \neq 0$ och då blir $1 = y(0) = 1/c \Leftrightarrow c = 1$ vilket ger lösningen $y_1(x) = (1-x)^{-1}$ som är definierad för $x < 1$.

I det andra fallet måste vi ha $c \neq 2$, vilket ger $-1 = y(2) = (c-2)^{-1} \Leftrightarrow c = 1$ och lösningen blir $y_2(x) = (1-x)^{-1}$ som nu är definierad för $x > 1$. Observera att y_1 och y_2 är två olika lösningar eftersom definitionsintervallen är olika. Se figur 1.1.



Figur 1.1: Funktionerna $y_1(x)$ och $y_2(x)$.

1.3 Den enklaste differentialekvationen

I specialfallet att högerledet f i ekvationen 1.2 endast beror av x får vi

$$y' = f(x) \tag{1.5}$$

där alla lösningar till (1.5) kan skrivas

$$y = F(x) + C$$

där $F(x) = \int f(x)\,dx$ är en primitiv funktion till f och C en godtycklig konstant. Begynnelsevillkoret $y(x_0) = y_0$ bestämmer C till $C = y_0 - F(x_0)$.

Exempel 3 *En liten sten med massan m som faller fritt från höjden h har i varje ögonblick hastigheten $v(t)$ och Newtons kraftlag ger*

$$ma = m\frac{dv}{dt} = mg$$

där $g = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Division med m ger $v' = g$ och $v(t) = gt + C_1$. Om utgångshastigheten $v(0) = v_0$ blir $C_1 = v_0$ och vi får $v = v_0 + gt$. Befinner sig stenen på höjden $y(t)$ vid tiden t får vi dessutom

$$\frac{dy}{dt} = v(t) = v_0 + gt$$

som ger $y = gt^2/2 + v_0t + C_2$ och då $y(0) = h$ följer att $C_2 = h$ och

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0t + h$$

1.3.1 Kanalsimning

Exempel 4 *Vattnet i en kanal med bredden $2a$ strömmar med hastigheten*

$$v(x) = v_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

där x är en koordinataxel som är vinkelrät mot kanalen med $x = 0$ i kanalens mitt. Se läroboken [3, Figur 1.2.5, sid. 15]. Hur långt nedströms hamnar en simmare som startar från ena stranden och simmar rakt mot den andra med konstant hastighet v_S relativt vattnet?

Lösning

Betecknas simmarens färdväg som funktion av x med $y(x)$ får vi ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = \frac{v(x)}{v_S} = \frac{v_0}{v_S}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Allmänna lösningen blir

$$y(x) = C + \int \frac{v_0}{v_S}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = C + \frac{v_0}{v_S}\left(x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{a^2}\right)$$

och om $y(-a) = 0$ blir

$$0 = C + \frac{v_0}{v_S}\left(-a + \frac{1}{3}\frac{a^3}{a^2}\right) \Longleftrightarrow C = \frac{2}{3}\frac{v_0}{v_S}a$$

Således hamnar han

$$y(a) = \frac{2}{3}\frac{v_0}{v_S}a + \frac{v_0}{v_S}\left(a - \frac{1}{3}\frac{a^3}{a^2}\right) = \frac{4}{3}\frac{v_0}{v_S}a$$

längdenheter nedströms.

1.4 Separabla ekvationer

Differentialekvationer som kan skrivas på formen

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1.6}$$

kallas *separabla*. Om vi integrerar båda leden med avseende på x får vi

$$\int g(x)\,dx = \int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(y)\,dy$$

så att om vi kan bestämma primitiva funktioner F och G till f respektive g ges lösningarna till (1.6) *implicit*[1] av sambandet

$$G(x) = F(y) + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Exempel 5 *Ekvationen $y' = e^{x+y}$ kan skrivas $e^{-y}y' = e^x$ och vi får*

$$e^x = \int e^x dx = \int e^{-y} dy = -e^{-y} + C$$
$$e^x + e^{-y} = C \Leftrightarrow x = \ln\left(C - e^{-y}\right) \Leftrightarrow y = -\ln\left(C - e^x\right)$$

för de värden på x, y och C där uttrycken är definierade.

1.4.1 Torricellis lag

Exempel 6 *En tratt formad som en rät cirkulär kon med höjden h har basradien R medan utloppshålets radie r är betydligt mindre. Beräkna hur lång tid det tar att tömma tratten om den är helt fylld med vatten.*

[1] En relation mellan variablerna x och y av typen $f(x,y) = C$ kallas implicit.

Lösning

Enligt Torricellis lag [3, Sid. 40.] strömmar vattnet ut med hastigheten $v=\sqrt{2gy}$, där y är nivån över utloppshålet och g tyngdaccelerationen $\left(g=9.82\,\mathrm{m\,s^{-2}}\right)$. Vattenvolymen är samtidigt

$$V(y)=\int_0^y \pi\left(r+\eta\frac{R-r}{h}\right)^2 d\eta$$

och sambandet $dV/dt=-\pi r^2 v$ ger efter omstuvning den separabla differentialekvationen (1.7)

$$-\pi r^2\sqrt{2gy}=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt}=\pi\left(r+y\frac{R-r}{h}\right)^2\frac{dy}{dt}$$

$$\left(r+y\frac{R-r}{h}\right)^2\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dt}=-r^2\sqrt{2g} \tag{1.7}$$

Vidare är $y(0)=h$ och $y(T)=0$, där T är tömningstiden. Integration av (1.7) ger

$$\begin{aligned}r^2\sqrt{2g}T&=\int_0^T r^2\sqrt{2g}dt=-\int_0^T\left(r+y\frac{R-r}{h}\right)^2\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dt}dt=-\int_h^0\left(r+y\frac{R-r}{h}\right)^2\frac{dy}{\sqrt{y}}\\&=\int_0^h\left(r+y\frac{R-r}{h}\right)^2\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{2}{15}\sqrt{h}\left(3R^2+4Rr+8r^2\right)\end{aligned}$$

vilket sedan ger tömningstiden T

$$T=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{3R^2+4Rr+8r^2}{r^2}=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[8+4\frac{R}{r}+3\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]$$

En tratt med $R/r=15$ och $h=12\,\mathrm{cm}$ töms alltså på $T=7.8\,\mathrm{s}$.

1.5 Lineära ekvationer

En lineär ekvation av första ordningen har formen

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1.8}$$

och kan återföras på grundformen (1.5) genom att multiplicera med en *integrerande faktor*

$$\rho(x)=\exp\left(\int P(x)\,dx\right)$$

Eftersom $\rho' = \rho P$ får vi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\rho y) &= \rho y' + \rho' y = \rho\left(y' + Py\right) = \rho Q \\
\rho(x)\, y(x) &= C + \int \rho(x)\, Q(x)\, dx \\
y(x) &= \frac{C}{\rho(x)} + \frac{1}{\rho(x)} \int \rho(x)\, Q(x)\, dx \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Om lösningsformeln (1.9) skall vara användbar krävs förstås att man kan bestämma de ingående primitiva funktionerna på ett bra sätt.

Anmärkning 7 *Observera att lösningen (1.9) består av två termer. Den första,* $C\rho(x)^{-1}$*, är en allmän lösning till den* homogena *ekvationen* $y' + Py = 0$ *och den andra,* $\rho(x)^{-1} \int \rho(x)\, Q(x)\, dx$*, är* en *lösning till den* inhomogena *ekvationen* $y' + Py = Q$*. Lösningar till* lineära *ekvationer har alltid denna form.*

Exempel 8 *Ekvationen* $x^2 y' + xy = xe^{2x}$ *kan skrivas*

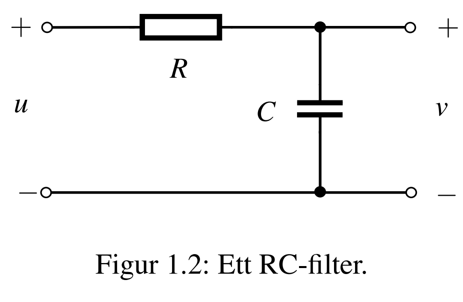
$$y' + \frac{1}{x} y = e^{2x}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = e^{\ln x} = x \\
\frac{d}{dx}(xy) &= xy' + y = x\left(y' + \frac{1}{x} y\right) = xe^{2x} \\
xy(x) &= C + \int xe^{2x} dx = C + \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \\
y(x) &= \frac{C}{x} + \frac{2x-1}{4x} e^{2x}
\end{aligned}$$

1.5.1 Ett RC-filter

Exempel 9 *Koppingsschemat i figur 1.2 visar ett enkelt RC-filter. Bestäm hur spän-*



Figur 1.2: Ett RC-filter.

ningen $v(t)$ *beror av inspänningen* $u(t)$ *för* $t \geq 0$.

Lösning

Ohms lag ger att $u = RI + v$, där I är strömmen genom motståndet och kondensatorn. Vidare är $I = Cdv/dt$ och vi får den lineära ekvationen

$$RC\frac{dv}{dt} + v = u \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{u}{RC}$$

Multiplikation med den integrerande faktorn

$$\rho(t) = \exp\left(\int \frac{dt}{RC}\right) = e^{t/RC}$$

ger som förut

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{t/RC}v\right) &= \left(v' + \frac{v}{RC}\right)e^{t/RC} = \frac{u}{RC}e^{t/RC} \\
e^{t/RC}v(t) - v(0) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{\tau/RC}v(\tau)\right)d\tau = \int_0^t \frac{u(\tau)}{RC}e^{\tau/RC}d\tau \\
v(t) &= v(0)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-(t-\tau)/RC}u(\tau)\,d\tau \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Även här består lösningen (1.10) av två termer (se anmärning 7). Den första, $v(0)e^{-t/RC}$, kommer från laddningen som fanns i kondensatorn vid tiden $t = 0$ och den andra visar hur $v(t)$ beror av $u(t)$.

1.6 Exakta ekvationer

Lösningar till differentialekvationer av första ordningen erhålles ofta implicit som ett samband mellan x och y av formen

$$F(x,y) = C \qquad (1.11)$$

där C är en godtycklig konstant. Geometriskt betyder (1.11) att lösningarna ligger i *nivåkurvorna* till funktionen F.

Betraktar vi y som funktion av x och deriverar får vi

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad (1.12)$$

Alternativt om x i stället beror av y blir ekvationen

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \qquad (1.13)$$

Vilken av ekvationerna (1.12) eller (1.13) som är bäst att arbeta med beror på F och man använder därför gärna det symmetriska skrivsättet

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \tag{1.14}$$

för ekvationer av första ordningen.

Formen (1.14) inbjuder till en geometrisk tolkning. Den säger att lösningskurvans tangentvektor (dx,dy) skall vara *ortogonal* mot vektorfältet (M,N), eftersom högerledet i (1.14) är skalärprodukten av vektorerna (M,N) och (dx,dy). Av (1.12) och (1.13) följer också att lösningskurvorna satisfierar (1.11) om

$$M=\frac{\partial F}{\partial x}\text{ och }N=\frac{\partial F}{\partial y} \tag{1.15}$$

för någon deriverbar funktion F. Detta betyder att $\nabla F=(M,N)$ och innebär att vektorfältet (M,N) skall ha en *potential* F.

Definition 10 *Differentialekvationen (1.14) är exakt om sambanden (1.15) gäller för någon funktion F.*

Sats 11 *Om M och N är kontinuerligt deriverbara är sambandet*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.16}$$

ett nödvändigt villkor för att ekvationen (1.14) skall vara exakt.

Bevis. Om $\nabla F=(M,N)$, där $F\in C^2$, så är [11, Kap. 2, sats 9.]

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

■

Anmärkning 12 *I ett enkelt sammanhängande område [11, Sats 4, sid. 311.] är villkoret (1.16) även tillräckligt.*

Exempel 13 *Lös ekvationen*

$$(8x+y-10)\,dx+\frac{9x+32y-73}{9}dy=0 \tag{1.17}$$

Lösning

Här är $M(x,y)=8x+y-10$ och $N(x,y)=(9x+32y-73)/9$ och alltså

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=1-1=0$$

och om $\nabla F = (M,N)$ har vi

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + f(y) = 4x^2 + xy - 10x + f(y)$$

vilket ger

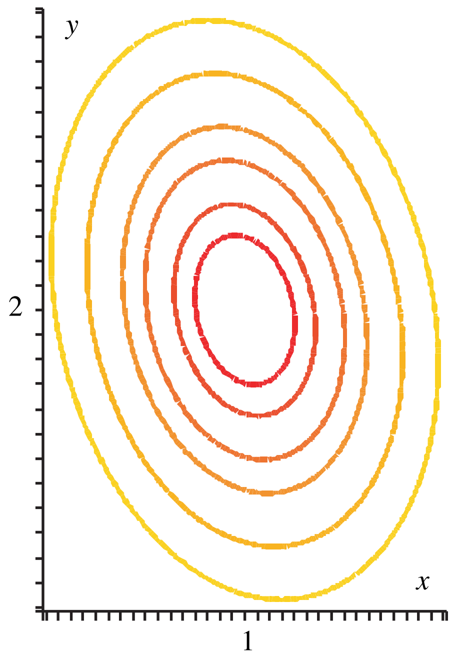
$$\frac{9x+32y-73}{9} = N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} = x + f'(y)$$

$$f'(y) = \frac{32y-73}{9} \text{ (Här får inte finnas några } x\text{)}$$

$$f(y) = \int \frac{32y-73}{9}dy = \frac{16}{9}y^2 - \frac{73}{9}y$$

och slutligen lösningskurvorna, se figur 1.3, som nivåkurvorna $F(x,y) = C$ där

$$F(x,y) = 4x^2 - 10x + xy + \frac{16}{9}y^2 - \frac{73}{9}y$$



Figur 1.3: Nivåkurvorna: $F(x,y) = C$.

1.7 Sammanfattning

De speciella ekvationer som vi studerat kan sammanfattas på så sätt att antingen är ekvationerna exakta eller så kan de genom lämpliga åtgärder göras exakta. Se också [3, Avsnitt 1.6].

Separabla ekvationer: $M(x)\,dx+N(y)\,dy=0$ är exakt med potentialen $F(x,y)=\int M(x)\,dx+\int N(y)\,dy$.

Homogena ekvationer: $M(y/x)\,dx+N(y/x)\,dy=0$ blir separabla (och därmed exakta) efter substitutionen $y=zx$ och $dy=zdx+xdz$.

Lineära ekvationer: Den lineära ekvationen (1.8) skriven på formen (1.14) blir $(P(x)\,y-Q(x))\,dx+dy=0$ och den blir exakt efter multiplikation med den integrerande faktorn $\rho(x)=\exp\left(\int Pdx\right)$, ty $M=\rho\,(P(x)\,y-Q(x))$ och $N=\rho$ samt $\rho'=\rho P$ ger

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\rho P-\rho'=0$$