Föreläsning 12

Stabilitet för olineära system

12.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(6.3) Ecological Models: Predators and Competitors.

(6.4) Nonlinear Mechanical Systems.

Genom linearisering kan man ibland avgöra om en jämviktspunkt är stabil eller inte. Metoden fungerar dock bara om det lineära systemets egenvärden alla har negativ realdel eller om något egenvärde har positiv realdel. Den metod vi nu skall studera har inte dessa brister, men förutsätter i stället att man kan konstruera en liapunovfunktion.

12.2 Liapunovfunktioner

Först ett par definitioner.

Definition 92 *En funktion $V : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd som innehåller 0, är positivt (negativt) semidefinit om $V(x) \geq 0$ (≤ 0) för $x \in D$ och $V(0) = 0$. Om dessutom $V(x) \neq 0$ då $x \neq 0$ är V positivt (negativt) definit.*

Exempel 93 *Funktionen $V(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2$ är positivt definit på $D = \mathbb{R}^2$.*

Definition 94 *Derivatan $\dot{V}_f$ av V längs ett vektorfält $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ definieras som*

$$\dot{V}_f(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x)$$

Exempel 95 *Med $f(x,y) = \left(y, -x^3 - y\right)$ och samma V som i exempel 93 får vi*

$$\dot{V}_f(x) = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y}\left(-x^3 - y\right) = -2xy - 4y^2 - 2x^4 - 4yx^3 - x^2$$

Följande resultat ger tillräckliga villkor för stabilitet respektive asymptotisk stabilitet.

Sats 96 *Låt $x' = f(x)$ vara ett autonomt system med en isolerad jämviktspunkt i $x = 0$ och V en kontinuerligt deriverbar positivt definit funktion i en omgivning av 0 sådan att $\dot{V}_f(x)$ är negativt semidefinit. Då är 0 en stabil jämviktspunkt. Är dessutom $\dot{V}_f$ negativt definit är jämviktspunkten asymptotiskt stabil.*

Bevis. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och sätt $c = \min\{V(x) : \|x\| = \varepsilon\}$. Eftersom V är positivt definit är $c > 0$ och eftersom $\{x : V(x) < c/2\} \cap \{x : \|x\| < \varepsilon\}$ är en öppen omgivning till 0 finns $\delta > 0$ så att

$$\{x : \|x\| < \delta\} \subset \{x : V(x) < c/2\} \cap \{x : \|x\| < \varepsilon\}$$

Om nu $\|b\| < \delta$ och $x(t)$ en lösning till $x' = f(x)$, $x(0) = b$ så följer av kedjeregeln och förutsättningen att $\dot{V}_f(x) \leq 0$ att

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(b) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} V(x(\tau))\, d\tau \\ &= V(b) + \int_0^t \dot{V}_f(x(\tau))\, d\tau \leq V(b) < \frac{c}{2} \end{aligned} \tag{12.1}$$

för alla $t \geq 0$ och då måste också $\|x(t)\| < \varepsilon$ gälla för alla $t \geq 0$ eftersom $\|x(t_0)\| = \varepsilon$ medför att $V(x(t_0)) \geq c$.

Är dessutom $\dot{V}_f(x) < 0$ så snart $x \neq 0$, är jämviktspunkten asymptotiskt stabil, ty om inte $x(t)$ går mot 0 då $t \to +\infty$ så är

$$0 < \varepsilon_0 = \min\left\{\lim_{t\to\infty} V(x(t)), 1\right\} \leq 1$$

och $V(x(t)) \geq \varepsilon_0$ för $t \geq 0$, eftersom $t \mapsto V(x(t))$ är en avtagande funktion.

Men på den kompakta mängden $\{x : \varepsilon_0 \leq V(x) \leq 1\}$ är $\dot{V}_f(x) \leq -\delta < 0$ för något tal δ och då är enligt (12.1)

$$V(x(t)) = V(b) + \int_0^t \dot{V}_f(x(\tau))\, d\tau \leq V(b) - \int_0^t \delta\, d\tau = V(b) - \delta t$$

som innebär att $V(x(t))$ blir negativt för stora t vilket är en motsägelse. ∎

Funktionen V är en *liapunovfunktion*. Tyvärr finns ingen generell metod att konstruera sådana funktioner till ett givet system av differentialekvationer. Man vet inte ens om det finns liapunovfunktioner till alla autonoma system. För problem som har sitt ursprung i fysik, speciellt mekanik, kan man ofta använda en energifunktion som liapunovfunktion, vilket visas i exemplet 97 nedan. Exemplet visar också att en liapunovfunktion kan hantera situationer där stabiliteten inte går att avgöra genom linearisering.

Exempel 97 *En svagt dämpad pendel, där dämpningen är proportionell mot hastigheten i kubik, beskrivs matematiskt av systemet*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 \sin x - \gamma y^3 \end{cases} \qquad \gamma, \omega > 0$$

som har en isolerad jämviktspunkt i $(0,0)$. *För den odämpade pendeln (där* $\gamma = 0$*) har vi en separabel ekvation* $\omega^2 \sin x dx + y dy = 0$ *med potentialen (=totala energin i systemet)*

$$V(x,y) = \int \omega^2 \sin x dx + \int y dy = \omega^2 (1 - \cos x) + \frac{y^2}{2}$$

som är positivt definit för $|x| < \pi$. *Vidare är*

$$\dot{V}(x,y) = -\gamma y^4 \leq 0$$

och alltså negativt semidefinit. Av sats 96 följer att vi har en stabil jämviktspunkt.

Observera att eftersom $\dot{V}(x,y) = -\gamma y^4$ i exempel 97 bara är semidefinit, kan vi inte dra slutsatsen att $(0,0)$ är asymptotiskt stabil trots att detta rimligen är fallet. För att visa asymptotisk stabilitiet behöver vi konstruera en mer raffinerad liapunovfunktion. En annan möjlighet är att förbättra satsen 96, vilket vi gör i sats 100.

Nästa sats ger ett tillräckligt villkor för instabilitet hos en jämviktspunkt.

Sats 98 *Låt $x' = f(x)$ vara ett autonomt system med en isolerad jämviktspunkt i $x = 0$ och V kontinuerligt deriverbar med $\dot{V}_f$ positivt definit i en omgivning $\{x : \|x\| \leq r\}$ av 0. Antag vidare att $V(0) = 0$ och att varje omgivning till 0 innehåller någon punkt b där $V(b) > 0$. Då är 0 en labil jämviktspunkt.*

Bevis. För godtyckligt δ med $0 < \delta < r$ väljer vi b så att $V(b) = \max\{V(x) : \|x\| \leq \delta\}$ och $\|b\| \leq \delta$.

Då är $V(b) > 0$ enligt förutsättningen, vilket också medför att $b \neq 0$. Låt sedan $x(0) = b$. Mängden $K = \{x : \|b\| \leq \|x\| \leq r\}$ är kompakt och eftersom V och $\dot{V}_f$ är kontinuerliga, och $\dot{V}_f$ dessutom positiv, gäller att $a = \min\left\{\dot{V}_f(x) : x \in K\right\} > 0$ och $A = \max\{V(x) : x \in K\} < \infty$.

Då följer att

$$V(x(t)) = V(b) + \int_0^t \dot{V}_f(x(\tau))\,d\tau \geq V(b) + \int_0^t a\,d\tau = V(b) + at > V(b)$$

för alla $t > 0$ vilket dels visar att $\|x(t)\| > \|b\|$ och, efter en tid, även att $\|x(t)\| > r$ eftersom $\|x(t)\| \leq r$ medför att $V(x(t)) \leq A$. Jämviktspunkten är alltså instabil. ∎

Exempel 99 *Vi exemplifierar sats 98 genom att analysera den dämpade pendeln från exempel 97 i jämviktspunkten $x = \pi$ och $y = 0$.*

Lösning:

Med variabelbytet $x = \pi + u$ och $y = v$ får vi systemet

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \omega^2 \sin u - \gamma v^3 \end{cases}$$

och med funktionen $V(u,v) = v\omega^2 \sin u - \gamma v^4/4$ blir

$$\dot{V}(u,v) = v^2\omega^2 \cos u + \left(\omega^2 \sin u - \gamma v^3\right)^2$$

som är positivt definit om $|u| < \pi/2$. Punkter (u,v) godtyckligt nära $(0,0)$ med $V(u,v) > 0$ får vi om $0 < v < \sqrt[3]{(4\omega^2/\gamma)\sin u}$. Av sats 98 följer att jämviktspunkten är labil. Samma slutsats fås förstås med linearisering som ger koefficientmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

och karatäristiska polynomet $p(s) = s^2 - \omega^2 = (s-\omega)(s+\omega)$ som har ett positivt nollställe.

För att sats 96 skall garantera asymptotisk stabilitet krävs att $\dot{V}_f$ är negativt definit. Detta kan ibland vara svårt att åstadkomma och följande förbättring av sats 96 är därför värdefull.

Sats 100 *Låt $x' = f(x)$ vara ett autonomt system med en isolerad jämviktspunkt i $x = 0$ och V en kontinuerligt deriverbar positivt definit funktion sådan att $\dot{V}_f(x)$ är negativt semidefinit. Om $x(t) \equiv 0$ är den enda lösningen till $x' = f(x)$ som ligger i mängden $\left\{x : \dot{V}_f(x) = 0\right\}$ är jämviktspunkten $x = 0$ asymptotiskt stabil.*

Satsen illustrerars i exempel 99 nedan. Om $\dot{V}_f$ är negativt *definit* är $\left\{x : \dot{V}_f(x) = 0\right\} = \{0\}$ och den sista slutsatsen i sats 96 är därför ett specialfall av sats 100.

Bevis. Eftersom $V(x(t))$ är avtagande för $t \geq 0$, existerar gränsvärdet $a = \lim_{t\to\infty} V(x(t)) \geq 0$. Vidare är $\|x(t)\|$ begränsad och då finns också enligt Bolzano-Weierstrass sats[1] en följd $t_n \to \infty$ så att $x(t_n)$ har ett gränsvärde b då $n \to \infty$.

Sätt $y_n(t) = x(t + t_n)$ och definiera y som lösningen till $y' = f(y)$ med $y(0) = b$. Då gäller att $y_n' = f(y_n)$ och $y_n(0) = x(t_n)$ och sats 38 ger att

$$\|y_n(t) - y(t)\| \leq \|y_n(0) - y(0)\| e^{Lt} = \|x(t_n) - b\| e^{Lt}$$

vilket medför att $y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t)$ för alla $t \geq 0$ där lösningarna är definierade. Speciellt gäller för $t \geq 0$ att $V(y(t))$ är konstant eftersom

$$V(y(t)) = \lim_{n\to\infty} V(y_n(t)) = \lim_{n\to\infty} V(x(t+t_n)) = \lim_{t\to\infty} V(x(t)) = a$$

vilket medför att $y(t) \in \left\{x : \dot{V}_f(x) = 0\right\}$ då

$$\dot{V}_f(y(t)) = \frac{d}{dt} V(y(t)) = 0$$

Enligt förutsättningarna i satsen innebär detta att $y(t) \equiv 0$ och således är $\lim_{t\to\infty} V(x(t)) = a = 0$ och därmed $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, vilket skulle bevisas. ■

Exempel 101 *Undersök stabiliteten i origo till systemet*

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = x^2 - y^3 \end{cases}$$

[1] Se lämplig analysbok.

Lösning:

Ansatsen $V(x,y) = ax^2 + by^2$ ger

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x,y) &= (-2xy)\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) + \left(x^2 - y^3\right)\frac{\partial}{\partial y}V(x,y) \\
&= 2(b-2a)x^2y - 2by^4
\end{aligned}$$

som med $b = 2$ och $a = 1$ ger $\dot{V}(x,y) = -4y^4$ som är negativt semidefinit. Om en lösning, $(x(t), y(t))$, skall uppfylla villkoret $y(t) \equiv 0$ måste emellertid också $x(t) \equiv 0$ gälla och då följer av sats 100 att jämvikten är asymptotiskt stabil.