

Föreläsning 11

Stabilitet och linearisering

11.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(6.1) Stability and the Phase Plane.

(6.2) Linear and Almost Linear Systems.

11.2 Autonoma system

Ett system av differentialekvationer $x' = f(x)$ där högerledet $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ inte beror explicit av t kallas *autonomt*. För *linjära* autonoma system är $f(x) = Px - v$ där P är en $n \times n$ -matris som inte beror av t och v en konstant vektor. Om $n = 2$ skrivs ofta systemet utan vektorbeteckningar

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (11.1)$$

Exempel 81 Rörelseekvationen för en pendel med hastighetsproportionell dämpning är

$$mL^2\theta'' = -cL\theta' - mgL\sin\theta$$

vilket med $x = \theta$ och $y = \theta'$ kan skrivas som systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 \sin x - 2\gamma y \end{cases} \quad (11.2)$$

där $\omega = \sqrt{g/L}$ och $2\gamma = c/mL$.

11.2.1 Translationsinvarians

Karaktäristiskt för autonoma system är att lösningarna är *translationsinvarianta*. Det betyder att $y(t) = x(t + t_0)$ är en lösning om $x(t)$ är det. Vi har ju nämligen att $y'(t) = x'(t + t_0) = f(x(t + t_0)) = f(y(t))$. Speciellt följer då av entydighetssatsen att varje lösning som är sådan att $x(t_0 + T) = x(t_0)$ för något t_0 och $T \neq 0$, är *periodisk* med perioden T . Det vill säga: vi har $x(t + T) = x(t)$ för *alla* t .

11.2.2 Fasporträtt

Graferna till alla lösningar $x(t)$ till $x' = f(x)$ kallas ekvationens *fasporträtt*. Om $n = 2$ består fasporträttet av kurvor i \mathbb{R}^2 , *fasplanet*. Ibland kan fasporträttet erhållas som nivåkurvor genom att, i fallet $n = 2$, skriva systemet (11.1) på formen $gdx - fdy = 0$ och försöka bestämma en potentialfunktion till vektorfältet $(g, -f)$.

Exempel 82 Systemet

$$\begin{cases} x' = 4 - 2y \\ y' = 12 - 3x^2 \end{cases} \quad (11.3)$$

kan skrivas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y}$$

och ger den separabla ekvationen

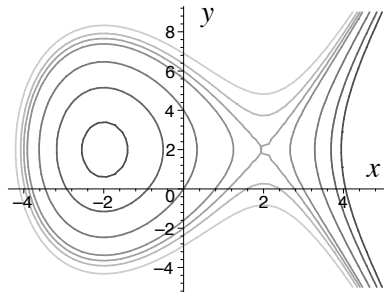
$$(12 - 3x^2) dx - (4 - 2y) dy = 0$$

där fasporträttet ges av nivåkurvor till funktionen

$$\phi(x,y) = \int (12 - 3x^2) dx - \int (4 - 2y) dy = 12x - x^3 - 4y + y^2$$

I maple får vi. Se figur 11.1.

```
> with(plots):
> phi := 12*x-x^3-4*y+y^2;
      phi := 12x - x^3 - 4y + y^2
> contourplot(phi, x=-6..6, y=-5..9,
> contours=[-18,-10,0,9,12,15,20], thickness=4, grid=[60,40]);
```



Figur 11.1: Nivåkurvor till exempel 82.

Allmänt gäller att systemet (11.1) ger en exakt differentialekvation $gdx - fdy = 0$ om divergensen för fältet (f, g) är noll i ett enkelt sammanhängande område; alltså att

$$\nabla \cdot (f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Exempel 83 För pendelekvationen (11.2) är

$$f(x,y) = y, \quad g(x,y) = -\omega^2 \sin x - 2\gamma y$$

vilket ger

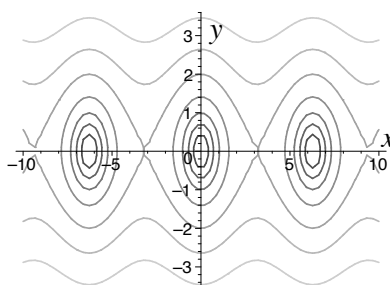
$$\nabla \cdot (f, g) = -2\gamma$$

och för en odämpad pendel, $\gamma = 0$, får vi potentialen

$$\phi(x,y) = \int \omega^2 \sin x dx + \int y dy = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \cos x$$

och om $\omega = 1$ blir fasporträttet med hjälp av maple. Se figur 11.2.

```
> phi := y^2-2*cos(x);
      phi := y^2 - 2cos(x)
> contourplot(phi, x=-10..10, y=-4..4,
> contours=[-1.8,-1.5,-1,0,2,5,10], thickness=4, grid=[60,40]);
```



Figur 11.2: Nivåkurvor till exempel 83

11.2.3 Jämviktpunkter

Om $f(x_0) = 0$ är den konstanta funktionen $x(t) \equiv x_0$ en lösning till $x' = f(x)$. Sådana punkter x_0 kallas *jämviktpunkter* till differentialekvationen. För systemet (11.2) i exempel 81 är jämviktpunkterna $(n\pi, 0)$, där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ och systemet (11.3) i exempel 82 har två jämviktpunkter $(-2, 2)$ och $(2, 2)$.

11.2.4 Stabilitet

Om x_0 är en jämviktpunkt till $x' = f(x)$ med begynnelsevärde $x(0) = x_0$, blir $x(t) \equiv x_0$ för $t \geq 0$. På grund av osäkra data är det svårt att exakt få $x(0) = x_0$ utan man hamnar ofta en bit ifrån. Problemet är då vad som händer för $t > 0$. Stannar lösningen kvar i närheten av x_0 då t växer, eller gör den det inte? I första fallet är jämvikten *stabil*, annars *instabil* eller *labil*. Mera precist definieras stabilitet på följande sätt.

Definition 84 En jämviktpunkt x_0 är stabil om det till varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att om $\|x(0) - x_0\| < \delta$ så är $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ för alla $t \geq 0$.

Exempel 85 I fallet med den odämpade pendeln (11.2) med $\gamma = 0$, är jämviktpunkterna $(n\pi, 0)$ stabila om n är ett jämnt tal och instabila om n är udda.

En starkare form av stabilitet kallas asymptotisk stabilitet. Då stannar lösningen inte bara kvar nära x_0 utan konvergerar in mot jämviktpunkten.

Definition 86 En jämviktpunkt x_0 är asymptotiskt stabil om det finns $\delta > 0$ så att om $\|x(0) - x_0\| < \delta$ så är $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_0\| = 0$.

Om vi i pendelekvationen (11.2) har $\gamma > 0$ kan vi inte beskriva fasporträttet med en potential utan vi får lösa ekvationen numeriskt. I maple får vi med dämpningskonstant $\gamma = 0.05$.

```
> sys := diff(x(t), t) = y(t), diff(y(t), t) = -sin(x(t))
> - delta*y(t);
```

```

sys :=  $\frac{d}{dt}x(t) = y(t), \frac{d}{dt}y(t) = -\sin(x(t)) - \delta y(t)$ 
> delta := 0.1;
      delta := .1
> fcns := [x(t), y(t)];
      fcns := [x(t), y(t)]

```

Vi löser systemet numeriskt med $x(0) = 4$ och $y(0) = 2$ respektive $x(0) = 2$ och $y(0) = -2$

```

> sol1 := dsolve({sys, x(0)=4, y(0)=1}, fcns,
> type=numeric):
> sol2 := dsolve({sys, x(0)=2, y(0)=-1}, fcns,
> type=numeric):

```

Funktionen `odeplot` ger lösningskurvorna i fasplanet. Resultatet kan lagras som grafiska strukturer `p1` och `p2`.

```

> p1:=odeplot(sol1, fcns, 0..40, numpoints=100):
> p2:=odeplot(sol2, fcns, 0..40, numpoints=100):

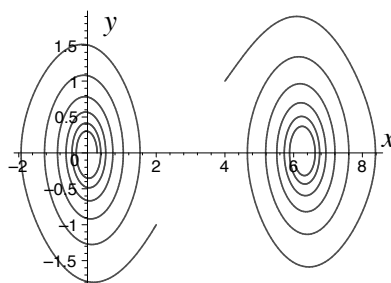
```

Funktionen `display` ritar sedan `p1` och `p2` i samma diagram. Se figur 11.3.

```

> display([p1, p2], thickness=4);

```



Figur 11.3: Illustration av asymptotisk stabilitet.

11.3 Linearisering

I närheten av en jämviktspunkt kan ett olineärt system ibland approximeras med ett lineärt. Genom att studera stabiliteten hos det lineära systemet kan man i bästa fall även avgöra om det olineära systemet är stabilt. Metoden kallas linearisering. Till att börja med undersöker vi stabiliteten hos jämviktspunkter till lineära system.

11.3.1 Lineära autonoma system

I ett lineärt autonomt system $x' = f(x)$ är $f(x) = Px - v$, där P är en konstant matris och v en konstant vektor. Om P är inverterbar, har systemet en unik jämviktspunkt $x_0 = P^{-1}v$. Variabelbytet $x \mapsto x - x_0$ transformerar systemet till $x' = Px$ så att jämviktspunkten hamnar i 0.

För att avgöra om 0 är stabil eller inte undersöker vi lösningen $x(t) = e^{tP}b$ med begynnelsedata $x(0) = b \neq 0$ för $t > 0$. Enligt sats 76 är

$$x(t) = g(t)p_{n-1}(P)b + g'(t)p_{n-2}(P)b + \dots + g^{(n-1)}(t)b$$

där g är en lösning till $p(D)g = 0$ och $p(s)$ karakteristiska polynomet till P . Eftersom varje faktor $(s - \lambda)^m$ i $p(s)$ ger upphov till termerna

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

i funktionen g ser vi direkt att $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ för varje val av b om $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ för alla nollställen λ till $p(s)$.

Om det däremot för något λ gäller att $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ och $p(\lambda) = 0$, kan vi starta i en egenvektor $b \neq 0$ så att $Pb = \lambda b$ och då blir lösningen

$$x(t) = e^{tP}b = e^{\lambda t}b$$

vars belopp blir godtyckligt stort då $t \rightarrow +\infty$.

Slutligen har vi fallet då $p(\lambda) = 0$ medför att $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ men med likhet för något eller några λ . Om alla sådana nollställen är enkla blir motsvarande lösningstermer $e^{\lambda t}b$ begränsade vilket ger stabilitet men inte asymptotisk stabilitet. Multipla nollställen med $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ kan dock ge termer av formen $t^{m-1}e^{\lambda t}b$, där $m > 1$ som inte är begränsade och jämviktspunkten är labil.

Sammanfattningsvis gäller

Sats 87 *Jämviktspunkten $x_0 = P^{-1}v$ till $x' = Px - v$ är asymptotiskt stabil om och endast om alla nollställen till karakteristiska polynomet har negativ realdel. Om något nollställe har positiv realdel är x_0 labil.*

11.4 Nästan lineära system

I flervariabelanalysen [11, Kap. 3.2–3] lär vi att en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är deriverbar¹ i x_0 om det finns en lineär avbildning $x \mapsto Px$ så att

$$f(x + x_0) = f(x_0) + Px + g(x)$$

¹Deriverbar och differentierbar används synonymt här.

där funktionen g uppfyller villkoret

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (11.4)$$

Den lineära avbildningen $x \mapsto Px$ kallas derivatan av f i x_0 och brukar betecknas $f'(x_0)$ eller $df(x_0)$. Avbildningsmatrisen erhålles genom att beräkna de partiella derivatorna för komponentfunktionerna f_1, \dots, f_n till f . Således är

$$P = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(x_0) & \cdots & \partial_n f_n(x_0) \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Antag nu att $f \in \mathcal{C}^1$ i en omgivning till x_0 där $f(x_0) = 0$ och att $P = df(x_0)$ är inverterbar. Då är enligt inversa funktionssatsen [11, Kap. 3.3, sats 2] $f(x) \neq 0$ i en punkterad omgivning $0 < |x - x_0| < \delta$ och vi har

$$f(x + x_0) = Px + g(x)$$

där funktionen g uppfyller villkoret (11.4). Systemet

$$x'(t) = f(x(t) + x_0) = Px(t) + g(x(t)) \quad (11.6)$$

har därför en isolerad jämviktspunkt $x = 0$ och det blir naturligt att undersöka när stabiliteten för jämviktspunkten $x = 0$ hos det olineära systemet (11.6) kan avgöras genom att studera det lineariserade systemet $x' = Px$.

Antag först att det finns ett positivt tal σ så att $\operatorname{Re}(\lambda) < -\sigma < 0$ för alla nollställen λ till karaktäristiska polynomet för P . Om $p(s)$ är karaktäristiska polynomet till P och $p(D)g = 0$ följer det att

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\sigma t} g^{(j)}(t) = 0$$

för $j = 0, 1, \dots, m-1$ där m är graden för $p(s)$. Av sats 76 följer då också att

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\sigma t} \|e^{tP}\| = 0$$

eftersom

$$\begin{aligned} \|e^{tP}\| &= \left\| g(t) p_{n-1}(P) + g'(t) p_{n-2}(P) + \cdots + g^{(n-1)}(t) I \right\| \\ &\leq |g(t)| \|p_{n-1}(P)\| + |g'(t)| \|p_{n-2}(P)\| + \cdots + |g^{(n-1)}(t)| \end{aligned}$$

Speciellt är $e^{\sigma t} \|e^{tP}\| \leq M$ för $t \geq 0$.

Vidare gäller att

$$\frac{d}{dt} (e^{-tP} x(t)) = e^{-tP} (x'(t) - Px(t)) = e^{-tP} g(x(t))$$

och om $x(0) = b$ får vi efter integration

$$e^{-tP}x(t) = b + \int_0^t e^{-\tau P}g(x(\tau))d\tau$$

som ger lösningsformeln

$$x(t) = e^{tP}b + \int_0^t e^{(t-\tau)P}g(x(\tau))d\tau$$

Av de vanliga standarduppskattningarna för integraler, matriser och vektorer följer att

$$\begin{aligned} e^{\sigma t}\|x(t)\| &\leq e^{\sigma t}\|e^{tP}b\| + \int_0^t e^{\sigma t}\|e^{(t-\tau)P}g(x(\tau))\|d\tau \\ &\leq e^{\sigma t}\|e^{tP}\|\|b\| + \int_0^t e^{\sigma(t-\tau)}\|e^{(t-\tau)P}\|e^{\sigma\tau}\|g(x(\tau))\|d\tau \\ &\leq M\|b\| + M\int_0^t e^{\sigma\tau}\|g(x(\tau))\|d\tau \end{aligned} \quad (11.7)$$

Det följer av (11.4) att det finns ett tal δ så att $\|x\| \leq \delta$ medför att $\|g(x)\| \leq (\sigma/2M)\|x\|$ vilket insatt i (11.7), med $u(t) = \int_0^t e^{\sigma\tau}\|x(\tau)\|d\tau$, ger olikheten

$$u'(t) = e^{\sigma t}\|x(t)\| \leq M\|b\| + \frac{\sigma}{2}\int_0^t e^{\sigma\tau}\|x(\tau)\|d\tau = M\|b\| + \frac{\sigma}{2}u(t) \quad (11.8)$$

Således får vi

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\sigma t/2}u(t)\right) = e^{-\sigma t/2}\left(u' - \frac{\sigma}{2}u\right) \leq M\|b\|e^{-\sigma t/2}$$

och då $u(0) = 0$ ger detta efter integration

$$e^{-\sigma t/2}u(t) \leq M\|b\|\int_0^t e^{-\sigma\tau/2}d\tau = \frac{2M}{\sigma}\|b\|\left(1 - e^{-\sigma t/2}\right)$$

och därmed

$$\frac{\sigma}{2}u(t) \leq M\|b\|\left(e^{\sigma t/2} - 1\right)$$

Tillsammans med (11.8) får vi till sist följande uppskattning av $\|x(t)\|$

$$e^{\sigma t}\|x(t)\| \leq M\|b\| + \frac{\sigma}{2}u(t) \leq M\|b\|e^{\sigma t/2} \Rightarrow \|x(t)\| \leq M\|b\|e^{-\sigma t/2}$$

Vi har därmed visat att om $\|b\| \leq \delta/M$ så är $\|x(t)\| \leq \delta e^{-\sigma t/2} \leq \delta$ för $t \geq 0$ och vi har asymptotisk stabilitet. Följande sats sammanfattar resultaten av resonemanget ovan.

Sats 88 Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $f \in \mathcal{C}^1$ i en omgivning av en jämviktspunkt x_0 till systemet $x' = f(x)$ och $df(x_0)$ är inverterbar så är x_0 asymptotiskt stabil om alla egenvärden till $df(x_0)$ har negativ realdel.

Exempel 89 Den dämpade pendeln

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = y \\ y' = g(x, y) = -\omega^2 \sin x - 2\gamma y \end{cases}$$

har jämviktpunkten $(0, 0)$ och där är funktionalmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x(0, 0) & \partial f / \partial y(0, 0) \\ \partial g / \partial x(0, 0) & \partial g / \partial y(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{bmatrix}$$

Karaktäristiska polynomets, $s^2 + 2\gamma s + \omega^2$, nollställen $-\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ har, om $\gamma \leq \omega$, båda negativ realdel $-\gamma$ eller, om $\gamma > \omega$, två reella negativa nollställen $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$. Jämvikten är alltså asymptotiskt stabil.

Vad kan sägas om något egenvärde till $df(x_0)$ har positiv realdel? Med ett resonemang liknande, men besvärligare, det som det vi använt ovan kan man visa följande sats.

Sats 90 Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $f \in \mathcal{C}^1$ i en omgivning av en jämviktpunkt x_0 till systemet $x' = f(x)$ och $df(x_0)$ är inverterbar så är x_0 labil om något egenvärde till $df(x_0)$ har positiv realdel.

Exempel 91 I jämviktpunkten $(\pi, 0)$ är

$$P = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x(\pi, 0) & \partial f / \partial y(\pi, 0) \\ \partial g / \partial x(\pi, 0) & \partial g / \partial y(\pi, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -2\gamma \end{bmatrix}$$

och karaktäristiska polynomets $s^2 + 2\gamma s - \omega^2$ har reella nollställen $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}$ där plustecknet alltid ger $\lambda > 0$. Jämviktpunkten $(\pi, 0)$ är därmed labil.

Observera att satserna 88 och 90 inte säger något i fallet då $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ om det råder likhet för något eller några nollställen λ till karaktäristiska polynomets.