

FÖRELÄSNINGAR OM ORDINÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER ¹

Kurt Hansson

2009

¹©2009 Kurt Hansson, MAI.

Innehåll

1	Differentialekvationer av första ordningen	1
1.1	Aktuella avsnitt i läroboken	1
1.2	Några grundbegrepp	2
1.2.1	Vad är en differentialekvation?	2
1.2.2	Vad är en lösning?	2
1.2.3	Vad är ett begynnelsevillkor?	2
1.3	Den enklaste differentialekvationen	3
1.3.1	Kanalsimning	4
1.4	Separabla ekvationer	5
1.4.1	Torricellis lag	5
1.5	Lineära ekvationer	6
1.5.1	Ett RC-filter	7
1.6	Exakta ekvationer	8
1.7	Sammanfattning	10
2	Differentialekvationer och Maple	13
2.1	Aktuella avsnitt i läroboken	13
2.2	Funktionen <code>int</code>	14
2.2.1	Kanalsimningen	14
2.3	Funktionen <code>dsolve</code>	15
2.3.1	Torricellis tratt	15
2.4	Riktningsfält och lösningskurvor	17
2.4.1	Nivåkurvor	17
2.4.2	Riktningsfält	18
3	Modeller för dynamiska förlopp	19
3.1	Aktuella avsnitt i läroboken	19
3.2	Autonoma ekvationer	20
3.2.1	Jämviktpunkter	20
3.2.2	Stabilitet	20
3.3	Logistisk tillväxt	21
3.4	Stabilitetskriterier	21
3.5	Tröskeffekter	22

3.5.1	Ett gränsfall	23
3.6	Hastighet och acceleration	24
3.6.1	Fritt fall med luftmotstånd	24
4	Lineära ekvationer av högre ordning	27
4.1	Aktuella avsnitt i läroboken	27
4.2	Lineära ekvationer av andra ordningen	28
4.2.1	Exempel från mekanik och ellära	28
4.3	Existens och entydighet av lösningar	29
4.4	Homogena ekvationer	29
4.4.1	Lösningens struktur	30
4.4.2	Nollrummet	30
4.4.3	Reduktion av ordning	31
4.5	Allmänna lineära ekvationer	32
4.6	Konstanta koefficienter	32
5	Inhomogena ekvationer	33
5.1	Aktuella avsnitt i läroboken	33
5.2	Partikulärlösningar	34
5.3	Karaktärisering av partikulärlösningen	36
5.4	Resonans	36
6	System av differentialekvationer	41
6.1	Aktuella avsnitt i läroboken	41
6.2	System av första ordningen	42
6.3	Ekvationer av högre ordning som system	42
6.4	Begynnelsevärden och entydighet	43
6.5	Räkning med vektorvärda funktioner	43
6.5.1	Räkneregler	44
6.6	Differentialekvationen som integralekvation	44
6.6.1	Grönwalls lemma	45
6.7	Lipschitzkontinuitet	45
7	Existens och entydighet	47
7.1	Aktuella avsnitt i läroboken	47
7.2	En integralekvation	48
7.3	Iteration	48
7.4	Entydighet och stabilitet	51
7.5	Lokala resultat	53
8	Lineära system av differentialekvationer	55
8.1	Aktuella avsnitt i läroboken	55
8.2	Lineära system	56
8.3	Homogena system	56

8.3.1	Fundamentalmatris	57
8.4	Inhomogena system	58
8.5	Konstanta koefficienter	58
8.5.1	Exponentialmatrisen	59
8.5.2	Diagonaliserbar P -matris	59
8.5.3	Defekt P -matris	60
9	Laplacetransformen	63
9.1	Aktuella avsnitt i läroboken	63
9.2	Definition	64
9.2.1	Konvergensområde	65
9.3	Egenskaper	65
9.3.1	Linearitet	65
9.3.2	Translation i s -variabeln	66
9.3.3	Translation i t -variabeln	66
9.4	Laplacetransformen av en derivata	68
9.4.1	Potensfunktionen	68
9.5	Inversa laplacetransformen	70
9.5.1	Derivatans av en laplacetransform	70
9.5.2	En inversionsformel	71
9.5.3	Entydighet	72
9.6	Differentialekvationer	72
9.6.1	Karaktäristiskt polynom och baspolynom	72
9.6.2	Differentialekvationer och laplacetransform	73
9.7	Polynom och lineära avbildningar	74
9.7.1	Två satser om baspolynom	75
9.8	Faltning	76
9.9	Laplacetransformen av en faltning	76
9.9.1	Egenskaper hos faltningsoperationen	77
10	Laplacetransform och lineära system	79
10.1	Aktuella avsnitt i läroboken	79
10.2	Resolventmatris	80
10.3	Exponentialmatris	82
10.4	Minimalpolynom	83
11	Stabilitet och linearisering	85
11.1	Aktuella avsnitt i läroboken	85
11.2	Autonoma system	86
11.2.1	Translationsinvarians	86
11.2.2	Fasporträtt	86
11.2.3	Jämviktpunkter	88
11.2.4	Stabilitet	88
11.3	Linearisering	89

11.3.1	Lineära autonoma system	90
11.4	Nästan lineära system	90
12	Stabilitet för olineära system	95
12.1	Aktuella avsnitt i läroboken	95
12.2	Liapunovfunktioner	96
A	Några viktiga resultat från analys och lineär algebra	101
A.1	Euklidiska rum	102
A.2	Serier	103
A.2.1	Konvergens	103
A.2.2	Absolutkonvergens	103
A.2.3	Likformig konvergens	104
A.2.4	Weierstrass majorantsats	104
A.3	Enkelintegraler	104
A.4	Dubbelintegraler	105
A.5	Parameterintegraler	105
B	Inversionsformeln	107

Om kursen och kompendiet

För att den som hellre lyssnar än antecknar, och framförallt vill slippa göra bådadera samtidigt, har jag skrivit ner vad jag tänker säga. Följden blir förstås ofta att jag inte säger allt jag skrivit ner, men förhoppningsvis blir stoffet mer levande med den informellare framställning som man kan kosta på sig när detaljerna finns i texten.

Ytterligare ett skäl att skriva, är att läroboken alltsomoftast utelämnar bevisen för många av de mest fundamentala resultaten såsom existens- och entydighetssatserna. Eftersom detta knappast är i linje med svensk undervisningstradition, har kompendiet även här en uppgift att fylla.

Föreläsningarna ingår i kursen: *Ordinära differentialekvationer* med kurskod NMAC26 vid Linköpings universitet. Den innehåller utöver föreläsningarna handledda lektioner avsedda för eget arbete. Drygt hälften av lektionerna är i datorsal med tillgång till Maple. Tentamen sker också i datorsal vid tre tillfällen årligen.

Föreläsning 1

Differentialekvationer av första ordningen

1.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(1.1) Differential Equations and Mathematical Models. (Speciellt exemplen 3, 4 och 5.)

(1.2) Integrals as General and Particular Solutions. (Speciellt exempel 4)

(1.4) Separable Equations and Applications.

(1.5) Linear First-Order Equations.

(1.6) Substitution Methods and Exact Equations.

Se också analysboken [12, Kapitel 8.] eller motsvarande.

1.2 Några grundbegrepp

1.2.1 Vad är en differentialekvation?

Matematiska modeller som beskriver förändring kallas dynamiska system. Dynamiska system där förändringen sker kontinuerligt leder ofta till differentialekvationer. En differentialekvation av första ordningen har formen

$$g(x, y, y') = 0 \quad (1.1)$$

där g är en kontinuerlig funktion av tre reella variabler. Kan vi lösa ut den sista variabeln y' får vi

$$y' = f(x, y) \quad (1.2)$$

där f är en kontinuerlig funktion av två variabler.

1.2.2 Vad är en lösning?

En lösning $y = y(x)$ till (1.1) eller (1.2) är en kontinuerligt deriverbar *funktion* som är definierad i ett *intervall* $a < x < b$ sådan att för alla $x \in]a, b[$ gäller att

$$g(x, y(x), y'(x)) = 0 \text{ alternativt } y'(x) = f(x, y(x))$$

Exempel 1 *Funktionen*

$$y(x) = \frac{1}{c-x}, \quad x < c \quad (1.3)$$

är en lösning till $y' = y^2$ eftersom

$$y'(x) = -\frac{-1}{(c-x)^2} = y^2(x)$$

gäller för alla $x < c$. Funktionen

$$y(x) = \frac{1}{c-x}, \quad x > c \quad (1.4)$$

är en annan lösning till ekvationen eftersom definitionsintervallen är olika.

1.2.3 Vad är ett begynnelsevillkor?

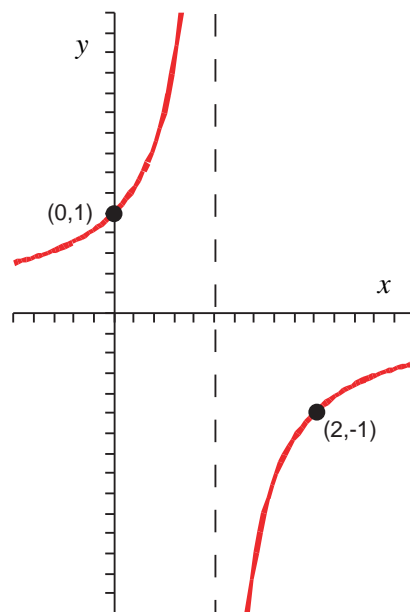
Normalt har differentialekvationer oändligt många lösningar vilket syns i exempel 1 eftersom c kan vara en godtycklig konstant. För att få entydiga lösningar krävs ytterligare villkor på funktionen $y(x)$. Ofta söker man en lösningskurva som går genom en given punkt (x_0, y_0) . Villkoret blir då att $y(x_0) = y_0$. Ett sådant villkor kallas *begynnelsevillkor*, även när variabeln x inte representerar tid.

Exempel 2 Lös ekvationen $y' = y^2$ med *begynnelsevillkoren* $y(0) = 1$ respektive $y(2) = -1$.

Lösning

Eftersom $y(x) = (c-x)^{-1}$ för $x \neq c$ måste vi i första fallet ha $c \neq 0$ och då blir $1 = y(0) = 1/c \Leftrightarrow c = 1$ vilket ger lösningen $y_1(x) = (1-x)^{-1}$ som är definierad för $x < 1$.

I det andra fallet måste vi ha $c \neq 2$, vilket ger $-1 = y(2) = (c-2)^{-1} \Leftrightarrow c = 1$ och lösningen blir $y_2(x) = (1-x)^{-1}$ som nu är definierad för $x > 1$. Observera att y_1 och y_2 är två olika lösningar eftersom definitionsintervallen är olika. Se figur 1.1.



Figur 1.1: Funktionerna $y_1(x)$ och $y_2(x)$.

1.3 Den enklaste differentialekvationen

I specialfallet att högerledet f i ekvationen 1.2 endast beror av x får vi

$$y' = f(x) \tag{1.5}$$

där alla lösningar till (1.5) kan skrivas

$$y = F(x) + C$$

4FÖRELÄSNING 1. DIFFERENTIALEKVATIONER AV FÖRSTA ORDNINGEN

där $F(x) = \int f(x) dx$ är en primitiv funktion till f och C en godtycklig konstant. Begynnelsevillkoret $y(x_0) = y_0$ bestämmer C till $C = y_0 - F(x_0)$.

Exempel 3 En liten sten med massan m som faller fritt från höjden h har i varje ögonblick hastigheten $v(t)$ och Newtons kraftlag ger

$$ma = m \frac{dv}{dt} = mg$$

där $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$. Division med m ger $v' = g$ och $v(t) = gt + C_1$. Om utgångshastigheten $v(0) = v_0$ blir $C_1 = v_0$ och vi får $v = v_0 + gt$. Befinner sig stenen på höjden $y(t)$ vid tiden t får vi dessutom

$$\frac{dy}{dt} = v(t) = v_0 + gt$$

som ger $y = gt^2/2 + v_0t + C_2$ och då $y(0) = h$ följer att $C_2 = h$ och

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0t + h$$

1.3.1 Kanalsimming

Exempel 4 Vattnet i en kanal med bredden $2a$ strömmar med hastigheten

$$v(x) = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

där x är en koordinataxel som är vinkelrät mot kanalen med $x = 0$ i kanalens mitt. Se läroboken [3, Figur 1.2.5, sid. 15]. Hur långt nedströms hamnar en simmare som startar från ena stranden och simmar rakt mot den andra med konstant hastighet v_S relativt vattnet?

Lösning

Betecknas simmarens färdväg som funktion av x med $y(x)$ får vi ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{v(x)}{v_S} = \frac{v_0}{v_S} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$$

Allmänna lösningen blir

$$y(x) = C + \int \frac{v_0}{v_S} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = C + \frac{v_0}{v_S} \left(x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{a^2} \right)$$

och om $y(-a) = 0$ blir

$$0 = C + \frac{v_0}{v_S} \left(-a + \frac{1}{3} \frac{a^3}{a^2} \right) \iff C = \frac{2}{3} \frac{v_0}{v_S} a$$

Således hamnar han

$$y(a) = \frac{2}{3} \frac{v_0}{v_S} a + \frac{v_0}{v_S} \left(a - \frac{1}{3} \frac{a^3}{a^2} \right) = \frac{4}{3} \frac{v_0}{v_S} a$$

längdenheter nedströms.

1.4 Separabla ekvationer

Differentialekvationer som kan skrivas på formen

$$f(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1.6}$$

kallas *separabla*. Om vi integrerar båda leden med avseende på x får vi

$$\int g(x) dx = \int f(y) \frac{dy}{dx} dx = \int f(y) dy$$

så att om vi kan bestämma primitiva funktioner F och G till f respektive g ges lösningarna till (1.6) *implicit*¹ av sambandet

$$G(x) = F(y) + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Exempel 5 Ekvationen $y' = e^{x+y}$ kan skrivas $e^{-y}y' = e^x$ och vi får

$$\begin{aligned} e^x &= \int e^x dx = \int e^{-y} dy = -e^{-y} + C \\ e^x + e^{-y} &= C \Leftrightarrow x = \ln(C - e^{-y}) \Leftrightarrow y = -\ln(C - e^x) \end{aligned}$$

för de värden på x , y och C där uttrycken är definierade.

1.4.1 Torricellis lag

Exempel 6 En tratt formad som en rät cirkulär kon med höjden h har basradien R medan utloppshålets radie r är betydligt mindre. Beräkna hur lång tid det tar att tömma tratten om den är helt fylld med vatten.

¹En relation mellan variablerna x och y av typen $f(x,y) = C$ kallas implicit.

6FÖRELÄSNING 1. DIFFERENTIALEKVATIONER AV FÖRSTA ORDNINGEN

Lösning

Enligt Torricellis lag [3, Sid. 40.] strömmar vattnet ut med hastigheten $v = \sqrt{2gy}$, där y är nivån över utloppshålet och g tyngdaccelerationen ($g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$). Vattnenvolymen är samtidigt

$$V(y) = \int_0^y \pi \left(r + \eta \frac{R-r}{h} \right)^2 d\eta$$

och sambandet $dV/dt = -\pi r^2 v$ ger efter omstuvning den separabla differentialekvationen (1.7)

$$\begin{aligned} -\pi r^2 \sqrt{2gy} &= \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = \pi \left(r + y \frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{dy}{dt} \\ \left(r + y \frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dt} &= -r^2 \sqrt{2g} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Vidare är $y(0) = h$ och $y(T) = 0$, där T är tömningstiden. Integration av (1.7) ger

$$\begin{aligned} r^2 \sqrt{2g} T &= \int_0^T r^2 \sqrt{2g} dt = - \int_0^T \left(r + y \frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dt} dt = - \int_h^0 \left(r + y \frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= \int_0^h \left(r + y \frac{R-r}{h} \right)^2 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{15} \sqrt{h} (3R^2 + 4Rr + 8r^2) \end{aligned}$$

vilket sedan ger tömningstiden T

$$T = \frac{1}{15} \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{3R^2 + 4Rr + 8r^2}{r^2} = \frac{1}{15} \sqrt{\frac{2h}{g}} \left[8 + 4\frac{R}{r} + 3\left(\frac{R}{r}\right)^2 \right]$$

En tratt med $R/r = 15$ och $h = 12 \text{ cm}$ töms alltså på $T = 7.8 \text{ s}$.

1.5 Lineära ekvationer

En lineär ekvation av första ordningen har formen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1.8)$$

och kan återföras på grundformen (1.5) genom att multiplicera med en *integrerande faktor*

$$\rho(x) = \exp\left(\int P(x) dx\right)$$

Eftersom $\rho' = \rho P$ får vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\rho y) &= \rho y' + \rho' y = \rho(y' + Py) = \rho Q \\ \rho(x)y(x) &= C + \int \rho(x)Q(x) dx \\ y(x) &= \frac{C}{\rho(x)} + \frac{1}{\rho(x)} \int \rho(x)Q(x) dx\end{aligned}\quad (1.9)$$

Om lösningsformeln (1.9) skall vara användbar krävs förstås att man kan bestämma de ingående primitiva funktionerna på ett bra sätt.

Anmärkning 7 Observera att lösningen (1.9) består av två termer. Den första, $C\rho(x)^{-1}$, är en allmän lösning till den homogena ekvationen $y' + Py = 0$ och den andra, $\rho(x)^{-1} \int \rho(x)Q(x) dx$, är en lösning till den inhomogena ekvationen $y' + Py = Q$. Lösningar till lineära ekvationer har alltid denna form.

Exempel 8 Ekvationen $x^2y' + xy = xe^{2x}$ kan skrivas

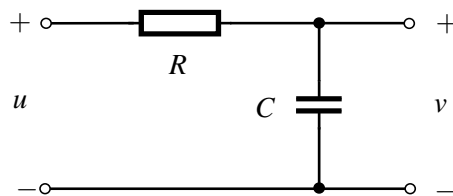
$$y' + \frac{1}{x}y = e^{2x}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = e^{\ln x} = x \\ \frac{d}{dx}(xy) &= xy' + y = x\left(y' + \frac{1}{x}y\right) = xe^{2x} \\ xy(x) &= C + \int xe^{2x} dx = C + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \\ y(x) &= \frac{C}{x} + \frac{2x-1}{4x}e^{2x}\end{aligned}$$

1.5.1 Ett RC-filter

Exempel 9 Koppingschemat i figur 1.2 visar ett enkelt RC-filter. Bestäm hur spän-



Figur 1.2: Ett RC-filter.

ningen $v(t)$ beror av inspänningen $u(t)$ för $t \geq 0$.

8FÖRELÄSNING 1. DIFFERENTIALEKVATIONER AV FÖRSTA ORDNINGEN

Lösning

Ohms lag ger att $u = RI + v$, där I är strömmen genom motståndet och kondensatorn. Vidare är $I = Cdv/dt$ och vi får den lineära ekvationen

$$RC \frac{dv}{dt} + v = u \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{u}{RC}$$

Multiplikation med den integrerande faktorn

$$\rho(t) = \exp\left(\int \frac{dt}{RC}\right) = e^{t/RC}$$

ger som förut

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{t/RC} v \right) &= \left(v' + \frac{v}{RC} \right) e^{t/RC} = \frac{u}{RC} e^{t/RC} \\ e^{t/RC} v(t) - v(0) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(e^{\tau/RC} v(\tau) \right) d\tau = \int_0^t \frac{u(\tau)}{RC} e^{\tau/RC} d\tau \\ v(t) &= v(0) e^{-t/RC} + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.10)$$

Även här består lösningen (1.10) av två termer (se anmärkning 7). Den första, $v(0) e^{-t/RC}$, kommer från laddningen som fanns i kondensatorn vid tiden $t = 0$ och den andra visar hur $v(t)$ beror av $u(t)$.

1.6 Exakta ekvationer

Lösningar till differentialekvationer av första ordningen erhålles ofta implicit som ett samband mellan x och y av formen

$$F(x, y) = C \quad (1.11)$$

där C är en godtycklig konstant. Geometriskt betyder (1.11) att lösningarna ligger i *nivåkurvorna* till funktionen F .

Betraktar vi y som funktion av x och deriverar får vi

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (1.12)$$

Alternativt om x i stället beror av y blir ekvationen

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial x} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (1.13)$$

Vilken av ekvationerna (1.12) eller (1.13) som är bäst att arbeta med beror på F och man använder därför gärna det symmetriska skrivsättet

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (1.14)$$

för ekvationer av första ordningen.

Formen (1.14) inbjuder till en geometrisk tolkning. Den säger att lösningskurvans tangentvektor (dx, dy) skall vara *ortogonal* mot vektorfältet (M, N) , eftersom högerledet i (1.14) är skalärprodukten av vektorerna (M, N) och (dx, dy) . Av (1.12) och (1.13) följer också att lösningskurvorna satisfierar (1.11) om

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ och } N = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (1.15)$$

för någon deriverbar funktion F . Detta betyder att $\nabla F = (M, N)$ och innebär att vektorfältet (M, N) skall ha en *potential* F .

Definition 10 *Differentialekvationen (1.14) är exakt om sambanden (1.15) gäller för någon funktion F .*

Sats 11 *Om M och N är kontinuerligt deriverbara är sambandet*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (1.16)$$

ett nödvändigt villkor för att ekvationen (1.14) skall vara exakt.

Bevis. Om $\nabla F = (M, N)$, där $F \in C^2$, så är [11, Kap. 2, sats 9.]

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

■

Anmärkning 12 *I ett enkelt sammanhängande område [11, Sats 4, sid. 311.] är villkoret (1.16) även tillräckligt.*

Exempel 13 *Lös ekvationen*

$$(8x + y - 10)dx + \frac{9x + 32y - 73}{9}dy = 0 \quad (1.17)$$

Lösning

Här är $M(x, y) = 8x + y - 10$ och $N(x, y) = (9x + 32y - 73)/9$ och alltså

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 1 = 0$$

10FÖRELÄSNING 1. DIFFERENTIALEKVATIONER AV FÖRSTA ORDNINGEN

och om $\nabla F = (M, N)$ har vi

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + f(y) = 4x^2 + xy - 10x + f(y)$$

vilket ger

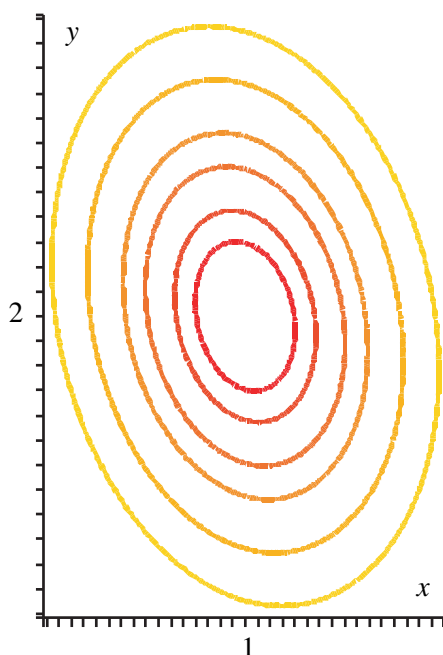
$$\frac{9x + 32y - 73}{9} = N(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} = x + f'(y)$$

$$f'(y) = \frac{32y - 73}{9} \quad (\text{Här får inte finnas några } x)$$

$$f(y) = \int \frac{32y - 73}{9} dy = \frac{16}{9}y^2 - \frac{73}{9}y$$

och slutligen lösningskurvorna, se figur 1.3, som nivåkurvorna $F(x, y) = C$ där

$$F(x, y) = 4x^2 - 10x + xy + \frac{16}{9}y^2 - \frac{73}{9}y$$



Figur 1.3: Nivåkurvorna: $F(x, y) = C$.

1.7 Sammanfattning

De speciella ekvationer som vi studerat kan sammanfattas på så sätt att antingen är ekvationerna exakta eller så kan de genom lämpliga åtgärder göras exakta. Se också [3, Avsnitt 1.6].

Separabla ekvationer: $M(x) dx + N(y) dy = 0$ är exakt med potentialen $F(x, y) = \int M(x) dx + \int N(y) dy$.

Homogena ekvationer: $M(y/x) dx + N(y/x) dy = 0$ blir separabla (och därmed exakta) efter substitutionen $y = zx$ och $dy = z dx + x dz$.

Lineära ekvationer: Den lineära ekvationen (1.8) skriven på formen (1.14) blir $(P(x)y - Q(x)) dx + dy = 0$ och den blir exakt efter multiplikation med den integrerande faktorn $\rho(x) = \exp(\int P dx)$, ty $M = \rho(P(x)y - Q(x))$ och $N = \rho$ samt $\rho' = \rho P$ ger

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \rho P - \rho' = 0$$

12 FÖRELÄSNING 1. DIFFERENTIALEKVATIONER AV FÖRSTA ORDNINGEN

Föreläsning 2

Differentialekvationer och Maple

2.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(1.3) Slope Fields and Solution Curves.

Se också maplehäftet [7].

För den som är intresserad av numeriska lösningsmetoder för differentialekvationer kan följande avsnitt vara intressanta. De ingår dock inte i kursen.

(2.4) Numerical Approximation: Euler's Method.

(2.5) A Closer Look at the Euler Method.

(2.6) The Runge-Kutta Method.



Följande exempel bör man sitta framför datorn och köra i Maple.

2.2 Funktionen `int`

Den enklaste typen av differentialekvationer av formen $y' = f(x)$ med lösningen $y(x) = \int f(x) dx + C$ kan man hantera med funktionen `int` som ger primitiva funktioner.

2.2.1 Kanalsimningen

För detaljerna se exempel 4. Högerledet är en funktion f

```
> f := x -> (v[0]/v[s])*(1-x^2/a^2);
```

$$f := x \rightarrow \frac{v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}{v_s}$$

En primitiv funktion är

```
> sol_1 := int(f(x), x);
```

$$sol_1 := \frac{v_0 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)}{v_s}$$

men eftersom vi vill ha en lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(-a) = 0$, är det bättre att använda den bestämda integralen $y(x) = \int_{-a}^x f(t) dt$

```
> sol_2 := int(f(t), t=-a..x);
```

$$sol_2 := -\frac{1}{3} \frac{v_0 (x^3 + a^3)}{v_s a^2} + \frac{v_0 (x + a)}{v_s}$$

Lösningen kan förenklas något

```
> sol_2 := simplify(sol_2);
```

$$sol_2 := -\frac{1}{3} \frac{v_0 (x^3 - 2a^3 - 3a^2 x)}{v_s a^2}$$

Lösningens värde för $x = a$ kan beräknas med funktionen `eval`

```
> eval(sol_2, x=a);
```

$$\frac{4}{3} \frac{v_0 a}{v_s}$$

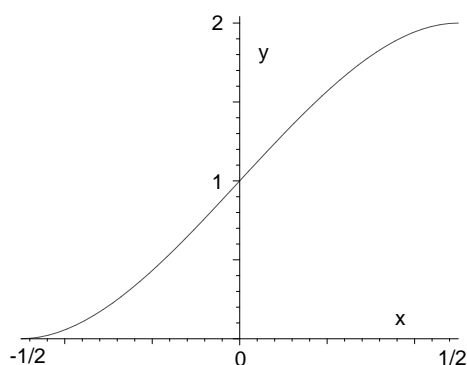
Det är emellertid ofta bättre att definiera lösningen som en funktion $y(x)$. Detta åstadkommer funktionen `unapply`

```
> y := unapply(sol_2, x);
```

$$y := x \rightarrow -\frac{1}{3} \frac{v_0(x^3 - 2a^3 - 3a^2x)}{v_s a^2}$$

Slutligen ger vi de ingående konstanterna numeriska värden och använder `plot`-funktionen för att rita lösningskurvan $y(x)$ för $-1/2 \leq x \leq 1/2$. Se figur 2.1.

```
> a := 1/2; v[0] := 9; v[s] := 3;
      a := 1/2
      v_0 := 9
      v_s := 3
```



Figur 2.1: Funktionen $y = 1 + 3x - 4x^3$.

2.3 Funktionen dsolve

Många differentialekvationer av standardtyp, speciellt alla som vi behandlar i den här kursen, känner Maple till och kan lösa symboliskt. Den funktion som används heter `dsolve`.

2.3.1 Torricellis tratt

Se exempel 6. Differentialekvationen matas in på följande sätt. Observera att y -variabeln skrivs som $y(t)$.

```
> ode := diff(y(t), t) =
      -r^2*sqrt(2*g*y(t))/(r+(R-r)*y(t)/h)^2;
```

$$ode := \frac{d}{dt} y(t) = -\frac{r^2 \sqrt{2} \sqrt{g y(t)}}{\left(r + \frac{(R-r)y(t)}{h}\right)^2}$$

Funktionen y har ett ganska komplicerat uttryck och Maple väljer att ge lösningen i implicit form.

```
> sol_1 := dsolve(ode, y(t));
```

$$sol_1 := t + \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{5} (-R+r)^2 (gy(t))^{5/2} - \frac{2}{3} rhg(-R+r) (gy(t))^{3/2} + r^2 h^2 g^2 \sqrt{gy(t)} \right)}{r^2 h^2 g^3} + _C1 = 0$$

Integrationskonstanten bestäms av att $y(t) = h$ då $t = 0$. Vi får ekvationen

```
> eq_1 := eval(sol_1, {t = 0, y(t) = h});
```

$$eq_1 := \frac{\sqrt{2} \left(\frac{(-R+r)^2 (gh)^{5/2}}{5} - \frac{2rhg(-R+r) (gh)^{3/2}}{3} + r^2 h^2 g^2 \sqrt{gh} \right)}{r^2 h^2 g^3} + _C1 = 0$$

som har lösningen

```
> ic := solve(eq_1, _C1);
```

$$ic := -\frac{\sqrt{2} \sqrt{gh} (3R^2 + 4Rr + 8r^2)}{15gr^2}$$

Substituerar vi det erhållna värdet på integrationskonstanten får vi

```
> sol_2 := eval(sol_1, _C1 = ic);
```

$$sol_2 := t + \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1}{5} (-R+r)^2 (gy(t))^{5/2} - \frac{2}{3} rhg(-R+r) (gy(t))^{3/2} + r^2 h^2 g^2 \sqrt{gy(t)} \right)}{r^2 h^2 g^3} - \frac{\sqrt{2} \sqrt{gh} (3R^2 + 4Rr + 8r^2)}{15gr^2} = 0$$

Tömningstiden T ges av villkoret: $y(t) = 0$ för $t = T$ vilket ger ekvationen

```
> eq_2 := eval(sol_2, {y(t) = 0, t = T});
```

$$eq_2 := T - \frac{\sqrt{2} \sqrt{gh} (3R^2 + 4Rr + 8r^2)}{15gr^2} = 0$$

med lösningen

```
> T := solve(eq_2, T);
```

$$T := \frac{\sqrt{2} \sqrt{gh} (3R^2 + 4Rr + 8r^2)}{15gr^2}$$

Numeriska värden:

```
> g := 9.82; h := 0.12; R := 15*r;
```

$$g := 9.82$$

$$h := 0.12$$

$$R := 15r$$

Tiden T med 3 siffror blir då

```
> evalf(T, 3);
```

7.76

2.4 Riktningsfält och lösningskurvor

Om ekvationen $Mdx + Ndy = 0$ är exakt ges lösningskurvorna av nivåkurvor $F(x, y) = C$ till potentialen F , där $\nabla F = (M, N)$. Nivåkurvor ritars i Maple med funktionen `contourplot`.

2.4.1 Nivåkurvor

Ekvationen i exempel 13 hanteras i Maple på följande sätt: M och N matas in och vi kontrollerar att ekvationen är exakt

```
> M := 8*x-10+y; N := 32/9*y-73/9+x;
```

$$M := 8x - 10 + y$$

$$N := \frac{32y}{9} - \frac{73}{9} + x$$

```
> diff(M, y) - diff(N, x);
```

0

Potentialfunktionen F fås genom integration med avseende på y . Observera att "integrationskonstanten" $f(x)$ är en funktion av x .

```
> F := int(N, y) + f(x);
```

$$F := \frac{16y^2}{9} - \frac{73y}{9} + xy + f(x)$$

Funktionen f satisfierar differentialekvationen

```
> ode := diff(F, x) - M = 0;
```

$$ode := \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) - 8x + 10 = 0$$

med lösningen

```
> sol := dsolve(ode, f(x));
```

$$sol := f(x) = 4x^2 - 10x + _C1$$

Vi uppdaterar F med den funna lösningen

```
> F := eval(F, sol);
```

$$F := \frac{16}{9}y^2 - \frac{73}{9}y + xy + 4x^2 - 10x + _C1$$

och sätter sedan konstanten till noll

```
> F := eval(F, _C1 = 0);
```

$$F := \frac{16}{9}y^2 - \frac{73}{9}y + xy + 4x^2 - 10x$$

Funktionen `contourplot` finns i paketet `plots` som först måste laddas in

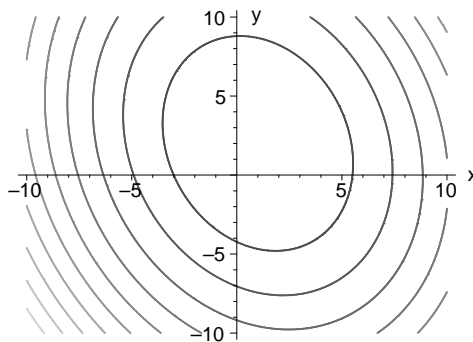
```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Man får sedan prova sig fram till lämpliga värden på de olika parametrarna.

```
> contourplot(F, x=-10..10, y=-10..10, grid=[200,200],
```

```
> contours=10, thickness=3);
```



Figur 2.2: Nivåkurvor till F .

2.4.2 Riktningsfält

Lösningsskurvorna till $Mdx + Ndy = 0$ är ortogonala mot vektorfältet (M, N) och därmed tangentiella mot $(-N, M)$ som kallas ekvationens *riktningsfält*. Plana vektorfält kan Matlab rita med funktionen `fieldplot` som också finns i `plot`-paketet. Med exemplet 6 får vi:

Föreläsning 3

Modeller för dynamiska förlopp

3.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(2.1) Population Models.

(2.2) Equilibrium Solutions and Stability.

(2.3) Acceleration-Velocity Models.

3.2 Autonoma ekvationer

Ekvationer av formen $y' = f(y)$ där högerledet inte beror explicit av den oberoende variabeln t kallas *autonoma*. Eftersom vi har

$$1 - \frac{y'}{f(y)} = 0 \quad (3.1)$$

är autonoma ekvationer separabla och om $F(y) = \int dy/f(y)$ får vi lösningar implicit som $t = F(y) + C$.

3.2.1 Jämviktpunkter

Omskrivningen (3.1) förutsätter att $f(y) \neq 0$. Om $f(y) = 0$ för något $y = k$, får vi en *stationär* (tidsberoende) lösning $y(t) \equiv k$ till den ursprungliga ekvationen. Ett värde k sådant att $f(k) = 0$ kallas en *jämviktpunkt* till ekvationen.

3.2.2 Stabilitet

Vi skall undersöka hur lösningar $y(t)$ till autonoma ekvationer uppträder som funktion av t för stora värden på t om begynnelsevärdet $y(0)$ ligger nära en jämviktpunkt k . Vi börjar med två definitioner.

Definition 14 En jämviktpunkt k är stabil om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$, så att $\max_{0 \leq t < +\infty} |y(t) - k| \leq \varepsilon$ för varje lösning $y(t)$ som uppfyller villkoret $|y(0) - k| \leq \delta$.

En starkare form av stabilitet kallas *asymptotisk stabilitet*.

Definition 15 En jämviktpunkt k är asymptotiskt stabil om det finns ett positivt tal δ så att $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = k$ för varje lösning som uppfyller villkoret $|y(0) - k| \leq \delta$.

En jämviktpunkt som inte är stabil kallas *instabil* eller *labil* och karaktäriseras av att det finns ett positivt tal ε_0 så att $\max_{0 \leq t < +\infty} |y(t) - k| > \varepsilon_0$ oavsett hur nära k vi väljer startvärdet $y(0)$, så länge $y(0) \neq k$ förstås.

Exempel 16 Ekvationen $y' = r(y - k)$, där r är konstant, har $y = k$ som enda jämviktpunkt och alla lösningar kan skrivas $y(t) = k + Ae^{rt}$. Vi får $|y(0) - k| = |A|$ och

$$|y(t) - k| = |A|e^{rt} = |y(0) - k|e^{rt}$$

vilket visar att k är stabil om $r \leq 0$ (där vi kan ta $\delta = \varepsilon$) och om $r < 0$ är k dessutom asymptotiskt stabil. Om $r > 0$ är k labil eftersom $\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - k| = +\infty$ så snart $y(0) \neq k$.

3.3 Logistisk tillväxt

Ett intressantare exempel är en differentialekvation som används för att beskriva populationsdynamiken i en biotop, så kallad *logistisk tillväxt*.

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) \quad (3.2)$$

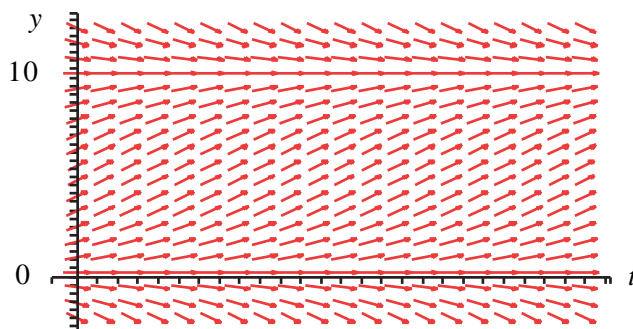
Funktionen y betecknar antalet individer i populationen och r och K är positiva konstanter som anger tillväxthastigheten hos populationen respektive biotopens kapacitet. Löser vi ekvationen i Maple med startvärdet $y(0) = y_0$ får vi

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

Vi ser att om $y_0 > 0$ så är

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = K$$

Riktningsfältet i figur 3.1 illustrerar också tydligt att $y = K$ är en asymptotiskt stabil jämviktspunkt medan $y = 0$ är labil



Figur 3.1: Riktningsfält till ekvation (3.2) med $K = 10$ och $r = 1$.

3.4 Stabilitetskriterier

För att undersöka det allmänna fallet antar vi att f är deriverbar i k . Med $y(t) = k + x(t)$ är $y' = x'$ och på grund av deriverbarheten får vi

$$f(y) = f(k+x) = f(k) + f'(k)x + \omega(x)x$$

där $\omega(x) \rightarrow 0$ då $x \rightarrow 0$. Vidare är $f(k) = 0$ och sätter vi $r = f'(k)$ får vi ekvationen

$$x' = rx + \omega(x)x$$

med $x(0) = y(0) - k \neq 0$.

Antag först att $r > 0$ och välj $\delta > 0$ så att $|\omega(x)| \leq r/2$ om $|x| \leq \delta$. Då gäller, så länge $|x(t)| \leq \delta$, att

$$\ln \left| \frac{x(t)}{x(0)} \right| = \int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)} d\tau = rt + \int_0^t \omega(x(\tau)) d\tau \geq \frac{rt}{2}$$

vilket ger olikheten

$$|x(0)| e^{rt/2} \leq |x(t)| \leq \delta$$

och alltså är $|x(t)| = |y(t) - k| \geq \delta/2 = \varepsilon_0$ bara vi väntar tillräckligt länge hur litet $|x(0)| = |y(0) - k|$ än är från början. Jämviktspunkten k är därmed labil.

Om å andra sidan $r = -q < 0$ har vi med ett δ så att $|x| \leq \delta$ medför $|\omega(x)| \leq q/2$ olikheterna

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{x(t)}{x(0)} \right| &= -qt + \int_0^t \omega(x(\tau)) d\tau \leq -\frac{qt}{2} \\ |y(t) - k| = |x(t)| &\leq |x(0)| e^{-qt/2} \leq |x(0)| = |y(0) - k| \end{aligned}$$

vilket visar att jämviktspunkten k är asymptotiskt stabil.

Vi sammanfattar i en sats.

Sats 17 Om $f(k) = 0$ och $f'(k) > 0$ är k en labil jämviktspunkt och om $f'(k) < 0$ är k en asymptotiskt stabil jämviktspunkt till $y' = f(y)$.

3.5 Tröskeleffekter

Om differentialekvationen (3.2) beskriver hur fiskpopulationen i en sjö varierar med tiden, kan man naturligtvis fråga sig hur denna påverkas av fiske. Antag att konstanten $h > 0$ betecknar antalet fiskar som skördas per tidsenhet. Då får vi ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K} \right) - h \quad (3.3)$$

Högerledet kan efter faktorisering skrivas

$$f(y) = h \left(\frac{y}{T} - 1 \right) \left(1 - \frac{y}{H} \right)$$

där konstanterna H och T ges av

$$H = \frac{K}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4h}{rK}} \right) \text{ och } T = \frac{K}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4h}{rK}} \right)$$

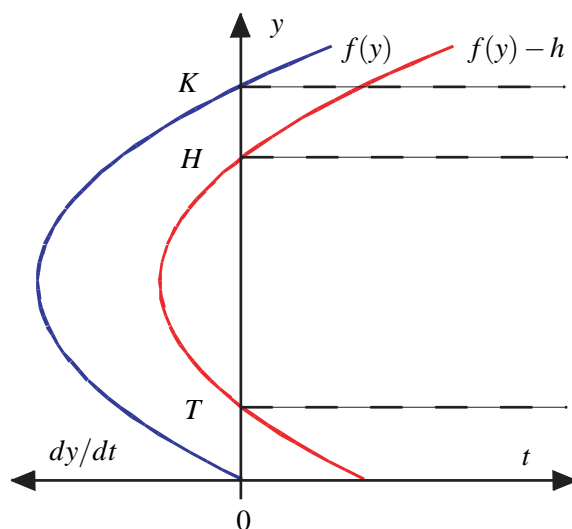
så att $H > T$.

Funktionen $f(y)$ har nollställena $y = T$ och $y = H$ och i dessa punkter är derivatorna

$$f'(T) = \frac{h}{TH}(H - T) > 0$$

$$f'(H) = -\frac{h}{TH}(H - T) < 0$$

Det följer av sats 17 att $y = T$ är labil medan $y = H$ är asymptotiskt stabil. Situationen illustreras i figur 3.2 nedan och modellen visar också att ett skördeuttag $h > rK/4$ medför att populationen dör ut.



Figur 3.2: Tröskelvärde vid skörd.

3.5.1 Ett gränsfall

Om $f(k) = f'(k) = 0$ kan man tyvärr inte dra några bestämda slutsatser vilket följande exempel visar.

Exempel 18 Ekvationen $y' = -y^2$ har jämviktspunkten $y = 0$ och lösningen

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)} = t \Leftrightarrow y(t) = \frac{y(0)}{1 + ty(0)} = \frac{1}{t - a}$$

om $y(0) = -1/a < 0$. Då gäller att $y(t) \rightarrow +\infty$ då $t \rightarrow a+$. Alltså labil.

Exempel 19 Ekvationen $y' = -y^3/2$ har också jämviktspunkten $y = 0$ och lösningen

$$\frac{1}{y^2(t)} - \frac{1}{y^2(0)} = t \Leftrightarrow y^2(t) = \frac{y^2(0)}{1 + ty^2(0)}$$

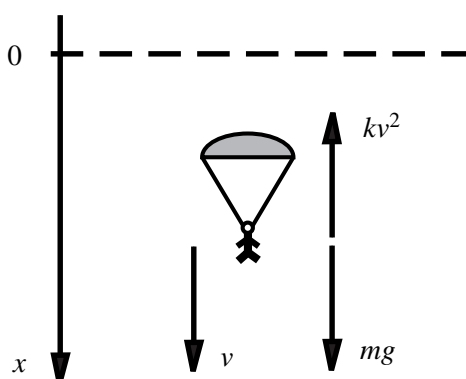
vilket medför att $|y(t)| \rightarrow 0$ då $t \rightarrow +\infty$. Alltså asymptotiskt stabil.

3.6 Hastighet och acceleration

Kombinationen av Newtons kraftekvation $F = ma$ och definitionen av acceleration $a = dv/dt$ och hastighet $v = ds/dt$ leder på ett naturligt sätt till differentialekvationer. I själva verket är det inom denna begreppsfråga som teorin har sina rötter.

3.6.1 Fritt fall med luftmotstånd

Exempel 20 En fallskärmschoppare (se fig. 3.3) som faller rakt ner under inverkan av gravitationen bromsas av luftmotståndet som antas proportionellt mot kvadraten på hastigheten. Beräkna hastigheten som funktion av fallsträckan.



Figur 3.3: Fritt fall med luftmotstånd.

Lösning

Newtons lag ger ekvationen

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

och om vi betraktar hastigheten v som en funktion av fallsträckan x blir $dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = vdv/dx$ vilket ger

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - kv^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{mg - kv^2}{mv}$$

Den stationära lösningen ges av $mg - kv^2 = 0$ och representerar den gränshastighet $v_0 = \sqrt{mg/k}$ som uppnås då tyngd och luftmotstånd är lika stora. Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{dv}{dx} = g \frac{1 - (v/v_0)^2}{v}$$

Lösningen får med $v(0) = 0$ följande utseende

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2gx}{v_0^2}\right)}$$

Genom att lösa ekvationen $v(x) = 99v_0/100$, ser vi att 99% av gränshastigheten uppnås redan efter fallsträckan

$$x_{99} = \frac{v_0^2}{2g} \ln\left(\frac{10000}{199}\right) \approx 1.8 \text{ m}$$

om $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ och $v_0 = 3 \text{ m/s}$.

Föreläsning 4

Lineära ekvationer av högre ordning

4.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(3.1) Introduction: Second-Order Linear Equations.

(3.2) General Solutions of Linear Equations.

(3.3) Homogeneous Equations with Constant Coefficients

4.2 Lineära ekvationer av andra ordningen

Lineära differentialekvationer av andra ordningen skrivs allmänt

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x) \quad (4.1)$$

där A , B , C och F är kontinuerliga funktioner av x i något öppet intervall $I =]a, b[$ som inte behöver vara begränsat. En lösning är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $y(x)$ som är definierad i I och satisfierar (4.1). Som begynnelsedata anger man värdena $y(x_0)$ och $y'(x_0)$ för något $x_0 \in I$.

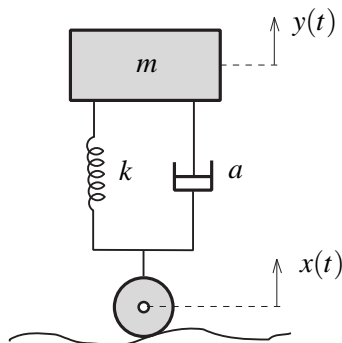
Normalt antar vi att $A(x) \neq 0$ för alla $x \in I$ och kan då skriva (4.1) på formen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4.2)$$

4.2.1 Exempel från mekanik och ellära

Hjulupphängning med stötdämpare

Som ett typexempel på en differentialekvationer av formen (4.2), betraktar vi en förenklad modell av hjulupphängningen i en bil eller landningstället i ett flygplan. Systemet beskrivs schematiskt av figur 4.1. Sambandet mellan accelerationen $y''(t)$



Figur 4.1: Landningsställ.

och de krafter som påverkar fordonet med massan m blir med Newtons kraftlag $ma = F$

$$my'' = k(x - y) + a(x' - y')$$

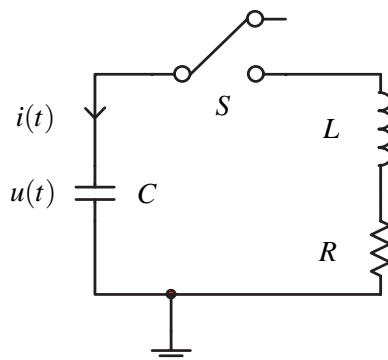
där vi antar att motkraften i oljestötdämparen är proportionell mot den relativa hastigheten $x' - y'$. Efter omskrivning får vi ekvationen

$$y'' + py' + qy = f \quad (4.3)$$

där $p = a/m$, $q = k/m$ och $f(t) = ax'(t)/m + kx(t)/m$.

Resonanskrets

Ett exempel från elektricitetsläran får vi om vi betraktar resonanskretsen i figur 4.2.



Figur 4.2: Resonanskrets.

Sambanden

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ och } -L \frac{di}{dt} - Ri - u = 0$$

ger en differentialekvation som beskriver hur spänningen u över kondensatorn varierar med tiden $t > 0$. Om man slår till strömbrytaren S vid $t = 0$ då kondensatorn är uppladdad med spänningen u_0 får vi följande begynnelsevärdesproblem om strömmen initialt är noll, $i(0) = Cu'(0) = 0$

$$\begin{cases} LCu'' + RCu' + u = 0 \\ u(0) = u_0, u'(0) = 0 \end{cases}$$

4.3 Existens och entydighet av lösningar

Hela teorin vilar tungt på följande sats om existens och entydighet för lösningarna till (4.2). Beviset för denna sats och andra liknande resultat får emellertid anstå till föreläsning 7.

Sats 21 För varje uppsättning begynnelsedata $y(x_0) = b_0$ och $y'(x_0) = b_1$, finns exakt en lösning, $y(x)$, till (4.2) som satisfierar dessa begynnelsedata.

4.4 Homogena ekvationer

Vi skall till att börja med studera allmänna egenskaper hos lösningarna till (4.2) då högerledet $f = 0$. Sådana ekvationer kallas *homogena*.

4.4.1 Lösningens struktur

Lineära differentialekvationer skriver vi i fortsättningen som $L(y) = f$ där vi uppfattar L som den lineära avbildningen

$$L(y) \stackrel{\text{def}}{=} y'' + p(x)y' + q(x)y : \mathcal{C}^2(I) \rightarrow \mathcal{C}(I) \quad (4.4)$$

Tyvärr finns ingen generell lösningsmetod av typen ”integrerande faktor” eller liknande för ekvationer av högre ordning. Vad vi däremot kan konstatera är att eftersom L är en lineär avbildning så gäller att

$$L(ay_1 + by_2) = aL(y_1) + bL(y_2)$$

för godtyckliga konstanter a och b . En omedelbar följd av detta är att lösningsmängden

$$N(L) = \{y \in \mathcal{C}^2(I) : L(y) = 0\}$$

till den *homogena* ekvationen $L(y) = 0$ bildar ett *lineärt rum*.

4.4.2 Nollrummet

Låt nu y_1 och y_2 vara två lösningar till ekvationen (4.2) så att $L(y_1) = f$ och $L(y_2) = f$. Då är på grund av lineariteten $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f - f = 0$ och alltså $y_1 - y_2 \in N(L)$. Det innebär att när vi känner *en* lösning y_1 till den *inhomogena* ekvationen (4.2) och har god kännedom om nollrummet $N(L)$ så har vi också god kännedom om alla andra lösningar genom att vi vet att $y = y_1 + z$, där $z \in N(L)$.

I det allmänna fallet, då koefficienterna $p(t)$ och $q(t)$ inte är konstanta, har man ingen karaktäristisk ekvation och det finns inte heller någon annan enkel metod att finna explicita lösningar till $L(y) = 0$. Däremot kan man konstruera en bas för $N(L)$ på ett mera abstrakt sätt. Vi formulerar resultatet i följande sats.

Sats 22 Låt y_1 och y_2 vara de två lösningarna till (4.2) med *begynnelsedata*

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, & y_1'(x_0) &= 0 \\ y_2(x_0) &= 0, & y_2'(x_0) &= 1 \end{aligned}$$

vars *existens och entydighet* garanteras av sats 21. Då kan varje lösning till $L(y) = 0$ skrivas som en *lineärkombination* $y = ay_1 + by_2$.

Bevis. Om $L(y) = 0$ och $z = y(x_0)y_1 + y'(x_0)y_2$ så följer av lineariteten att även $L(z) = 0$. Vidare är $z(x_0) = y(x_0)$ och $z'(x_0) = y'(x_0)$ och på grund av entydigheten är $y = z$ ■

Speciellt följer det av sats 22 att nollrummet är tvådimensionellt och $N(L) = [y_1, y_2]^1$.

¹ $[u, v, w, \dots]$ betecknar lineära höljet till vektorerna u, v, w, \dots

4.4.3 Reduktion av ordning

Någon enkel metod att lösa $L(y) = 0$, och därmed bestämma $N(L)$, när p och q beror av x finns inte. Om vi däremot på något sätt (t.ex. genial gissning) har funnit en lösning $\phi \in N(L)$ är vi i ett bättre läge. Idén är då att ansätta $y = u\phi$ och bestämma funktionen $u = u(x)$ så att $y = u\phi \in N(L)$.

För att undersöka vad som krävs av u deriverar vi och får

$$y' = u'\phi + u\phi', \quad y'' = u''\phi + 2u'\phi' + u\phi''$$

Då blir eftersom $L(\phi) = 0$,

$$L(y) = \phi u'' + (2\phi' + p\phi)u' + uL(\phi) = \phi u'' + (2\phi' + p\phi)u'$$

och om vi även skall ha $L(y) = 0$, måste u satisfiera differentialekvationen

$$u'' + \left(2\frac{\phi'}{\phi} + p\right)u' = 0$$

som är linjär av första ordningen i derivatan $v = u'$. En integrerande faktor är

$$\exp\left(\int \left(2\frac{\phi'}{\phi} + p\right) dx\right) = \phi^2 e^{\int p dx}$$

och vi får

$$v = u' = \phi^{-2} e^{-\int p dx}$$

Om vi tur, lyckas vi integrera en gång till och kan då bestämma u och därmed $y = u\phi$.

Exempel 23 Det är lätt att se att $y_1(x) = x$ löser ekvationen $x^2 y'' - xy' + y = 0$ då $x > 0$. Bestäm en bas för nollrummet.

Lösning:

Med $y = xu$ blir $y' = xu' + u$ och $y'' = xu'' + 2u'$ vilket ger

$$\begin{aligned} x^2 y'' - xy' + y &= x^2(xu'' + 2u') - x(xu' + u) + xu \\ &= x^2(xu'' + u') = x^2(xu')' = 0 \end{aligned}$$

och vi får

$$xu' = a \Leftrightarrow u = a \ln x + b \Rightarrow y = xu = ax \ln x + bx$$

Funktionerna $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x \ln x$ är linjärt oberoende och därmed en bas för det tvådimensionella nollrummet $N(L) = \{y : x^2 y'' - xy' + y = 0, x > 0\}$.

4.5 Allmänna lineära ekvationer

Allt som sagts för andra ordningens ekvationer, speciellt satsen 21 om lösningens existens och entydighet, kan direkt generaliseras till allmänna lineära ekvationer $L(y) = f$ av ordning n där

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \quad (4.5)$$

med kontinuerliga koefficienter och begynnelsedata

$$y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \quad (4.6)$$

Speciellt får vi att nollrummet $N(L) = \{y : L(y) = 0\}$ är ett n -dimensionellt linjärt rum.

4.6 Konstanta koefficienter

När koefficienterna p_1, \dots, p_n i (4.5) inte beror av x förenklas situationen avsevärt eftersom det alltid finns en lösning av formen $y = e^{rx}$ där r är ett (ev. komplext) nollställe till ekvationens *karaktäristiska polynom*

$$P(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n \quad (4.7)$$

eftersom vi har $L(e^{rx}) = P(r)e^{rx}$ om koefficienterna är konstanta. Förfarandet med reduktion av ordning kan sedan användas succesivt för att minska ekvationens ordning.

Exempel 24 Ange en bas för Lösningssrummet till $y'' + 4y' + 4y = 0$

Lösning:

Karaktäristiska polynomet $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$ har ett nollställe $r = -2$ och ansatsen $y = e^{-2x}u$ ger

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y &= e^{-2x}u'' = 0 \\ u &= ax + b \\ y &= axe^{-2x} + be^{-2x} \end{aligned}$$

och som basvektorer kan vi ta $y_1(x) = e^{-2x}$ och $y_2(x) = xe^{-2x}$. Mer komplicerade ekvationer hanteras bäst med funktionen `dsolve` i Maple.

Föreläsning 5

Inhomogena ekvationer

5.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(3.5) Nonhomogeneous Equations and Underdetermined Coefficients.

(3.6) Forced Oscillations and Resonance.

(3.7) Electrical Circuits.

5.2 Partikulärlösningar

Vi har sett att om $\{y_1, y_2\}$ är en bas för $N(L)$ kan *varje* lösning till $L(y) = f$ skrivas

$$y(x) = y_p(x) + ay_1(x) + by_2(x)$$

om vi bara kan hitta *en* lösning y_p till ekvationen.

Att konstruera partikulärlösningar till $L(y) = f$ innebär att studera den inversa avbildningen L^{-1} . Då $N(L) \neq \{0\}$ får vi dock nöja oss med en "partiell invers" varmed avses en linjär avbildning $M: \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}^2(I)$ sådan att $y = M(f)$ medför att $L(y) = f$ med begynnelsedata $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

Förfarandet kallas Lagranges metod och påminner starkt om reduktion av ordning från förra föreläsningen. Utgångspunkten är en bas $\{y_1, y_2\}$ för $N(L)$ och ansatsen

$$y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \quad (5.1)$$

där vi i stället för konstanter har multiplicerat med *funktioner* u och v . Vi skall sedan bestämma u och v så att y blir en lösning till $L(y) = f$. Deriverar vi y får vi

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) + u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x) \\ &= u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

där sista likheten förutsätter att vi valt u och v så att

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0$$

Nästa derivata blir i så fall

$$y''(x) = u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) + u(x)y_1''(x) + v(x)y_2''(x)$$

och därmed får vi, eftersom $L(y_1) = L(y_2) = 0$, att

$$L(y) = uL(y_1) + vL(y_2) + u'y_1' + v'y_2' = u'y_1' + v'y_2'$$

Således är (5.1) en partikulärlösning om vi väljer funktionerna u och v så att derivatorna u' och v' satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0 \\ u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (5.2)$$

Löser vi (5.2) får vi

$$u' = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} \text{ och } v' = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \quad (5.3)$$

Funktionen

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

kallas *Wronskis determinant*. För att u och v skall vara väldefinierade genom ekvationerna (5.3) måste $W(x) \neq 0$ vilket garanteras av följande sats.

Sats 25 Om två funktioner y_1 och y_2 i $N(L)$ är sådana att $W(x_0) = 0$ för något tal $x_0 \in I$ så är y_1 och y_2 lineärt beroende.

Bevis. Antag att $W(x_0) = 0$. Vi skall visa att det finns konstanter a och b som inte båda är noll så att $ay_1(x) + by_2(x) \equiv 0$ för alla $x \in I$. Vi vet att det finns konstanter a och b , som inte båda är noll, så att

$$\begin{cases} ay_1'(x_0) + by_2'(x_0) = 0 \\ ay_1(x_0) + by_2(x_0) = 0 \end{cases}$$

Då gäller, med $z(x) = ay_1(x) + by_2(x)$, att $z \in N(L)$ och $z(x_0) = z'(x_0) = 0$ vilket enligt sats 21 medför att $z(x) \equiv 0$ och således är y_1 och y_2 lineärt beroende ■

Ekvationerna (5.3) kan nu integreras och med

$$u(x) = - \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt \text{ och } v(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt$$

får vi en partikulärlösning som kan skrivas som en integral

$$\begin{aligned} y(x) &= -y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t) dt \end{aligned}$$

Den "inversa" avbildningen $y = M(f)$ ges alltså av *integraloperatoren*

$$y(x) = \int_{x_0}^x K(x,t) f(t) dt \quad (5.4)$$

Funktionen $K(x,t)$ kallas *kärna* och ges av uttrycket

$$K(x,t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} \quad (5.5)$$

Exempel 26 Funktionerna $\{\cos, \sin\}$ är standardbasen i 0 för $y'' + y = 0$ och

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

Vi får

$$K(x,t) = \cos t \sin x - \cos x \sin t = \sin(x-t)$$

vilket ger partikulärlösningen

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt \quad (5.6)$$

till $y'' + y = f$.

5.3 Karaktärisering av partikulärlösningen

Sätter vi $x = x_0$ i ekvation (5.4) får vi $y(x_0) = 0$. Deriverar vi sedan (5.4) med avseende på x får vi

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y_1'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \\ &\quad - y_1(x) \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} + y_2(x) \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \\ &= -y_1'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \end{aligned}$$

vilket visar att även $y'(x_0) = 0$. Partikulärlösningen som ges av (5.4) kan därmed enligt sats 21 entydigt karaktäriseras som den lösning till $L(y) = f$ som har begynnelsedata $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

Exempel 27 Skriv, som en integral, en partikulärlösning till ekvationen $y'' - y'/x + y/x^2 = f(x)$ från exempel 23, då f är kontinuerlig för $x > 0$.

Lösning:

Med baslösningarna $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x \ln x$ blir

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x$$

vilket enligt (5.5) ger kärnan

$$K(x, t) = \frac{tx \ln x - xt \ln t}{t} = x \ln \left(\frac{x}{t} \right)$$

och vi får, med $x, x_0 > 0$, enligt (5.4) lösningen

$$y(x) = \int_{x_0}^x x \ln \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt$$

där $y(x_0) = y'(x_0) = 0$.

5.4 Resonans

Betrakta lösningen (5.6) i exempel 26 med $f(x) = A \sin \omega x$. Då blir

$$y(x) = A \int_0^x \sin(x-t) \sin \omega t dt = \begin{cases} \frac{\omega A}{\omega^2 - 1} \sin x - \frac{A}{\omega^2 - 1} \sin \omega x, & \omega \neq 1 \\ \frac{A}{2} \sin x - \frac{A}{2} x \cos x, & \omega = 1 \end{cases}$$

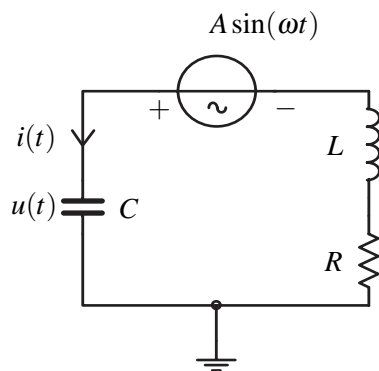
Vi ser att även om högerledet är en begränsad funktion med $|f(x)| \leq A$ så kan lösningens belopp anta stora värden då ω är nära 1 och om $\omega = 1$ är lösningen inte ens begränsad.

Fenomenet kallas *resonans* och inträffar då högerledet f innehåller periodiska komponenter med frekvenser som sammanfaller med eller ligger nära nollställena till det karakteristiska polynomet. Mera precist: Om L har konstanta koefficienter så att $L(e^{\alpha x}) = P(\alpha)e^{\alpha x}$ så är $y(x) = Ae^{i\omega x}/P(i\omega)$ en partikulärlösning till $L(y) = f$ med $f(x) = Ae^{i\omega x}$ och även om $|f(x)| = A$ är ett litet tal kan

$$|y(x)| = \frac{A}{|P(i\omega)|}$$

bli mycket stor om $P(i\omega)$ ligger nära noll.

Exempel 28 Betrakta resonanskretsen i figur 5.1, där strömbrytaren i figur 4.2 ersätts med ett växelspanningsaggregat, t.ex. en radioantenn, med spänningen $A \sin \omega t$ och möjlighet att variera frekvensen ω . Övriga beteckningar är samma som i figur 4.2. Bestäm maximala förstärkningen, $F(\omega)/A$, för resonanskretsen då ω varierar.



Figur 5.1: Resonanskrets.

Lösning:

Vi får analogt med exemplet i förra föreläsningen ekvationerna

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ och } A \sin \omega t - L \frac{di}{dt} - Ri - u = 0$$

vilket ger

$$LCu'' + RCu' + u = A \sin \omega t = \text{Im}(Ae^{i\omega t})$$

och en partikulärlösning får vi som

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Im} \left(\frac{Ae^{i\omega t}}{LC(i\omega)^2 + RCi\omega + 1} \right) \\ &= \frac{A}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \operatorname{Im} \left((1 - LC\omega^2 - RCi\omega) e^{i\omega t} \right) \\ &= A \frac{(1 - LC\omega^2) \sin \omega t - RC\omega \cos \omega t}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \\ &= \frac{A \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \end{aligned}$$

Således är

$$\begin{aligned} \frac{F(\omega)}{A} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} = G(RC\omega) \\ G(x) &= \frac{1}{\sqrt{(1 - Q^2x^2)^2 + x^2}} \end{aligned}$$

som är maximal för det värde på den dimensionslösa frekvensvariabeln $x = RC\omega \geq 0$ som minimerar funktionen $p(x) = (1 - Q^2x^2)^2 + x^2$ och där kretsens Q -värde definierats som kvoten mellan kretsens två tidskonstanter, \sqrt{LC} och RC , där den första bestämmer periodtiden för oscillationer i den odämpade ($R = 0$) resonanskretsen och den andra hur snabbt fria ($A = 0$) oscillationer dämpas på grund av energiförlusterna när $R > 0$.

$$Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$$

Funktionsundersökning ger att

$$\min_{x \geq 0} p(x) = \begin{cases} p(0) = 1, & Q \leq 1/\sqrt{2} \\ p(x_0) = \frac{4Q^2 - 1}{4Q^4}, & Q > 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

och

$$x_0 = RC\omega_0 = \frac{\sqrt{Q^2 - 1/2}}{Q^2}$$

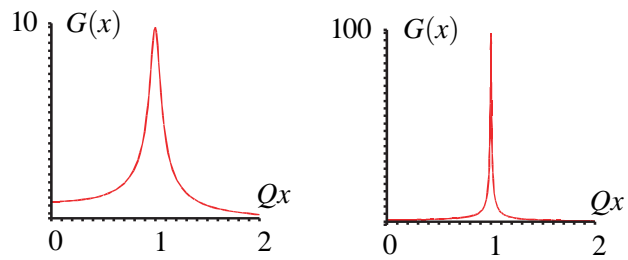
Vi får därmed att

$$\max_{\omega \geq 0} \left(\frac{F(\omega)}{A} \right) = \max_{x \geq 0} G(x) = \begin{cases} 1, & Q \leq 1/\sqrt{2} \\ \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}, & Q > 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

För att en resonanskrets skall fungera väl, t.ex. som avstämningkrets i en radiomottagare, bör den ha ett Q -värde på 100. Då kan med god approximation formlerna ovan förenklas till

$$x_0 = RC\omega_0 \approx \frac{1}{Q}, \quad \max_{x \geq 0} G(x) \approx Q$$

Figureerna nedan illustrerar hur förstärkningen $G(x) = F(\omega)/A$ hos resonanskretsen beror av frekvensen då $Q = 10$ respektive $Q = 100$.



Figur 5.2: Förstärkning med $Q = 10$ respektive $Q = 100$.

Föreläsning 6

System av differentialekvationer

6.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(4.1) First-Order Systems and Applications.

(4.2) The Method of Elimination.

6.2 System av första ordningen

I många sammanhang uppträder differentialekvationer naturligt som system där två eller flera funktioner skall bestämmas.

Exempel 29 I resonanskretsen i figur 5.1, föreläsning 5, beskrivs strömmen $i(t)$ och spänningen $u(t)$ av systemet

$$\begin{cases} di/dt = -Ri/L - u/L + e(t)/L \\ du/dt = i/C \end{cases}$$

där $e(t) = A \sin \omega t$.

Ett system av första ordningen med två ekvationer ser allmänt ut på följande sätt

$$\begin{cases} dy_1/dx = f(x, y_1, y_2) \\ dy_2/dx = g(x, y_1, y_2) \end{cases} \quad (6.1)$$

där funktionerna $y_1(x)$ och $y_2(x)$ skall bestämmas för alla x i något öppet intervall I . Ett ännu allmännare system med n ekvationer ser då ut så här

$$\begin{cases} dy_1/dx = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ dy_2/dx = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ dy_n/dx = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (6.2)$$

Både (6.1) och (6.2) kan emellertid skrivas mycket kompaktare som

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.3)$$

om vi betraktar y och f som en vektorvärda funktioner: $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ så att $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ och $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ i det n -dimensionella fallet. Med derivatan $dy/dx = y'$ förstår vi då vektorn $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ där alla komponenterna deriverats med avseende på x .

6.3 Ekvationer av högre ordning som system

System av formen (6.2) eller (6.3) är i själva verket mycket allmänna och innehåller som specialfall alla differentialekvationer av ordning n som kan skrivas på formen

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Detta inses genom att betrakta derivatorna upp till ordning $n-1$ som komponenter i en n -dimensionell vektor $Y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Vi får då $dY/dx = (y', y'', \dots, y^{(n)})$ och därmed

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ f(x, Y) \end{bmatrix} = F(x, Y)$$

Exempel 30 Stötdämparen i figur 4.1, föreläsning 5, beskrivs av ekvationen $y'' + py' + qy = f(t)$, vilken som system med $y_1 = y$ och $y_2 = y'$ kan skrivas

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_2 \\ f(t) - qy_1 - py_2 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \end{aligned}$$

där den sista omskrivningen av ekvationen med konstanta matriser A och B som $y' = Ay + Bf$ är en följd av att ekvationen är linjär och har konstanta koefficienter.

Övning 31 Hur ser matriserna A och B ut i exemplet med resonanskretsen?

6.4 Begynnelsevärden och entydighet

Precis som i det skalära fallet krävs ytterligare villkor på den vektorvärda lösningen $y(x)$ till systemet (6.3) om funktionen skall vara entydigt bestämd. Normalt ger man då begynnelsevillkor av formen $y(x_0) = b$, där $b \in \mathbb{R}^n$ är en given vektor och $x_0 \in I$. Vi skall i nästa föreläsning precisera villkor som garanterar att begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = b \quad (6.4)$$

har entydigt bestämd lösning.

6.5 Räkning med vektorvärda funktioner

Som vi redan sett definieras derivatan u' av den vektorvärda funktionen $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genom att man deriverar komponentfunktionerna. Helt analogt definieras integralen

$$\int_a^b u(x) dx = \left(\int_a^b u_1(x) dx, \int_a^b u_2(x) dx, \dots, \int_a^b u_n(x) dx \right)$$

som den vektor man får genom att integrera komponenterna.

6.5.1 Räknerregler

Följande räknerregler gäller och är heller inte svåra att visa.

1. $(Au)' = Au'$ och $\int_a^b Au(x) dx = A \left(\int_a^b u(x) dx \right)$ om A är en konstant $n \times n$ -matris.
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ och $\int_a^b c \cdot u(x) dx = c \cdot \left(\int_a^b u(x) dx \right)$ om c är en konstant vektor och $u \cdot v$ betecknar den vanliga skalärprodukten i \mathbb{R}^n .
3. Integralkalkylens huvudsatser: $\frac{d}{dx} \int_a^x u(t) dt = u(x)$ och $\int_a^b u'(x) dx = u(b) - u(a)$.
4. $\left\| \int_a^b u(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|u(x)\| dx$, där längden av u definieras av $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
5. Vi har även olikheten $\|Au\| \leq \|A\| \|u\|$ där matrisnormen definieras som $\|A\| = \max_{u \neq 0} \|Au\| / \|u\|$.

Bevis. Reglerna 1, 2 och 6.3 följer direkt ur definitionen och lämnas som övning. För att visa 4 utnyttjar vi Cauchys olikhet, $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$, på följande sätt: Låt $c = \int_a^b u(x) dx$. Påståendet är trivalt om $c = 0$ och om inte, så gäller enligt 6.4 och Cauchy att

$$\begin{aligned} \|c\|^2 &= c \cdot c = c \cdot \int_a^b u(x) dx \stackrel{\text{Enligt 2}}{=} \int_a^b c \cdot u(x) dx \\ &\leq \int_a^b |c \cdot u(x)| dx \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} \int_a^b \|c\| \|u(x)\| dx = \|c\| \int_a^b \|u(x)\| dx \end{aligned}$$

vilket efter division med $\|c\| > 0$ ger den sökta olikheten. ■

6.6 Differentialekvationen som integralekvation

I många komplicerade situationer, såväl teoretiska som praktiska, är det enklare att arbeta med integraler än med derivator. Detta beror på att man ofta måste göra uppskattningar av de ingående storheterna och då är räknerregeln 4 ovan, som saknar motsvarighet för derivator, mycket användbar.

Sats 32 Om $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en kontinuerlig funktion gäller att $y(x)$ är en kontinuerligt deriverbar lösning till (6.4) om och endast om $y(x)$ är en kontinuerlig lösning till integralekvationen

$$y(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x, x_0 \in I \quad (6.5)$$

Bevis. Om $y \in \mathcal{C}^1(I)$ satisfierar (6.4) får vi efter integration av båda leden

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

och om $y \in \mathcal{C}(I)$ löser (6.5) är $t \mapsto f(t, y(t))$ en kontinuerlig funktion och integralen $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, och därmed $y(x)$, kontinuerligt deriverbar med $y'(x) = f(x, y(x))$ för $x \in I$. Vidare är $y(x_0) = b$. ■

6.6.1 Grönwalls lemma

Som en illustration till integralens företräden framför derivatan visar vi en olikhet som ofta kommer till användning i fortsättningen.

Sats 33 Om u är en kontinuerligt deriverbar reellvärd funktion för $x \in I$ och där satisfierar olikheten

$$u'(x) + au(x) \leq f(x) \quad (6.6)$$

med någon konstant a , så gäller också att

$$u(x) \leq e^{-a(x-x_0)}u(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-a(x-t)}f(t) dt \quad (6.7)$$

för $x \geq x_0$.

Bevis. Multiplikation med $e^{ax} > 0$ ger olikheten

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}u(x)) = e^{ax}(u'(x) + au(x)) \leq e^{ax}f(x)$$

och efter integration får vi, om $x > x_0$, att

$$\begin{aligned} e^{ax}u(x) - e^{ax_0}u(x_0) &\leq \int_{x_0}^x e^{at}f(t) dt \\ u(x) &\leq e^{-a(x-x_0)}u(x_0) + \int_{x_0}^x e^{-a(x-t)}f(t) dt \end{aligned}$$

■

6.7 Lipschitzkontinuitet

Om $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ med begränsad derivata så följer av medelvärdessatsen att $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$ för något tal ξ mellan x och y vilket ger olikheten

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| \quad (6.8)$$

för $x, y \in I$ om $L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$. Funktioner som uppfyller (6.8) kallas *lipschitzkontinuerliga*.

För vektorvärda funktioner av flera variabler generaliseras medelvärdessatsen till en olikhet.

Sats 34 Om $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är kontinuerligt deriverbar i en öppen konvex mängd D gäller olikheten

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f'((1-\theta)x + \theta y)\| \|y - x\|$$

för något $\theta \in]0, 1[$ och $x, y \in D$. Uttrycket $\|f'(x)\|$ betecknar matrisnormen enligt (5).

Bevis. Låt $c \in \mathbb{R}^n$ och sätt $\varphi(t) = c \cdot f((1-t)x + ty)$. Då är $\varphi'(t) = c \cdot f'((1-t)x + ty)(y-x)$ och (6.8) medför att $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ för något $\theta \in]0, 1[$. Cauchys olikhet och (5) ger sedan med $c = f(y) - f(x)$ att

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|^2 &= c \cdot (f(y) - f(x)) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \\ &= c \cdot f'((1-\theta)x + \theta y)(y-x) \leq \|c\| \|f'((1-\theta)x + \theta y)(y-x)\| \\ &\leq \|c\| \|f'((1-\theta)x + \theta y)\| \|y-x\| \end{aligned}$$

vilket om $c \neq 0$ ger den sökta olikheten efter division med $\|c\| = \|f(y) - f(x)\|$. I fallet $c = 0$ är satsen trivial. ■

Som en omedelbar följd av sats 34 får vi följande resultat.

Följdsats 35 En funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ som är kontinuerligt deriverbar i en öppen konvex mängd D med begränsad derivata är lipschitzkontinuerlig så att

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L \|y - x\|$$

med lipschitzkonstant: $L = \sup_{x \in D} \|f'(x)\|$.

Föreläsning 7

Existens och entydighet

7.1 Aktuella avsnitt i läroboken

Appendix Existence and Uniqueness of Solutions.

Som vi sett i flera exempel kan man ibland lösa en differentialekvation $y' = f(x, y)$ och erhålla y som ett uttryck i kända funktioner. Genom att välja lämpligt värde på en integrationskonstant får man ofta också en unik lösning $y(x)$ som uppfyller givna begynnelsedata $y(x_0) = b$.

Denna procedur fungerar dock endast i undantagsfall. Man är i regel hänvisad till numeriska metoder för att lösa differentialekvationer. Detta är egentligen inget nytt; även en explicit lösning, som exempelvis $y = e^x$ till ekvationen $y' = y$, måste man beräkna numeriskt när man vill se en graf eller ha en tabell.

Innan man använder eller konstruerar en numerisk lösningsmetod måste man emellertid veta att det *finns* en lösning och helst också att den är *unik*. Det är den typen av resultat som denna föreläsning handlar om.

7.2 En integralekvation

I föreläsning 6 visades att om $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en kontinuerlig funktion så är $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ en kontinuerligt deriverbar lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = b \quad (7.1)$$

om och endast om y är en *kontinuerlig* lösning till integralekvationen

$$y(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (7.2)$$

I stället för att lösa begynnelsevärdesproblemet (7.1), kan vi alltså lösa integralekvationen (7.2) och det är faktiskt enklare.

7.3 Iteration

Den metod vi skall använda är att börja med en enkel gissning som vi sedan successivt förbättrar. Ett första – och naturligtvis mycket naivt – försök att lösa (7.2) är att prova med funktionen $y_0(x) = \text{konstant} = b$ som i alla fall satisfierar begynnelsedata. Insatt i (7.2) ger detta

$$y_1(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, b) dt$$

vilket förstås sällan är lika med y_0 om $x \neq x_0$. Vi ger emellertid inte upp, utan sätter in den nya funktionen $y_1(x)$, och får i nästa varv

$$y_2(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

Upprepas detta blir resultatet en *funktionsföljd* $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ som, förhoppningsvis, allt bättre och bättre approximerar en lösning. Denna erhålles i så fall som gränsvärdet $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Låt oss se hur detta fungerar i ett välkänt fall där vi redan vet hur lösningen ser ut.

Exempel 36 Lös ekvationen $y' = ay$ med $y(0) = 1$.

Lösning:

Om vi startar med $y_0(x) = 1$ får vi succesivt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x a dt = 1 + ax \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x a(1+at) dt = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x a \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} \right) dt = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{2 \cdot 3} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(ax)^n}{n!} \end{aligned}$$

och vi ser att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$$

vilket stämmer med vad vi hade anledning att vänta oss.

För att komma vidare med den allmänna integralekvationen (7.2) måste vi precisera förutsättningarna om f . Det räcker därvid inte att förutsätta att f är kontinuerlig om vi vill ha en unik lösning.

Sats 37 Om $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är kontinuerlig och dessutom lipschitzkontinuerlig i den andra variabeln, så att det för någon konstant L gäller att

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

för alla $x \in I$ och $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, så har integralekvationen (7.2) en kontinuerlig lösning $y(x)$ för varje $b \in \mathbb{R}^n$ sådan att $f(x, b)$ är begränsad på I och $x_0 \in I$.

Bevis. Vi måste visa att den rekursivt definierade funktionsföljden $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ där $y_0(x) = b$ och

$$y_{n+1}(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

konvergerar mot en kontinuerlig gränsv funktion $y(x)$ och dessutom att följande kalkyl är tillåten

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(x) = b + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \\ &= b + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_n(t)) dt \\ &= b + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \end{aligned}$$

Vi konstaterar att

$$y_n(x) = b + \sum_{k=1}^n [y_k(x) - y_{k-1}(x)]$$

och dessutom att för $k = 2, 3, \dots$ gäller

$$y_k(x) - y_{k-1}(x) = \int_{x_0}^x [f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))] dt$$

vilket ger uppskattningen

$$\begin{aligned} \|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| &\leq \int_{x_0}^x \|f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))\| dt \\ &\leq L \int_{x_0}^x \|y_{k-1}(t) - y_{k-2}(t)\| dt \end{aligned}$$

För $k = 1$ och $x > x_0$ gäller dessutom

$$\|y_1(x) - b\| \leq \left\| \int_{x_0}^x f(t, b) dt \right\| \leq \int_{x_0}^x \|f(t, b)\| dt \leq M(x - x_0)$$

där $M = \sup_{x \in I} \|f(x, b)\|$. Vi får nu succesivt

$$\begin{aligned} \|y_2(x) - y_1(x)\| &\leq L \int_{x_0}^x \|y_1(t) - b\| dt \leq ML \int_{x_0}^x (t - x_0) dt = ML \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \|y_3(x) - y_2(x)\| &\leq L \int_{x_0}^x \|y_2(t) - y_1(t)\| dt \leq ML^2 \int_{x_0}^x \frac{(t - x_0)^2}{2} dt = ML^2 \frac{(x - x_0)^3}{2 \cdot 3} \\ \|y_4(x) - y_3(x)\| &\leq L \int_{x_0}^x \|y_3(t) - y_2(t)\| dt \leq ML^3 \int_{x_0}^x \frac{(t - x_0)^3}{2 \cdot 3} dt = ML^3 \frac{(x - x_0)^4}{4!} \end{aligned}$$

⋮

$$\|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| \leq ML^{k-1} \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

i fallet då $x < x_0$ ger motsvarande kalkyl i stället att

$$\|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| \leq ML^{k-1} \frac{(x_0 - x)^k}{k!}$$

och vi får därmed om $|I|$ betecknar längden av intervallet I att

$$\sup_{x \in I} \|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| \leq ML^{k-1} \frac{|I|^k}{k!}$$

Eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{|I|^k}{k!} = \frac{M}{L} \left(e^{L|I|} - 1 \right)$$

följer det av Weierstrass majorantsats att funktionsserien

$$y(x) = b + \sum_{k=1}^{\infty} [y_k(x) - y_{k-1}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

konvergerar absolut och likformigt på I och att summan $y(x)$ är kontinuerlig eftersom alla funktionerna y_n i följd är det. Dessutom konvergerar $f(t, y_n(t))$ likformigt mot $f(t, y(t))$ då $n \rightarrow \infty$ eftersom

$$\sup_{x \in I} \|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))\| \leq L \sup_{x \in I} \|y_n(t) - y(t)\| \rightarrow 0$$

och då följer det att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_n(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

Därmed är satsen bevisad. ■

7.4 Entydighet och stabilitet

När vi nu har visat att ekvation (7.1) och (7.2) alltid har lösning om f är lipschitz-kontinuerlig, återstår frågan om det finns flera lösningar. Besläktad med entydigheten är också problemet med stabiliteten: Vad som händer med lösningen vid små ändringar i f och b . Svaret finns i nästa sats.

Sats 38 Om $y_1(x)$ respektive $y_2(x)$ är lösningar till begynnelsevärdesproblemen

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y), & y(x_0) &= b_1 \\ y' &= f_2(x, y), & y(x_0) &= b_2 \end{aligned}$$

där f_1 och f_2 uppfyller förutsättningarna i sats 37 med lipschitzkonstanter L_1 respektive L_2 så gäller för $x \geq x_0$ att

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| \leq \|b_1 - b_2\| e^{k(x-x_0)} + \frac{\mu}{k} \left(e^{k(x-x_0)} - 1 \right)$$

där $k = \min(L_1, L_2)$ och $\mu = \max_{x,y} \|f_1(x, y) - f_2(x, y)\|$.

Följdsats 39 *Speciellt följer av sats 38 att lösningen till ekvation (7.1) är unik, eftersom det för två lösningar $y_1(x)$ och $y_2(x)$ med samma högerled, $f = f_1 = f_2$ så att $\mu = 0$, och samma begynnelsedata, $b = b_1 = b_2$ så att $\|b_1 - b_2\| = 0$, måste gälla att $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$.*

Så till beviset.

Bevis. Sambanden

$$y_1(x) = b_1 + \int_{x_0}^x f_1(t, y_1(t)) dt$$

$$y_2(x) = b_2 + \int_{x_0}^x f_2(t, y_2(t)) dt$$

ger med triangelolikheten och någon av omskrivningarna

$$\begin{aligned} f_1(t, y_1) - f_2(t, y_2) &= [f_1(t, y_1) - f_1(t, y_2)] + [f_1(t, y_2) - f_2(t, y_2)] \\ &= [f_1(t, y_1) - f_2(t, y_1)] + [f_2(t, y_1) - f_2(t, y_2)] \end{aligned}$$

uppskattningen

$$\|f_1(t, y_1) - f_2(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\| + \mu$$

och därmed är

$$\begin{aligned} \|y_1(x) - y_2(x)\| &\leq \|b_1 - b_2\| + \int_{x_0}^x \|f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t))\| dt \\ &\leq \|b_1 - b_2\| + \int_{x_0}^x (k \|y_1(t) - y_2(t)\| + \mu) dt \\ &\leq \|b_1 - b_2\| + k \int_{x_0}^x \|y_1(t) - y_2(t)\| dt + \mu(x - x_0) \end{aligned}$$

Sätt $u(x) = \int_{x_0}^x \|y_1(t) - y_2(t)\| dt$. Då är $u(x_0) = 0$ och $u'(x) = \|y_1(x) - y_2(x)\|$ vilket ger olikheten

$$u'(x) \leq ku(x) + \|b_1 - b_2\| + \mu(x - x_0) \quad (7.3)$$

Grönwalls lemma (33) ger då för $x > x_0$ att

$$\begin{aligned} u(x) &\leq e^{k(x-x_0)} u(x_0) + \int_{x_0}^x e^{k(x-t)} (\|b_1 - b_2\| + \mu(t - x_0)) dt \\ &= \frac{1}{k} \|b_1 - b_2\| (e^{k(x-x_0)} - 1) + \frac{\mu}{k^2} (e^{k(x-x_0)} - 1) - \frac{\mu}{k} (x - x_0) \end{aligned} \quad (7.4)$$

kombinerar vi (7.3) och (7.4) får vi slutligen

$$\begin{aligned} \|y_1(x) - y_2(x)\| &= u'(x) \leq ku(x) + \|b_1 - b_2\| + \mu(x - x_0) \\ &\leq \|b_1 - b_2\| e^{k(x-x_0)} + \frac{\mu}{k} (e^{k(x-x_0)} - 1) \end{aligned}$$

■

Det kan mycket väl finnas lösningar till ekvation (7.1) även om f inte är lipschitz-kontinuerlig. Däremot kan vi i sådana fall inte garantera att lösningen är entydig. Jämför med exempel 40.

Exempel 40 *Begynnelsevärdesproblemet $y' = \sqrt[3]{y}$ med $y(0) = 0$ har tre lösningar:*

1. $y(x) = 0$
2. $y(x) = \begin{cases} \sqrt{(2x/3)^3} & \text{för } x \geq 0, \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$
3. $y(x) = \begin{cases} -\sqrt{(2x/3)^3} & \text{för } x \geq 0, \\ 0 & \text{för } x < 0. \end{cases}$

Ett resultat av det faktum att funktionen $\sqrt[3]{y}$ inte är lipschitzkontinuerlig i en omgivning av $y = 0$ eftersom det gäller att

$$\frac{|\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2}|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{y_1 y_2} + \sqrt[3]{y_2^2}} \geq \frac{2/3}{\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{y_2^2}}$$

7.5 Lokala resultat

Vi har hittills förutsatt att funktionen $f(x, y)$ uppfyller lipschitzvillkoret

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \quad (7.5)$$

med en konstant L som gäller för $x \in I$ och *godtyckliga* vektorer $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Det är inte alltid möjligt att uppnå detta utan vi får acceptera inskränkningar även i y -led så att (7.5) bara gäller om $y_1, y_2 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Det kan då hända att graferna till funktionerna $y_n(x)$ i iterationen inte ligger kvar i "rektangeln" $\{(x, y) : x \in I, y \in \Omega\}$ och vi kan då inte garantera att lösningen är definierad för alla x i intervallet I . I sådana fall får vi nöja oss med att konstatera att det i något delintervall $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$, med $\delta > 0$, finns en unik lösning till $y' = f(x, y)$.

Föreläsning 8

Lineära system av differentialekvationer

8.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(5.1) Matrices and Linear Systems.

(5.2) The Eigenvalue Method for Homogeneous Systems.

(5.3) Second-Order Systems and Mechanical Applications.

8.2 Lineära system

Ett system $y' = f(x, y)$ av differentialekvationer är lineärt om högerledet har formen

$$f(x, y) = P(x)y + F(x)$$

där $P(x)$ är en kvadratisk matris vars koefficienter $p_{j,k}(x)$ är kontinuerliga och begränsade funktioner på det öppna intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ och $F(x)$ en vektorvärd funktion på I som också är kontinuerlig och begränsad. Då är $f(x, b) = P(x)b + F(x)$ kontinuerlig och begränsad för varje fix vektor $b \in \mathbb{R}^n$ och dessutom är

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| = \|P(x)(y_1 - y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$$

om $L = \sup_{x \in I} \|P(x)\|$. Således är förutsättningarna i sats 37 uppfyllda och det följer att begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + F(x), \quad y(x_0) = b \quad (8.1)$$

har en unik lösning $y(x)$ för varje vektor $b \in \mathbb{R}^n$ och $x_0 \in I$. Speciellt följer det att begynnelsevärdesproblemet för lineära ekvationer av ordning n som definieras av (4.5) och (4.6) i föreläsning 4 är entydigt lösbart då det kan skrivas som ett första ordningens system av formen (8.1) med lösningsvektorn $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ och

$$P(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \cdots & -p_1(x) \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}$$

8.3 Homogena system

Om $F = 0$ får vi det homogena systemet

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \quad (8.2)$$

Låt nu vektorerna e_1, \dots, e_n vara en bas för \mathbb{R}^n och funktionerna $y_1(x), \dots, y_n(x)$ vara lösningarna till begynnelsevärdesproblemen

$$\frac{dy_j}{dx} = P(x)y_j, \quad y_j(x_0) = e_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (8.3)$$

då bildar funktionerna $y_1(x), \dots, y_n(x)$ en bas för lösningsrummet till den homogena ekvationen (8.2). Eller annorlunda uttryckt

Sats 41 Varje lösning till (8.2) kan skrivas som en lineärkombination

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

av baslösningarna (8.3) med konstanter c_1, \dots, c_n .

Bevis. Låt $y(x)$ vara en lösning till (8.2) och $x_0 \in I$. Då finns entydigt bestämda konstanter c_1, \dots, c_n så att

$$y(x_0) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$$

och om vi definierar

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

är $z(x)$ en lösning till (8.2) med $z(x_0) = y(x_0)$ vilket enligt följsatsen 39 medför att $y(x) \equiv z(x)$ för alla $x \in I$. ■

8.3.1 Fundamentalmatris

Låt $y_1(x), \dots, y_n(x)$ vara baslösningarna (8.3) som hör till standardbasen i \mathbb{R}^n så att

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 = (0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, \dots, 1) \end{cases} \quad (8.4)$$

och definiera matrisen $Y(x, x_0)$ med $y_1(x), \dots, y_n(x)$ som kolonnvektorer i Y

$$Y(x, x_0) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Då är $Y(x_0, x_0) = E$ = enhetsmatrisen, och lösningen till det homogena begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y, \quad y(x_0) = b \quad (8.6)$$

kan skrivas som en matrisprodukt: $y(x) = Y(x, x_0)b$. Matrisen $Y(x, x_0)$, eller bara $Y(x)$ när x_0 är underförstådd, kallas *fundamentalmatrisen* till systemet (8.2).

Av entydighetssatsen 39 får vi följande räkneregler för fundamentalmatrisen

1. Deriveringsregeln: $\partial Y(x, x_0) / \partial x = P(x)Y(x, x_0)$
2. $Y(x_2, x_0) = Y(x_2, x_1)Y(x_1, x_0)$, där $x_0, x_1, x_2 \in I$
3. Speciellt: $E = Y(x_0, x_0) = Y(x_0, x_1)Y(x_1, x_0) \Rightarrow Y(x_0, x_1) = Y(x_1, x_0)^{-1}$

Beviset lämnas som övning.

8.4 Inhomogena system

På grund av lineariteten kan *varje* lösning till (8.1) skrivas som summan $y_0 + y_p$ av en partikulärlösning y_p till (8.1) och en lösning y_0 till den homogena ekvationen (8.2). Väljer vi partikulärlösningen så att $y_p(x_0) = 0$ kan lösningen till begynnelsevärdesproblemet (8.1) skrivas

$$y(x) = Y(x, x_0)b + y_p(x)$$

För att konstruera $y_p(x)$ kan vi använda samma teknik med variation av parametrar som i föreläsning 5. Låt därför $u(x)$ vara en vektorvärd funktion och sätt $y(x) = Y(x, x_0)u(x)$. Derivering med avseende på x ger

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} Y(x, x_0)u(x) + Y(x, x_0)\frac{du}{dx} = P(x)y(x) + Y(x, x_0)\frac{du}{dx}$$

eftersom det för varje vektor b med $y(x) = Y(x, x_0)b$, gäller att

$$\frac{\partial}{\partial x} Y(x, x_0)b = \frac{dy}{dx} = P(x)y(x)$$

Om vi därför väljer u så att $u(x_0) = 0$ och

$$Y(x, x_0)\frac{du}{dx} = F(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = Y(x, x_0)^{-1}F(x) = Y(x_0, x)F(x)$$

får vi den sökta partikulärlösningen som alltså kan skrivas som integralen

$$y_p(x) = Y(x, x_0)u(x) = Y(x, x_0)\int_{x_0}^x Y(x_0, t)F(t)dt \quad (8.7)$$

$$= \int_{x_0}^x Y(x, x_0)Y(x_0, t)F(t)dt = \int_{x_0}^x Y(x, t)F(t)dt \quad (8.8)$$

Allmänna lösningen till (8.1) blir därmed

$$y(x) = Y(x, x_0)b + \int_{x_0}^x Y(x, t)F(t)dt \quad (8.9)$$

vilket också förklarar varför matrisen Y kallas fundamental.

8.5 Konstanta koefficienter

Att bestämma baslösningar och fundamentalmatrisen i en enkel form låter sig i allmänhet bara göras om matrisen P inte beror av x . Den homogena ekvationen $y' = Py$ blir då *autonom*, det vill säga högerledet beror inte explicit på x . En konsekvens av detta är att lösningarna är *translationsinvarianta*, vilket betyder att $z(x) = y(x - x_0)$ är en lösning om $y(x)$ är det.

8.5.1 Exponentialmatrisen

Speciellt får vi att fundamentalmatrisen $Y(x, x_0)$ endast beror av skillnaden $x - x_0$ så att

Sats 42 *Det gäller att $Y(x - x_0, 0) = Y(x, x_0)$.*

Bevis. Ty om $y_1(x) = Y(x, x_0)b$ och $z(x) = Y(x, 0)b$ är båda funktionerna lösningar till $y' = Py$. Då är också $y_2(x) = z(x - x_0) = Y(x - x_0, 0)b$ en lösning och eftersom $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b$ är $y_1 = y_2$ vilket medför påståendet eftersom b är godtycklig. ■

Med $Y(x) = Y(x, 0)$ blir räknereglerna 1–3 i stället

1. Deriveringsregeln: $Y'(x) = PY(x)$.
2. Exponentiallagen: $Y(x_2 + x_1) = Y(x_2)Y(x_1)$.
3. Speciellt är: $Y(0) = E$ och $Y(-x) = Y(x)^{-1}$.

Lösningformeln (8.9) blir

$$y(x) = Y(x - x_0)b + \int_{x_0}^x Y(x - t)F(t) dt$$

På grund av räknereglerna 1–3 ovan skriver man Y som en exponentialfunktion.

$$Y(x) = \exp(xP) = e^{xP}$$

När man arbetar med ekvationer med konstanta koefficienter underlättas kalkylen ofta om man räknar komplext eftersom det man då täcker in både exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner. Vi antar därför att vektorer ligger i \mathbb{C}^n i stället för \mathbb{R}^n . De allmänna räkningarna ser likadana ut men i exempel med siffror får man naturligtvis ta hänsyn till att talen är komplexa.

8.5.2 Diagonaliserbar P -matris

Som vanligt då ekvationerna har konstanta koefficienter finns det lösningar i form av exponentialfunktioner. För att finna dessa sätter vi $y(x) = e^{\lambda x}b$ vilket ger $y' - Py = (\lambda b - Pb)e^{\lambda x} = 0$ om $Pb = \lambda b$. Vi ser att om det finns en bas av egenvektorer v_1, \dots, v_n till matrisen P i systemet $y' = Py$ så att $Pv_j = \lambda_j v_j$ för $j = 1, \dots, n$ blir motsvarande baslösningar $y_j(x) = e^{\lambda_j x}v_j$ och fundamentalmatrisen i en bas av egenvektorer blir därmed en diagonalmatris

$$D(x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

60FÖRELÄSNING 8. LINEÄRA SYSTEM AV DIFFERENTIALEKVATIONER

där egenvärdena λ_j kan vara komplexa tal. Om matrisen T förmedlar basbytet $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)T$ till standardbasen (8.4) blir

$$e^{xP} = Y(x) = TD(x)T^{-1}$$

eftersom $\underline{e}b = \underline{y}c = \underline{e}Tc$ och $\underline{e}y(x) = \underline{y}D(x)c = \underline{e}TD(x)T^{-1}b = \underline{e}Y(x)b$ för godtyckligt b .

Exempel 43 Lös $y' = Py$ med $y(0) = b$ om

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Karaktäristiska polynomet $\det(P - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 17$ har nollställena $\lambda_1 = 1 + 4i$ och $\lambda_2 = 1 - 4i$ och motsvarande egenvektorer $v_1 = (-i, 1)$ och $v_2 = (i, 1)$ vilket ger basbytet

$$\underline{v} = \underline{e} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{e}T$$

och således fundamentalmatrisen

$$\begin{aligned} e^{xP} &= \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{(1-4i)x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{e^x}{2} \begin{bmatrix} e^{4ix} + e^{-4ix} & -ie^{4ix} + ie^{-4ix} \\ ie^{4ix} - ie^{-4ix} & e^{4ix} + e^{-4ix} \end{bmatrix} \\ &= e^x \begin{bmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -\sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Med $b = (b_1, b_2)$ blir därför

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{xP}b = e^x \begin{bmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -\sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 e^x \cos 4x + b_2 e^x \sin 4x \\ -b_1 e^x \sin 4x + b_2 e^x \cos 4x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8.5.3 Defekt P -matris

Tyvärr finns inte alltid en bas av egenvektorer till en given matris. Matrisen sägs då vara defekt. För att detta skall inträffa måste karaktäristiska polynomet $\det(\lambda E - P)$ ha multipla nollställen. Ett enkelt exempel får illustrera situationen medan det allmänna fallet både teoretiskt och räknemässigt bäst hanteras med laplacetransformen som är ämne för nästa föreläsning.

Exempel 44 Lös $y' = Py$ med $y(0) = b$ om

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Vi har $\det(\lambda E - P) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$ och den enda egenvektorn är $v_1 = (1, 0)$ vilket innebär att $y_1(x) = e^x v_1$ är en lösning. För att få en av y_1 oberoende lösning kan vi resonera på följande sätt: Låt $L(y) = y' - Py$. Då gäller med en godtycklig vektor $u \in \mathbb{C}^n$ att

$$L(e^{\lambda x} u) = e^{\lambda x} (\lambda E - P) u \quad (8.10)$$

och om vi deriverar denna relation med avseende på λ får vi

$$L(xe^{\lambda x} u) = xe^{\lambda x} (\lambda E - P) u + e^{\lambda x} u \quad (8.11)$$

formlerna (8.10) och (8.11) i kombination med vektorer u och v ger

$$L(e^{\lambda x} u - xe^{\lambda x} v) = e^{\lambda x} [(\lambda E - P) u - v] - xe^{\lambda x} (\lambda E - P) v$$

Högerledet blir då 0 om vi väljer $v = v_1$ och sedan $u = v_2$ som en lösning till $(\lambda E - P)u = v_1$ som i vårt fall ger ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

som har den av v_1 oberoende lösningen $u = v_2 = (0, -1)$ vilket ger följande baslösningar och exponentialmatris

$$y_1(x) = e^x v_1 = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_2(x) = -(e^x v_2 - xe^x v_1) = -e^x (v_2 - xv_1) = e^x \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{xP} = Y(x) = e^x \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

62 FÖRELÄSNING 8. LINEÄRA SYSTEM AV DIFFERENTIALEKVATIONER

Föreläsning 9

Laplacetransformen

9.1 Aktuella avsnitt i läroboken

- (7.1) Laplace Transforms and Inverse Transforms.
 - (7.2) Transformation of Initial Value Problems.
 - (7.3) Translation and Partial Fractions.
 - (7.4) Derivatives, Integrals, and Products of Transforms.
 - (7.5) Periodic and Piecewise Continuous Input Functions.
-

Laplacestransformen¹ är ett effektivt verktyg för hantering av ekvationer lineära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Efter laplacestransformering övergår dessa i vanliga ekvationer utan derivator som kan hanteras med algebraiska metoder.

9.2 Definition

Laplacestransformen definieras på följande sätt.

Definition 45 Om funktionen $u(t)$ är definierad för $t \geq 0$ och integrabel på varje begränsat intervall $0 \leq t \leq T$, så definieras laplacestransformen $U(s)$ av integralen

$$\tilde{u}(s) = U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt \quad (9.1)$$

för alla komplexa tal $s = \sigma + i\omega$ där integralen (9.1) är absolutkonvergent.

I fortsättningen förutsätts alla funktioner vara integrabla på begränsade intervall av formen $0 \leq t \leq T$. Speciellt då funktioner som är kontinuerliga för $t \geq 0$, men också funktioner som har ändligt många språngdiskontinuiteter i begränsade intervall. Speciellt innebär detta att de funktioner vi betraktar är begränsade på intervallen $0 \leq t \leq T$.

Det är viktigt i tillämpningarna att låta variabeln s vara ett komplext tal och det är därmed naturligt att arbeta med komplexvärda funktioner i teorin för laplacestransformen. Variabeln t är dock alltid reell och i tillämpningar står den ofta för tiden.

Exempel 46 Låt $u(t) = 1$ för $t \geq 0$. Då blir laplacestransformen

$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (9.2)$$

för alla komplexa tal s med $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ eftersom integralen konvergerar precis då. Vi använder beteckningen

$$1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (9.3)$$

Notera att integralen (9.2) bara konvergerar om $\operatorname{Re} s > 0$, trots att funktionen $1/s$ är definierad för alla komplexa tal $s \neq 0$.

¹Laplace: Fransk matematiker (1749–1827).

9.2.1 Konvergensområde

Laplacestransformen U är definierad för komplexa tal $s = \sigma + i\omega$ där laplaceintegralen (9.1) är absolutkonvergent och eftersom $|e^{-st}| = |e^{-(\sigma+i\omega)t}| = e^{-\sigma t}$ ser vi att (9.1) är absolutkonvergent då integralen

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |u(t)| dt, \quad \sigma = \operatorname{Re} s \quad (9.4)$$

konvergerar och att konvergensområdet, om det inte är tomt, alltid är ett halvplan eftersom $\sigma \geq \sigma_0$ medför att $e^{-\sigma t} |u(t)| \leq e^{-\sigma_0 t} |u(t)|$ och konvergens i s_0 medför konvergens för varje s med $\operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_0 = \sigma_0$. Att integralen inte behöver konvergera för något värde på s inser man av exemplet $u(t) = e^{t^2}$.

En tumregel är att en funktion som växer högst exponentiellt har laplacestransform. Mera precist definierar vi

Definition 47 Funktionen u är exponentiellt begränsad på $t \geq 0$ om det finns konstanter a och A så att olikheten $|u(t)| \leq Ae^{at}$ gäller för alla $t \geq 0$.

För sådana funktioner konvergerar integralen (9.4) för $\sigma > a$. Speciellt får man

Sats 48 Laplacestransformen går mot noll då $\sigma = \operatorname{Re} s$ går mot oändligheten.

Bevis. Om $|u(t)| \leq Ae^{at}$ och $\sigma = \operatorname{Re} s > a$ gäller att

$$\begin{aligned} |U(s)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |u(t)| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} Ae^{at} dt = \frac{A}{\sigma - a} \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow \infty \end{aligned}$$

■

9.3 Egenskaper

Man kan uppfatta laplacestransformen som en avbildning \mathcal{L} från funktioner u definierade på de positiva reella talen till funktioner U definierade i det komplexa planet.

9.3.1 Linearitet

Lineariteten innebär att

$$\mathcal{L}(au + bv) = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(v) \quad (9.5)$$

för godtyckliga tal a och b som även får vara komplexa och (9.5) följer direkt ur formeln (45).

För sambandet mellan u och laplacetransformen $U = \mathcal{L}(u)$ använder vi också skrivsättet

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$$

9.3.2 Translation i s -variabeln

Om vi i formeln (45) ersätter s med $s + a$ erhålles

$$U(s+a) = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} u(t) dt$$

Tolkar vi den högra integralen som laplacetransformen av funktionen $e^{-at} u(t)$ får vi *förskjutningsregeln*

Sats 49 Om $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$ så gäller

$$e^{-at} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s+a) \quad (9.6)$$

Observera att konstanten a kan vara ett komplext tal.

Exempel 50 Beräkna laplacetransformen av $u(t) = \sin \omega t$.

Lösning:

Enligt Eulers formel har vi

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

och med hjälp av exempel 46 och sats 49 får vi

$$e^{\pm i\omega t} \cdot 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s \mp i\omega}$$

vilket tillsammans med lineariteten (9.5) ger

$$\sin \omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1/2i}{s - i\omega} - \frac{1/2i}{s + i\omega} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (9.7)$$

9.3.3 Translation i t -variabeln

Vad händer om man i stället gör en translation i tidsvariabeln t ? Det är då lämpligt att tänka sig att funktionerna är definierade på hela \mathbb{R} med $u(t) = 0$ för $t < 0$. Om $v(t) = u(t - T)$ blir

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t - T) dt = \int_T^{\infty} e^{-st} u(t - T) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+T)} u(\tau) d\tau = e^{-sT} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} u(\tau) d\tau = e^{-sT} U(s) \end{aligned}$$

Vi har härmed visat motsvarande förskjutningsregel vid translation i t -variabeln.

Sats 51 Om $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$, där $u(t) = 0$ för $t < 0$, gäller för $T \geq 0$

$$u(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} U(s) \quad (9.8)$$

Det är viktigt att komma ihåg att funktionen u i formeln (9.8) måste vara noll för negativa värden på variabeln t .

Exempel 52 Stegfunktionen² H definieras som

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (9.9)$$

Laplacetransformen blir förstås $\tilde{H}(s) = 1/s$ eftersom vi gör precis samma räkningar som i exempel 46. Efter translation med $T \geq 0$ får vi emellertid enligt sats 51 att

$$H(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{e^{-sT}}{s}$$

medan däremot en translation av den konstanta funktionen $u(t) \equiv 1$ inte ändrar laplacetransformen. Av den anledningen skrivs också formeln (9.8) ofta som

$$u(t - T)H(t - T) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-sT} \tilde{uH}(s) = e^{-sT} \tilde{u}(s) \quad (9.10)$$

Sats 51 i kombination med stegfunktionen (9.9) i exempel 52 är användbar då man arbetar med funktioner som är definierade intervallvis av olika analytiska uttryck.

Exempel 53 Beräkna laplacetransformen till en "sinuspuls" u , där $u(t) = \sin t$ för $0 \leq t \leq \pi$ och $u(t) = 0$ för övrigt.

Lösning:

Vi kan skriva u som

$$u(t) = [H(t) - H(t - \pi)] \sin t = H(t) \sin t + H(t - \pi) \sin(t - \pi)$$

och får med hjälp av sats 51 och exempel 50 ($\omega = 1$) laplacetransformen

$$U(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2} = \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}$$

²Kallas också heavisidefunktion efter den engelske elektroingenjören Oliver Heaviside (1850–1925). Betecknas ibland med u (unit step).

9.4 Laplacetransformen av en derivata

Laplacetransformens viktigaste uppgift är att förvandla derivation till multiplikation med s . Detta gör den användbar för att lösa differentialekvationer. Satsen lyder

Sats 54 Låt u vara deriverbar för $t \geq 0$ och sådan att både u och u' har laplacetransformer definierade i något halvplan, säg $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Då gäller att

$$\widetilde{u}'(s) = sU(s) - u(0), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0 \quad (9.11)$$

Bevis. Påståendet följer efter partialintegration ty vi har för godtyckligt T att

$$\int_0^T e^{-st} u'(t) dt = [e^{-st} u(t)]_0^T + s \int_0^T e^{-st} u(t) dt$$

och förutsättningarna ger direkt att integralerna konvergerar mot $\widetilde{u}'(s)$ respektive $U(s)$ då $T \rightarrow +\infty$. Problemet är vad som händer med gränsvärdet

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} [e^{-st} u(t)]_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} u(T) - u(0)$$

Vi måste visa att $A = \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} u(T) = 0$. Men om $A \neq 0$, kan integralen $\int_0^\infty e^{-st} u(t) dt$ inte vara absolutkonvergent, vilket vi förutsatte, därför är $A = 0$

■

9.4.1 Potensfunktionen

Sats 54 kan användas för att beräkna laplacetransformen till potensfunktionen $u(t) = t^n$.

Sats 55 Det gäller att

$$t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.12)$$

Bevis. Vi använder induktion. Sätt $u_n(t) = t^n$. Eftersom $u_0(t) \equiv 1$ vet vi redan att $\widetilde{u}_0(s) = 1/s$ och satsen är därmed bevisad för $n = 0$, om vi definierar $0! = 1$.

För $n \geq 1$ har vi $u_n(0) = 0$ och dessutom är $u_n'(t) = nu_{n-1}(t)$ vilket med hjälp av sats 54 ger

$$n\widetilde{u}_{n-1}(s) = \widetilde{u}_n'(s) = s\widetilde{u}_n(s) \Leftrightarrow \widetilde{u}_n(s) = \frac{n}{s}\widetilde{u}_{n-1}(s)$$

Om då satsen är sann för $n - 1$ har vi

$$\widetilde{u}_n(s) = \frac{n(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

viket visar att satsen också gäller för n och induktionsprincipen fullbordar beviset

■

I kombination med sats 49 kan sats 55 användas på följande sätt.

Exempel 56 Beräkna laplacetransformen av $u(t) = t^2 e^{-t}$.

Lösning:

Eftersom vi enligt sats 55 har

$$\frac{t^2}{2} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^3}$$

följer det av sats 50 att

$$t^2 e^{-t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{(s+1)^3}$$

Om man allmänt vill laplacetransformera en relativt godtycklig funktion $u(t)$, som är noll utanför ett begränsat intervall $[0, T]$, och som approximeras med ett polynom $p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n$ för $t \in [0, T]$, kan man utnyttja satserna 63 och 55 på följande sätt:

Med $q(t) = p(t+T)$ blir

$$u(t) = p(t)(H(t) - H(t-T)) = p(t)H(t) - q(t-T)H(t-T)$$

vilket ger

$$U(s) = \tilde{p}(s) - \tilde{q}(s) e^{-sT}$$

där $\tilde{p}(s)$ och $\tilde{q}(s)$ kan beräknas med hjälp av sats 55 och lineariteten (9.5).

Exempel 57 Beräkna $U(s)$ med sinuspulsen i exempel 53 ersatt av polynomet

$$p(t) = 4t(\pi - t)/\pi^2 = \frac{4}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}t^2$$

Se figur 9.1.

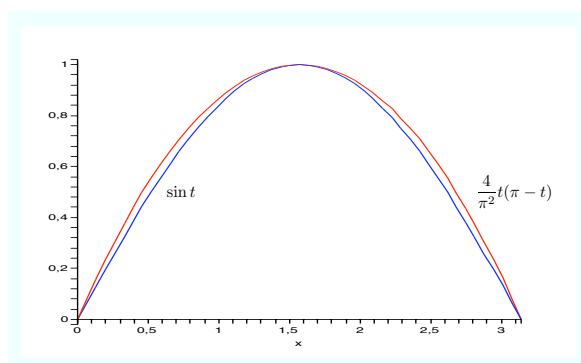
Lösning:

Vi får

$$q(t) = p(t+\pi) = -4(t+\pi)t/\pi^2 = -\frac{4}{\pi}t - \frac{4}{\pi^2}t^2$$

vilket ger laplacetransformerna

$$\begin{aligned}\tilde{p}(s) &= \frac{4}{\pi s^2} - \frac{8}{\pi^2 s^3} = \frac{4}{\pi s^2} \left(1 - \frac{2}{\pi s}\right) \\ \tilde{q}(s) &= -\frac{4}{\pi s^2} - \frac{8}{\pi^2 s^3} = -\frac{4}{\pi s^2} \left(1 + \frac{2}{\pi s}\right)\end{aligned}$$



Figur 9.1: Funktionerna $p(t)$ (röd) och $\sin t$ (blå).

och därmed

$$U(s) = \frac{4}{\pi s^2} \left[\left(1 - \frac{2}{\pi s}\right) + \left(1 + \frac{2}{\pi s}\right) e^{-\pi s} \right]$$

9.5 Inversa laplacetransformen

Definition 45 visar hur laplacetransformen $U = \mathcal{L}(u)$ beräknas som en integral då u är känd. Finns någon formel för den *inversa transformen* $u = \mathcal{L}^{-1}(U)$ då U är känd? Svaret är ja, men först ett resultat om deriverbarhet.

9.5.1 Derivatans av en laplacetransform

Deriverar vi laplaceintegralen (9.1) med avseende på s under integraltecknet får vi

$$\frac{d}{ds} U(s) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} [e^{-st} u(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [-tu(t)] dt$$

vilket kan tolkas så att

$$tu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} U(s)$$

Upprepas förfarandet får vi

Sats 58 Om laplacetransformen U till u konvergerar för $\operatorname{Re} s > \sigma$ gäller detta även för $t^n u(t)$, där $n = 0, 1, 2, \dots$ och

$$t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} U(s)$$

Helt självklart är det inte att man kan derivera laplaceintegralen så här. Dock finns sats i analysen att stödja sig på. Speciellt följer det av sats 58 att U är obegränsat deriverbar, t.o.m. analytisk, i definitionsområdet.

Exempel 59 Beräkna laplacetransformen av $t \sin t$.

Lösning:

Eftersom $\sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} (1+s^2)^{-1}$ får vi med sats 58 att

$$t \sin t \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1+s^2} \right) = \frac{2s}{(1+s^2)^2}$$

9.5.2 En inversionsformel

Så till inverstransformen \mathcal{L}^{-1} . Eftersom laplacetransformen enligt sats 58 kan deriveras obegränsat är uttrycket $U^{(n)}(n/t)$ väldefinierat för $t > 0$ och $n \in \mathbb{N}$ och satsen lyder

Sats 60 Antag att $U = \mathcal{L}(u)$ är definierad i halvplanet $\operatorname{Re} s > \sigma$ då gäller för varje $t > 0$ där u är kontinuerlig att

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n n^{n+1} U^{(n)}(n/t)}{t^{n+1} n!}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (9.13)$$

Beviset är tekniskt och innehåller inga idéer som används i fortsättningen. Intresserade hänvisas till appendix B. Låt oss testa sats 60 i ett enkelt exempel.

Exempel 61 Beräkna u då $U(s) = s^{-m-1}$ för $\operatorname{Re} s > 0$ och $m = 0, 1, 2, \dots$

Lösning:

Vi har

$$U^{(n)}(s) = (-1)^n (m+1)(m+2)\cdots(m+n) s^{-m-n-1} = (-1)^n \frac{(m+n)!}{m!} s^{-m-n-1}$$

vilket, då m är fixt, ger

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n n^{n+1} U^{(n)}(n/t)}{t^{n+1} n!} &= \frac{n^{n+1}}{t^{n+1} n!} \frac{(m+n)!}{m!} \left(\frac{t}{n}\right)^{m+n+1} = \frac{(m+n)!}{n^m n!} \frac{t^m}{m!} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{n^m} \frac{t^m}{m!} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right) \left(\frac{n+2}{n}\right) \cdots \left(\frac{n+m}{n}\right) \frac{t^m}{m!} \rightarrow \frac{t^m}{m!}, \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Således är

$$\frac{1}{s^{m+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^m}{m!}$$

i överensstämmelse med sats 56

9.5.3 Entydighet

Sats 60 ger ett viktigt resultat om entydighet för laplacetransformen.

Sats 62 Om funktionerna u och v har laplacetransformerna U och V respektive och det för något tal N gäller att $U(s) = V(s)$ för alla reella $s > N$ så är $u(t) = v(t)$ för alla värden på t där båda funktionerna är kontinuerliga.

Bevis. Sätt $h = u - v$. På grund av lineariteten (9.5) är $\tilde{h}(s) = U(s) - V(s) \equiv 0$ för $s > N$, vilket enligt sats (60) ger $u(t) - v(t) = h(t) = 0$ om u och v är kontinuerliga i t ■

Sats 62 visar att den inversa laplacetransformen \mathcal{L}^{-1} är väldefinierad, trots att man inte alltid kan beräkna gränsvärdet (9.13) i inversionsformeln. Det kan man för övrigt inte göra med integralen (9.1) i definition 45 heller.

9.6 Differentialekvationer

En följd av sats 54 är att lineära differentialekvationer med konstanta koefficienter efter laplacetransformering övergår i algebraiska ekvationer utan derivator. En finess är att laplacetransformen tar hänsyn till både differentialekvation och begynnelsedata.

9.6.1 Karaktäristiskt polynom och baspolynom

Här följer några användbara begrepp och definitioner.

Definition 63 Baspolynomen $p_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, till ett polynom $p(s) = a_n + \dots + a_1 s^{n-1} + s^n$ definieras rekursivt genom att sätta $p_n = p$ och sedan successivt

$$p_{k-1}(s) = \frac{p_k(s) - a_k}{s} \quad (9.14)$$

Vi belyser definitionen med ett exempel.

Exempel 64 Beräkna baspolynomen p_0, p_1, p_2, p_3 till

$$p(s) = a_4 + a_3 s + a_2 s^2 + a_1 s^3 + s^4$$

Lösning:

Formeln (9.14) i definition 63 ger i tur och ordning

$$\begin{aligned} p_3(s) &= \frac{p(s) - a_4}{s} = a_3 + a_2s + a_1s^2 + s^3 \\ p_2(s) &= \frac{p_3(s) - a_3}{s} = a_2 + a_1s + s^2 \\ p_1(s) &= \frac{p_2(s) - a_2}{s} = a_1 + s \\ p_0(s) &= \frac{p_1(s) - a_1}{s} = 1 \end{aligned}$$

Baspolynomen bildas alltså efter regeln att *successivt stryka konstanttermen i föregående polynom och sedan dividera med s* .

Observera att baspolynomen p_0, \dots, p_{n-1} är en *bas* för det n -dimensionella *polynomrummet* \mathbb{P}_{n-1} som består av polynom av grad högst lika med $n - 1$. Speciellt är baspolynomen linjärt oberoende.

9.6.2 Differentialekvationer och laplacetransform

Med baspolynomen får vi följande generalisering av sats 54.

Sats 65 Om $p(s) = a_n + \dots + a_1s^{n-1} + s^n$ och $u = p(D)y$ gäller

$$\tilde{u}(s) = p(s)\tilde{y}(s) - \left(y(0)p_{n-1}(s) + y'(0)p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0)p_0(s) \right)$$

där $p_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, är baspolynomen till $p(s)$.

Bevis. Induktion över gradtalet.

Om $n = 1$ är $p(s) = a_1 + s$ och $p_0 = 1$. Då är $u = (D + a_1)y = y' + a_1y$ och sats 54 ger $\tilde{u} = s\tilde{y} - y(0) + a_1\tilde{y} = p(s)\tilde{y} - y(0)p_0$.

Antag att påståendet är sant för alla polynom av grad högst $n - 1$.

Eftersom $p(s) = a_n + p_{n-1}(s)s$, får vi $u = p(D)y = a_ny + p_{n-1}(D)y' = a_ny + v$. Enligt induktionsantagandet gäller att

$$\tilde{v} = p_{n-1}(s)\tilde{y}'(s) - \left(y'(0)p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0)p_0(s) \right)$$

ty baspolynomen till p_{n-1} är p_0, \dots, p_{n-2} . Således blir

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= a_n \tilde{y}(s) + \tilde{v}(s) = a_n \tilde{y}(s) + p_{n-1}(s) \tilde{y}'(s) - \left(y'(0) p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0) p_0(s) \right) \\ &= a_n \tilde{y}(s) + p_{n-1}(s) (s \tilde{y}(s) - y(0)) - \left(y'(0) p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0) p_0(s) \right) \\ &= (a_n + p_{n-1}(s) s) \tilde{y}(s) - \left(y(0) p_{n-1}(s) + y'(0) p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0) p_0(s) \right) \\ &= p(s) \tilde{y}(s) - \left(y(0) p_{n-1}(s) + y'(0) p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0) p_0(s) \right)\end{aligned}$$

och induktionsprincipen fullbordar beviset ■

Av sats 65 följer speciellt att om $y(t)$ är lösningen till $p(D)y = f$ med begynnelsedata

$$y(0) = b_1, y'(0) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_n \quad (9.15)$$

så är laplacetransformen av y lika med

$$\begin{aligned}\tilde{y}(s) &= \frac{q(s)}{p(s)} + \frac{\tilde{f}(s)}{p(s)} \\ q(s) &= b_1 p_{n-1}(s) + b_2 p_{n-2}(s) + \dots + b_n p_0(s)\end{aligned} \quad (9.16)$$

Det omvända påståendet är också sant.

Sats 66 Om en funktion $y(t)$ har laplacetransformen (9.16), så är $p(D)y = f$ med begynnelsedata enligt (9.15).

Bevis. Antag att \tilde{y} är given av (9.16) och låt $u = p(D)y - f$. Enligt sats 65 är

$$\begin{aligned}\tilde{u}(s) &= p(s) \tilde{y}(s) - \left(y(0) p_{n-1}(s) + y'(0) p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0) p_0(s) \right) - \tilde{f}(s) \\ &= (b_1 - y(0)) p_{n-1}(s) + (b_2 - y'(0)) p_{n-2}(s) + \dots + (b_n - y^{(n-1)}(0)) p_0(s)\end{aligned}$$

och enligt sats 48 skall $\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{u}(s) = 0$. Enda möjligheten är då att $\tilde{u}(s) \equiv 0$ eftersom \tilde{u} är ett polynom. Därmed är enligt entydighetssatsen 62 också $u(t) \equiv 0$ och vidare, eftersom baspolynomen är lineärt oberoende, får vi

$$y(0) = b_1, y'(0) = b_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = b_n$$

■

Speciellt är $\tilde{f}(s)/p(s)$ laplacetransformen till partikulärlösningen till $p(D)y = f$ som har begynnelsedata noll.

9.7 Polynom och lineära avbildningar

För varje linjär avbildning $A : V \rightarrow V$ på ett vektorrum V definierar vi potenserna A^n för $n = 1, 2, \dots$ som sammansättningen $A^n = \overbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}^{n \text{ st.}}$. Tillsammans med

konventionen att $A^0 = Id$, identitetsavbildningen, kan vi till varje polynom $p(s) = a_n + \dots + a_1 s^{n-1} + s^n$ definiera en avbildning

$$p(A) = a_n Id + \dots + a_1 A^{n-1} + A^n$$

Detta generaliserar den notation $p(D)$ som vi infört tidigare för polynom i differentialoperatorn D och vi kommer också längre fram att behöva matrispolynom $p(A)$ där A är en kvadratisk matris.

Observera dock att så länge bara *en* avbildning är inblandad kan man räkna med potenserna A^n som vanligt. Med två eller flera måste man emellertid tänka på att i allmänhet är $AB \neq BA$. Gamla beprövade formler som $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ och $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ gäller därför endast om $AB = BA$.

9.7.1 Två satser om baspolynom

Vi avslutar ett par egenskaper hos baspolynomen som vi kommer att behöva framöver.

Sats 67 För baspolynomen till $p(s)$ gäller

$$p_{n-1}(s) + p_{n-2}(s)r + \dots + p_0(s)r^{n-1} = \frac{p(s) - p(r)}{s - r} \quad (9.17)$$

Bevis. Med $y(t) = e^{rt}$ blir $u(t) = p(D)y = p(r)e^{rt}$ och laplacetransformering ger med hjälp av sats 65

$$\begin{aligned} \frac{p(r)}{s-r} &= \tilde{u} = p(s)\tilde{y} - \left(y(0)p_{n-1}(s) + y'(0)p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0)p_0(s) \right) \\ &= \frac{p(s)}{s-r} - (p_{n-1}(s) + rp_{n-2}(s) + \dots + r^{n-1}p_0(s)) \end{aligned}$$

■

Eftersom högerledet i (9.17) inte ändras då variablerna s och r byter plats, får vi direkt av sats 67 följande symmetriegenskap

Sats 68 För baspolynomen till $p(s)$ gäller identiteten

$$\begin{aligned} p_{n-1}(r) + p_{n-2}(r)s + \dots + p_0(r)s^{n-1} \\ = p_{n-1}(s) + p_{n-2}(s)r + \dots + p_0(s)r^{n-1} \end{aligned} \quad (9.18)$$

Eftersom (9.18) är en polynomidentitet gäller den också för lineära avbildningar som kommuterar.

Sats 69 Om $A, B : V \rightarrow V$ och $AB = BA$ så är

$$\begin{aligned} p_{n-1}(A) + p_{n-2}(A)B + \dots + p_0(A)B^{n-1} \\ = p_{n-1}(B) + p_{n-2}(B)A + \dots + p_0(B)A^{n-1} \end{aligned} \quad (9.19)$$

9.8 Faltning

Integralen i lösningsformeln

$$y(t) = Y(t)b + \int_0^t Y(t-\tau)F(\tau)d\tau \quad (9.20)$$

till systemet $y' = Py$ med $y(0) = b$ och $Y(t) = e^{tP}$ är ett specialfall av en operation som kallas *faltning*. Den allmänna definitionen lyder.

Definition 70 Om $u(t)$ och $v(t)$ är definierade för $t \geq 0$ och integrabla på varje begränsat intervall $0 \leq t \leq T$ definieras faltningen $u * v(t)$ för $t \geq 0$ genom

$$u * v(t) = \int_0^t u(t-\tau)v(\tau)d\tau \quad (9.21)$$

Vi illustrerar faltningen med ett enkelt exempel.

Exempel 71 Beräkna $u * v$ om $u(t) = e^{at}$ och $v(t) = e^{bt}$.

Lösning:

Om $a \neq b$ får vi

$$u * v(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}e^{b\tau}d\tau = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$$

Speciellt om $a = -1$ och $b = i$ ger detta, eftersom e^{-t} är reell, att

$$e^{-t} * \sin t = \operatorname{Im}(e^{-t} * e^{it}) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-t} - e^{it}}{-1 - i}\right) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$$

9.9 Laplacetransformen av en faltning

Hur ser laplacetransformen $\widetilde{v * u}$ av faltningen $v * u$ ut? Frågan besvaras i nästa sats.

Sats 72 Om funktionerna u och v uppfyller förutsättningarna i definition 70 och dessutom växer högst exponentiellt för $t \geq 0$, gäller detta även för $u * v$ och dessutom är

$$\widetilde{u * v}(s) = \widetilde{u}(s) \cdot \widetilde{v}(s)$$

Bevis. Vi kan anta att $|u(t)| \leq Ae^{at}$ och $|v(t)| \leq Ae^{at}$, då följer att

$$|u(t-\tau)v(\tau)| \leq A^2 e^{a(t-\tau)}e^{a\tau} = A^2 e^{at}$$

vilket ger

$$|u * v(t)| \leq \int_0^t |u(t-\tau)v(\tau)| d\tau \leq \int_0^t A^2 e^{at} d\tau = A^2 t e^{at} \leq \frac{A^2}{e(b-a)} e^{bt}$$

om $b > a$. Vidare gäller för $\tau \geq 0$ enligt (9.10) att

$$e^{-s\tau} \tilde{u}(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t-\tau) H(t-\tau) dt \quad (9.22)$$

Vi får därför med (9.22) att

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s) \cdot \tilde{v}(s) &= \tilde{u}(s) \int_0^\infty e^{-s\tau} v(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} \tilde{u}(s) v(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} u(t-\tau) H(t-\tau) dt \right) v(\tau) d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty u(t-\tau) H(t-\tau) v(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t u(t-\tau) v(\tau) d\tau \right) dt = \widetilde{u * v}(s) \end{aligned}$$

där omkastningen av integrationsordningen är tillåten eftersom integralerna är absolutkonvergenta. ■

9.9.1 Egenskaper hos faltningsoperationen

Av sats 72 följer några grundläggande egenskaper hos faltningsoperationen. Det gäller att:

Sats 73 Om u , v och w är komplexvärda funktioner som uppfyller förutsättningarna i sats 72 gäller att faltningen är

1. kommutativ, så att $u * v = v * u$ och
2. associativ, så att $(u * v) * w = u * (v * w)$ samt
3. distributiv med avseende på lineärkombinationer med komplexa tal a och b , så att $u * (av + bw) = a(u * v) + b(u * w)$

Bevis. Eftersom $u * v = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{u} \cdot \tilde{v})$ så följer de två första formelerna av motsvarande egenskaper för den komplexa produkten $\tilde{u} \cdot \tilde{v}$ respektive $\tilde{u} \cdot \tilde{v} \cdot \tilde{w}$. Den sista formeln är en direkt följd av definitionen 70. ■

En konsekvens av sats 72 är att lösningen till $p(D)y = f$ kan skrivas $y = y_0 + f * g$ där $g = \mathcal{L}^{-1}(1/p)$, $y_0 = \mathcal{L}^{-1}(q/p)$ och $q(s) = y(0)p_{n-1}(s) + y'(0)p_{n-2}(s) + \dots + y^{(n-1)}(0)p_0(s)$.

Föreläsning 10

Laplacetransform och lineära system

10.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(5.4) Multiple Eigenvalue Solutions.

(5.5) Matrix Exponentials and Linear Systems.

(5.6) Nonhomogenous Linear Systems.

Ekvationen $p(D)y = f$ kan som vi sett lösas med laplacetransform så att

$$\tilde{y}(s) = \frac{q(s)}{p(s)} + \frac{\tilde{f}(s)}{p(s)}$$

$$q(s) = y(0)p_{n-1}(s) + y'(0)p_{n-2}(s) + \cdots + y^{(n-1)}(0)p_0(s)$$

vilket efter inverstransformering leder till lösningsformeln

$$y(t) = y_0(t) + \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (10.1)$$

som är helt analog med motsvarande lösningsformel

$$Y(t) = \exp(tP)b + \int_0^t \exp((t-\tau)P)F(\tau)d\tau \quad (10.2)$$

för det lineära systemet $Y' = PY + F$ med $Y(0) = b$ och fundamentalmatrisen $\exp(tP)$.

Dessutom kan den skalära ekvationen

$$p(D)y = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f$$

via vektorn $Y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ och matriserna

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}$$

skrivs som systemet $Y' = PY + F$ där det gäller att $p(s) = \det(sE - P)$.

I själva verket är båda synsätten, skalärt av ordning n och vektorielt av ordning 1, helt ekvivalenta och laplacetransformen ger oss därigenom ett verktyg för att analysera exponentialmatriser e^A även då A är defekt.

10.2 Resolventmatris

Låt $G(t) = \exp(tP)$ som då satisfierar differentialekvationen $G' = PG$ med $G(0) = E$. Laplacetransformering ger $s\tilde{G}(s) - E = P\tilde{G}(s)$ och efter omflyttning $(sE - P)\tilde{G}(s) = E$ och alltså är $\tilde{G}(s) = (sE - P)^{-1}$. Inversmatrisen existerar för alla komplexa värden på s utom högst n stycken där det karakteristiska polynomet, $p(s) = \det(sE - P) = 0$. Matrisen $(sE - P)^{-1}$ kallas *resolventmatris*.

Exempel 74 Beräkna karakteristiskt polynom och resolventmatris till

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Karaktäristiska polynomet blir

$$p(s) = \det(sE - P) = s^3 - s^2 + 2s + 1$$

och resolventmatrisen

$$(sE - P)^{-1} = \frac{1}{p(s)} \begin{bmatrix} s^2 - s + 2 & s - 1 & 1 \\ -1 & s^2 - s & s \\ -s & -2s - 1 & s^2 \end{bmatrix}$$

Beräkningarna görs lämpligen i maple.

Matriselementen i $(sE - P)^{-1}$ är i exemplet rationella funktioner i s med $p(s)$ som gemensam nämnare. Bryter vi ut nämnaren får vi en matris med polynomelement som vi kan skriva som ett polynom med matriskoefficienter

$$s^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

om vi delar upp efter potenser av s . För att undersöka hur dessa matriskoefficienter beror av P betraktar vi den något allmännare situationen med $p(s) = s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$ och

$$(sE - P)^{-1} = \frac{1}{p(s)} (s^2B_0 + sB_1 + B_2)$$

Då gäller att

$$(sE - P)(s^2B_0 + sB_1 + B_2) = p(s)E$$

Utvecklar vi både vänster- och högerled får vi

$$s^3B_0 + s^2(B_1 - PB_0) + s(B_2 - PB_1) - PB_2 = s^3E + s^2a_3E + sa_2E + a_1E$$

och identifieras koefficienterna framför lika potenser av s får vi successivt

$$B_0 = E = p_0(P)$$

$$B_1 = PB_0 + a_3E = P + a_3E = p_1(P)$$

$$B_2 = PB_1 + a_2E = Pp_1(P) + a_2E = p_2(P)$$

För konstanttermerna får vi slutligen

$$0 = PB_2 + a_1E = Pp_2(P) + a_1E = p(P)$$

Där polynomen $p_0(s)$, $p_1(s)$ och $p_2(s)$ är baspolynomen till $p(s)$.

Vi får följande strukturformel för resolventmatrisen

$$(sE - P)^{-1} = \frac{1}{p(s)} (s^2E + sp_1(P) + p_2(P))$$

Ovanstående resonemang går lika bra att genomföra för en godtycklig $n \times n$ matris med karakteristiskt polynom

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

vilket leder till följande sats

Sats 75 För resolventmatrisen $(sE - P)^{-1}$ gäller att

$$(sE - P)^{-1} = \frac{1}{p(s)} (s^{n-1}E + s^{n-2}p_1(P) + \dots + p_{n-1}(P))$$

där polynomen $p_{n-1}(s), \dots, p_1(s)$ är baspolynomen till $p(s)$. Vidare gäller att $p(P) = 0$ (Cayley-Hamiltons sats).

10.3 Exponentialmatris

Med hjälp av sats 75 kan vi ge följande strukturbeskrivning av fundamentalmatrisen

$$\exp(tP) = \mathcal{L}^{-1}(\tilde{G}(s)) = \mathcal{L}^{-1}((sE - P)^{-1})$$

till systemet $Y' = PY$.

Med $p(s) = \det(sE - P)$, sätt $g = \mathcal{L}^{-1}(1/p(s))$. Då är $p(s)\tilde{g}(s) = 1$ och funktionen g kan enligt sats 66 karakteriseras som lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$p(D)g = 0, \quad g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-2)}(0) = 0, \quad g^{(n-1)}(0) = 1$$

Vidare gäller att

$$\mathcal{L}(g')(s) = s\tilde{g}(s) - g(0) = \frac{s}{p(s)}$$

$$\mathcal{L}(g'')(s) = s^2\tilde{g}(s) - g'(0) - sg(0) = \frac{s^2}{p(s)}$$

⋮

$$\mathcal{L}(g^{(n-1)})(s) = s^{n-1}\tilde{g}(s) - g^{(n-2)}(0) - \dots - s^{n-2}g(0) = \frac{s^{n-1}}{p(s)}$$

Ovanstående resultat kan därmed sammanfattas i följande sats.

Sats 76 Exponentialmatrisen $G(t) = \exp(tP)$ kan skrivas som

$$G(t) = g(t)p_{n-1}(P) + g'(t)p_{n-2}(P) + \dots + g^{(n-1)}(t)E$$

där funktionen g är lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} p(D)g &= 0 \\ g(0) = g'(0) &= \dots = g^{(n-2)}(0) = 0 \\ g^{(n-1)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Ett par enkla exempel får illustrera sats 76.

Exempel 77 Bestäm $\exp(tP)$ då $P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Lösning:

Vi har $p(s) = s^2 + 1$ vilket ger $g'' + g = 0$ och $g(0) = 0$ samt $g'(0) = 1$. Således är $g(t) = \sin t$ och då $p_1(s) = s$ får vi

$$\exp(tP) = g(t)p_1(P) + g'(t)E = (\sin t)P + (\cos t)E$$

Exempel 78 Bestäm $\exp(tP)$ och teckna lösningen till systemet $Y' = PY + F$ då

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Här är $p(s) = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$ vilket ger $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left((s+1)^{-2}\right) = te^{-t}$ och $p_1(s) = s + 2$. Vi får

$$\begin{aligned} \exp(tP) &= g(t)p_1(P) + g'(t)E \\ &= te^{-t}(P + 2E) + (1-t)e^{-t}E \\ &= te^{-t}P + (1+t)e^{-t}E \end{aligned}$$

Lösningen till $Y' = PY + F$ med $Y(0) = b$ kan då enligt (10.2) skrivas som

$$\begin{aligned} y(t) &= te^{-t}Pb + (1+t)e^{-t}b \\ &+ \int_0^t \left((t-\tau)e^{-(t-\tau)}PF(\tau) + (1+t-\tau)e^{-(t-\tau)}F(\tau) \right) d\tau \end{aligned}$$

där som vanligt första termen löser det homogena problemet $Y' = PY$ med $Y(0) = b$ och integralen ger en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen med $Y(0) = 0$.

10.4 Minimalpolynom

Enligt Cayley-Hamiltons sats (se sats 75) är $p(A) = 0$ om $p(s) = \det(sE - A)$ vilket visar att det alltid finns ett polynom av grad n som annihilerar en $n \times n$ -matris. Ibland finns det emellertid polynom av lägre gradtal som också har denna egenskap. I så fall kan ett sådant polynom, och dess underliggande baspolynom,

användas i sats 76 i stället för det karakteristiska polynomet vilket medför att uttrycket för exponentialmatrisen förenklas. Det polynom q med lägsta gradtalet som uppfyller $q(A) = 0$ kallas *minimalpolynomet* till A .

Följande sats gäller.

Sats 79 Om $q(s)$ är ett polynom av grad $m \leq n$ sådant att $q(P) = 0$ så är

$$\exp(tP) = g(t)q_{m-1}(P) + g'(t)q_{m-2}(P) + \cdots + g^{(m-1)}(t)E$$

där funktionen g är lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} q(D)g &= 0 \\ g(0) &= g'(0) = \cdots = g^{(m-2)}(0) = 0 \\ g^{(m-1)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Bevis. Enligt satserna 67 och 69 gäller om $AB = BA$ att

$$\begin{aligned} q(A) - q(B) &= (A - B)(q_{m-1}(A) + q_{m-2}(A)B + \cdots + q_0(A)B^{m-1}) \\ &= (A - B)(q_{m-1}(B) + q_{m-2}(B)A + \cdots + q_0(B)A^{m-1}) \end{aligned}$$

vilket med $A = sE$ och $B = P$ ger

$$q(s)E - q(P) = (sE - P)(q_{m-1}(P) + q_{m-2}(P)s + \cdots + q_0(P)s^{m-1})$$

och då $q(P) = 0$ får vi

$$\begin{aligned} E &= (sE - P) \left(q_{m-1}(P) \frac{1}{q(s)} + q_{m-2}(P) \frac{s}{q(s)} + \cdots + q_0(P) \frac{s^{m-1}}{q(s)} \right) \\ R(s) &= (sE - P)^{-1} = q_{m-1}(P) \frac{1}{q(s)} + q_{m-2}(P) \frac{s}{q(s)} + \cdots + q_0(P) \frac{s^{m-1}}{q(s)} \end{aligned}$$

vilket med hänsyn till att $q_0(P) = E$ och med $g = \mathcal{L}^{-1}(1/q)$ ger

$$\exp(tP) = \mathcal{L}^{-1}(R) = g(t)q_{m-1}(P) + g'(t)q_{m-2}(P) + \cdots + g^{(m-1)}(t)E$$

■

Exempel 80 Om P representerar en projektionsavbildning gäller att $P^2 = P$ vilket medför att $q(P) = 0$ då $q(s) = s^2 - s$. Då gäller, eftersom $q_1(s) = s - 1$ och $\exp(tP) = g(t)(P - E) + g'(t)E$, där

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 - s} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \right) = e^t - 1,$$

oavsett dimensionen hos P , att

$$\exp(tP) = (e^t - 1)(P - E) + e^t E = (e^t - 1)P + E$$

Föreläsning 11

Stabilitet och linearisering

11.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(6.1) Stability and the Phase Plane.

(6.2) Linear and Almost Linear Systems.

11.2 Autonoma system

Ett system av differentialekvationer $x' = f(x)$ där högerledet $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ inte beror explicit av t kallas *autonomt*. För *linjära* autonoma system är $f(x) = Px - v$ där P är en $n \times n$ -matris som inte beror av t och v en konstant vektor. Om $n = 2$ skrivs ofta systemet utan vektorbeteckningar

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (11.1)$$

Exempel 81 Rörelseekvationen för en pendel med hastighetsproportionell dämpning är

$$mL^2 \theta'' = -cL\theta' - mgL \sin \theta$$

vilket med $x = \theta$ och $y = \theta'$ kan skrivas som systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 \sin x - 2\gamma y \end{cases} \quad (11.2)$$

där $\omega = \sqrt{g/L}$ och $2\gamma = c/mL$.

11.2.1 Translationsinvarians

Karaktäristiskt för autonoma system är att lösningarna är *translationsinvarianta*. Det betyder att $y(t) = x(t + t_0)$ är en lösning om $x(t)$ är det. Vi har ju nämligen att $y'(t) = x'(t + t_0) = f(x(t + t_0)) = f(y(t))$. Speciellt följer då av entydighetssatsen att varje lösning som är sådan att $x(t_0 + T) = x(t_0)$ för något t_0 och $T \neq 0$, är *periodisk* med perioden T . Det vill säga: vi har $x(t + T) = x(t)$ för *alla* t .

11.2.2 Fasporträtt

Graferna till alla lösningar $x(t)$ till $x' = f(x)$ kallas ekvationens *fasporträtt*. Om $n = 2$ består fasporträttet av kurvor i \mathbb{R}^2 , *fasplanet*. Ibland kan fasporträttet erhållas som nivåkurvor genom att, i fallet $n = 2$, skriva systemet (11.1) på formen $gdx - fdy = 0$ och försöka bestämma en potentialfunktion till vektorfältet $(g, -f)$.

Exempel 82 Systemet

$$\begin{cases} x' = 4 - 2y \\ y' = 12 - 3x^2 \end{cases} \quad (11.3)$$

kan skrivas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y}$$

och ger den separabla ekvationen

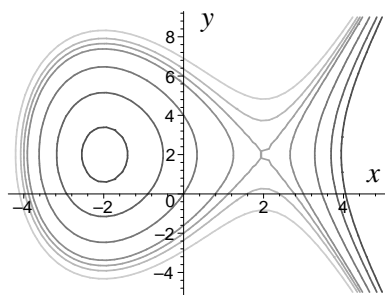
$$(12 - 3x^2) dx - (4 - 2y) dy = 0$$

där fasporträttet ges av nivåkurvor till funktionen

$$\phi(x,y) = \int (12 - 3x^2) dx - \int (4 - 2y) dy = 12x - x^3 - 4y + y^2$$

I maple får vi. Se figur 11.1.

```
> with(plots):
> phi := 12*x-x^3-4*y+y^2;
      phi := 12x - x^3 - 4y + y^2
> contourplot(phi, x=-6..6, y=-5..9,
> contours=[-18,-10,0,9,12,15,20], thickness=4, grid=[60,40]);
```



Figur 11.1: Nivåkurvor till exempel 82.

Allmänt gäller att systemet (11.1) ger en exakt differentialekvation $gdx - fdy = 0$ om divergensen för fältet (f, g) är noll i ett enkelt sammanhängande område; alltså att

$$\nabla \cdot (f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Exempel 83 För pendelekvationen (11.2) är

$$f(x,y) = y, \quad g(x,y) = -\omega^2 \sin x - 2\gamma y$$

vilket ger

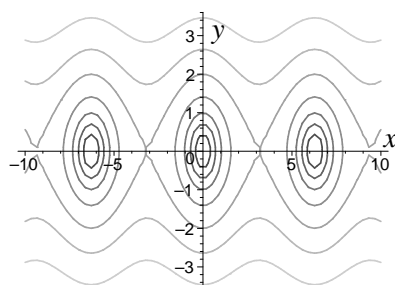
$$\nabla \cdot (f, g) = -2\gamma$$

och för en odämpad pendel, $\gamma = 0$, får vi potentialen

$$\phi(x,y) = \int \omega^2 \sin x dx + \int y dy = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \cos x$$

och om $\omega = 1$ blir fasporträttet med hjälp av maple. Se figur 11.2.

```
> phi := y^2-2*cos(x);
      phi := y^2 - 2cos(x)
> contourplot(phi, x=-10..10, y=-4..4,
> contours=[-1.8,-1.5,-1,0,2,5,10], thickness=4, grid=[60,40]);
```



Figur 11.2: Nivåkurvor till exempel 83

11.2.3 Jämviktpunkter

Om $f(x_0) = 0$ är den konstanta funktionen $x(t) \equiv x_0$ en lösning till $x' = f(x)$. Sådana punkter x_0 kallas *jämviktpunkter* till differentialekvationen. För systemet (11.2) i exempel 81 är jämviktpunkterna $(n\pi, 0)$, där $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ och systemet (11.3) i exempel 82 har två jämviktpunkter $(-2, 2)$ och $(2, 2)$.

11.2.4 Stabilitet

Om x_0 är en jämviktpunkt till $x' = f(x)$ med begynnelsevärde $x(0) = x_0$, blir $x(t) \equiv x_0$ för $t \geq 0$. På grund av osäkra data är det svårt att exakt få $x(0) = x_0$ utan man hamnar ofta en bit ifrån. Problemet är då vad som händer för $t > 0$. Stannar lösningen kvar i närheten av x_0 då t växer, eller gör den det inte? I första fallet är jämvikten *stabil*, annars *instabil* eller *labil*. Mera precist definieras stabilitet på följande sätt.

Definition 84 En jämviktpunkt x_0 är stabil om det till varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att om $\|x(0) - x_0\| < \delta$ så är $\|x(t) - x_0\| < \varepsilon$ för alla $t \geq 0$.

Exempel 85 I fallet med den odämpade pendeln (11.2) med $\gamma = 0$, är jämviktpunkterna $(n\pi, 0)$ stabila om n är ett jämnt tal och instabila om n är udda.

En starkare form av stabilitet kallas asymptotisk stabilitet. Då stannar lösningen inte bara kvar nära x_0 utan konvergerar in mot jämviktpunkten.

Definition 86 En jämviktpunkt x_0 är asymptotiskt stabil om det finns $\delta > 0$ så att om $\|x(0) - x_0\| < \delta$ så är $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_0\| = 0$.

Om vi i pendelekvationen (11.2) har $\gamma > 0$ kan vi inte beskriva fasporträttet med en potential utan vi får lösa ekvationen numeriskt. I maple får vi med dämpningskonstant $\gamma = 0.05$.

```
> sys := diff(x(t), t) = y(t), diff(y(t), t) = -sin(x(t))
> - delta*y(t);
```



```

sys :=  $\frac{\partial}{\partial t} x(t) = y(t), \frac{\partial}{\partial t} y(t) = -\sin(x(t)) - \delta y(t)$ 
> delta := 0.1;
       $\delta := .1$ 
> fcns := [x(t), y(t)];
      fcns := [x(t), y(t)]

```

Vi löser systemet numeriskt med $x(0) = 4$ och $y(0) = 2$ respektive $x(0) = 2$ och $y(0) = -2$

```

> sol1 := dsolve({sys, x(0)=4, y(0)=1}, fcns,
> type=numeric):
> sol2 := dsolve({sys, x(0)=2, y(0)=-1}, fcns,
> type=numeric):

```

Funktionen odeplot ger lösningskurvorna i fasplanet. Resultatet kan lagras som grafiska strukturer p1 och p2.

```

> p1:=odeplot(sol1, fcns, 0..40, numpoints=100):
> p2:=odeplot(sol2, fcns, 0..40, numpoints=100):

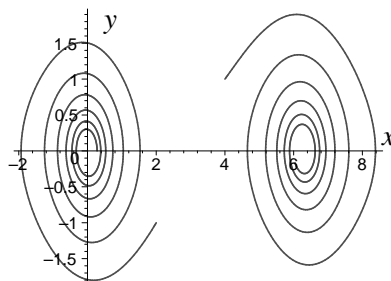
```

Funktionen display ritar sedan p1 och p2 i samma diagram. Se figur 11.3.

```

> display([p1, p2], thickness=4);

```



Figur 11.3: Illustration av asymptotisk stabilitet.

11.3 Linearisering

I närheten av en jämviktspunkt kan ett olineärt system ibland approximeras med ett lineärt. Genom att studera stabiliteten hos det lineära systemet kan man i bästa fall även avgöra om det olineära systemet är stabilt. Metoden kallas linearisering. Till att börja med undersöker vi stabiliteten hos jämviktspunkter till lineära system.

11.3.1 Lineära autonoma system

I ett lineärt autonomt system $x' = f(x)$ är $f(x) = Px - v$, där P är en konstant matris och v en konstant vektor. Om P är inverterbar, har systemet en unik jämviktspunkt $x_0 = P^{-1}v$. Variabelbytet $x \mapsto x - x_0$ transformerar systemet till $x' = Px$ så att jämviktspunkten hamnar i 0.

För att avgöra om 0 är stabil eller inte undersöker vi lösningen $x(t) = e^{tP}b$ med begynnelsedata $x(0) = b \neq 0$ för $t > 0$. Enligt sats 76 är

$$x(t) = g(t)p_{n-1}(P)b + g'(t)p_{n-2}(P)b + \dots + g^{(n-1)}(t)b$$

där g är en lösning till $p(D)g = 0$ och $p(s)$ karakteristiska polynomet till P . Eftersom varje faktor $(s - \lambda)^m$ i $p(s)$ ger upphov till termerna

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

i funktionen g ser vi direkt att $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ för varje val av b om $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ för alla nollställen λ till $p(s)$.

Om det däremot för något λ gäller att $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ och $p(\lambda) = 0$, kan vi starta i en egenvektor $b \neq 0$ så att $Pb = \lambda b$ och då blir lösningen

$$x(t) = e^{tP}b = e^{\lambda t}b$$

vars belopp blir godtyckligt stort då $t \rightarrow +\infty$.

Slutligen har vi fallet då $p(\lambda) = 0$ medför att $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ men med likhet för något eller några λ . Om alla sådana nollställen är enkla blir motsvarande lösningstermer $e^{\lambda t}b$ begränsade vilket ger stabilitet men inte asymptotisk stabilitet. Multipla nollställen med $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ kan dock ge termer av formen $t^{m-1}e^{\lambda t}b$, där $m > 1$ som inte är begränsade och jämviktspunkten är labil.

Sammanfattningsvis gäller

Sats 87 *Jämviktspunkten $x_0 = P^{-1}v$ till $x' = Px - v$ är asymptotiskt stabil om och endast om alla nollställen till karakteristiska polynomet har negativ realdel. Om något nollställe har positiv realdel är x_0 labil.*

11.4 Nästan lineära system

I flervariabelanalysen [11, Kap. 3.2–3] lär vi att en funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är deriverbar¹ i x_0 om det finns en lineär avbildning $x \mapsto Px$ så att

$$f(x + x_0) = f(x_0) + Px + g(x)$$

¹Deriverbar och differentierbar används synonymt här.

där funktionen g uppfyller villkoret

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (11.4)$$

Den lineära avbildningen $x \mapsto Px$ kallas derivatan av f i x_0 och brukar betecknas $f'(x_0)$ eller $df(x_0)$. Avbildningsmatrisen erhålles genom att beräkna de partiella derivatorna för komponentfunktionerna f_1, \dots, f_n till f . Således är

$$P = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \cdots & \partial_n f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(x_0) & \cdots & \partial_n f_n(x_0) \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

Antag nu att $f \in \mathcal{C}^1$ i en omgivning till x_0 där $f(x_0) = 0$ och att $P = df(x_0)$ är inverterbar. Då är enligt inversa funktionsssatsen [11, Kap. 3.3, sats 2] $f(x) \neq 0$ i en punkterad omgivning $0 < |x - x_0| < \delta$ och vi har

$$f(x + x_0) = Px + g(x)$$

där funktionen g uppfyller villkoret (11.4). Systemet

$$x'(t) = f(x(t) + x_0) = Px(t) + g(x(t)) \quad (11.6)$$

har därför en isolerad jämviktspunkt $x = 0$ och det blir naturligt att undersöka när stabiliteten för jämviktspunkten $x = 0$ hos det olineära systemet (11.6) kan avgöras genom att studera det lineariserade systemet $x' = Px$.

Antag först att det finns ett positivt tal σ så att $\operatorname{Re}(\lambda) < -\sigma < 0$ för alla nollställen λ till karaktäristiska polynomet för P . Om $p(s)$ är karaktäristiska polynomet till P och $p(D)g = 0$ följer det att

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\sigma t} g^{(j)}(t) = 0$$

för $j = 0, 1, \dots, m-1$ där m är graden för $p(s)$. Av sats 76 följer då också att

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\sigma t} \|e^{tP}\| = 0$$

eftersom

$$\begin{aligned} \|e^{tP}\| &= \left\| g(t) p_{n-1}(P) + g'(t) p_{n-2}(P) + \cdots + g^{(n-1)}(t) I \right\| \\ &\leq |g(t)| \|p_{n-1}(P)\| + |g'(t)| \|p_{n-2}(P)\| + \cdots + |g^{(n-1)}(t)| \end{aligned}$$

Speciellt är $e^{\sigma t} \|e^{tP}\| \leq M$ för $t \geq 0$.

Vidare gäller att

$$\frac{d}{dt} (e^{-tP} x(t)) = e^{-tP} (x'(t) - Px(t)) = e^{-tP} g(x(t))$$

och om $x(0) = b$ får vi efter integration

$$e^{-tP}x(t) = b + \int_0^t e^{-\tau P}g(x(\tau))d\tau$$

som ger lösningsformeln

$$x(t) = e^{tP}b + \int_0^t e^{(t-\tau)P}g(x(\tau))d\tau$$

Av de vanliga standarduppskattningarna för integraler, matriser och vektorer följer att

$$\begin{aligned} e^{\sigma t} \|x(t)\| &\leq e^{\sigma t} \|e^{tP}b\| + \int_0^t e^{\sigma t} \left\| e^{(t-\tau)P}g(x(\tau)) \right\| d\tau \\ &\leq e^{\sigma t} \|e^{tP}\| \|b\| + \int_0^t e^{\sigma(t-\tau)} \left\| e^{(t-\tau)P} \right\| e^{\sigma\tau} \|g(x(\tau))\| d\tau \\ &\leq M \|b\| + M \int_0^t e^{\sigma\tau} \|g(x(\tau))\| d\tau \end{aligned} \quad (11.7)$$

Det följer av (11.4) att det finns ett tal δ så att $\|x\| \leq \delta$ medför att $\|g(x)\| \leq (\sigma/2M) \|x\|$ vilket insatt i (11.7), med $u(t) = \int_0^t e^{\sigma\tau} \|x(\tau)\| d\tau$, ger olikheten

$$u'(t) = e^{\sigma t} \|x(t)\| \leq M \|b\| + \frac{\sigma}{2} \int_0^t e^{\sigma\tau} \|x(\tau)\| d\tau = M \|b\| + \frac{\sigma}{2} u(t) \quad (11.8)$$

Således får vi

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\sigma t/2} u(t) \right) = e^{-\sigma t/2} \left(u' - \frac{\sigma}{2} u \right) \leq M \|b\| e^{-\sigma t/2}$$

och då $u(0) = 0$ ger detta efter integration

$$e^{-\sigma t/2} u(t) \leq M \|b\| \int_0^t e^{-\sigma\tau/2} d\tau = \frac{2M}{\sigma} \|b\| \left(1 - e^{-\sigma t/2} \right)$$

och därmed

$$\frac{\sigma}{2} u(t) \leq M \|b\| \left(e^{\sigma t/2} - 1 \right)$$

Tillsammans med (11.8) får vi till sist följande uppskattning av $\|x(t)\|$

$$e^{\sigma t} \|x(t)\| \leq M \|b\| + \frac{\sigma}{2} u(t) \leq M \|b\| e^{\sigma t/2} \Rightarrow \|x(t)\| \leq M \|b\| e^{-\sigma t/2}$$

Vi har därmed visat att om $\|b\| \leq \delta/M$ så är $\|x(t)\| \leq \delta e^{-\sigma t/2} \leq \delta$ för $t \geq 0$ och vi har asymptotisk stabilitet. Följande sats sammanfattar resultaten av resonemanget ovan.

Sats 88 Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $f \in \mathcal{C}^1$ i en omgivning av en jämviktspunkt x_0 till systemet $x' = f(x)$ och $df(x_0)$ är inverterbar så är x_0 asymptotiskt stabil om alla egenvärden till $df(x_0)$ har negativ realdel.

Exempel 89 Den dämpade pendeln

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = y \\ y' = g(x, y) = -\omega^2 \sin x - 2\gamma y \end{cases}$$

har jämviktspunkten $(0, 0)$ och där är funktionalmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x(0, 0) & \partial f / \partial y(0, 0) \\ \partial g / \partial x(0, 0) & \partial g / \partial y(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{bmatrix}$$

Karaktäristiska polynomets, $s^2 + 2\gamma s + \omega^2$, nollställen $-\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ har, om $\gamma \leq \omega$, båda negativ realdel $-\gamma$ eller, om $\gamma > \omega$, två reella negativa nollställen $-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$. Jämvikten är alltså asymptotiskt stabil.

Vad kan sägas om något egenvärde till $df(x_0)$ har positiv realdel? Med ett resonemang liknande, men besvärligare, det som det vi använt ovan kan man visa följande sats.

Sats 90 Om $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ och $f \in \mathcal{C}^1$ i en omgivning av en jämviktspunkt x_0 till systemet $x' = f(x)$ och $df(x_0)$ är inverterbar så är x_0 labil om något egenvärde till $df(x_0)$ har positiv realdel.

Exempel 91 I jämviktspunkten $(\pi, 0)$ är

$$P = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x(\pi, 0) & \partial f / \partial y(\pi, 0) \\ \partial g / \partial x(\pi, 0) & \partial g / \partial y(\pi, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -2\gamma \end{bmatrix}$$

och karaktäristiska polynomets $s^2 + 2\gamma s - \omega^2$ har reella nollställen $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}$ där plustecknet alltid ger $\lambda > 0$. Jämviktspunkten $(\pi, 0)$ är därmed labil.

Observera att satserna 88 och 90 inte säger något i fallet då $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ om det råder likhet för något eller några nollställen λ till karaktäristiska polynomets.

Föreläsning 12

Stabilitet för olineära system

12.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(6.3) Ecological Models: Predators and Competitors.

(6.4) Nonlinear Mechanical Systems.

Genom linearisering kan man ibland avgöra om en jämviktpunkt är stabil eller inte. Metoden fungerar dock bara om det lineära systemets egenvärden alla har negativ realdel eller om något egenvärde har positiv realdel. Den metod vi nu skall studera har inte dessa brister, men förutsätter i stället att man kan konstruera en Liapunovfunktion.

12.2 Liapunovfunktioner

Först ett par definitioner.

Definition 92 En funktion $V : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, där D är en öppen mängd som innehåller 0, är positivt (negativt) semidefinit om $V(x) \geq 0$ (≤ 0) för $x \in D$ och $V(0) = 0$. Om dessutom $V(x) \neq 0$ då $x \neq 0$ är V positivt (negativt) definit.

Exempel 93 Funktionen $V(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x + y)^2 + y^2$ är positivt definit på $D = \mathbb{R}^2$.

Definition 94 Derivatan \dot{V}_f av V längs ett vektorfält $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ definieras som

$$\dot{V}_f(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x)$$

Exempel 95 Med $f(x, y) = (y, -x^3 - y)$ och samma V som i exempel 93 får vi

$$\dot{V}_f(x) = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y} (-x^3 - y) = -2xy - 4y^2 - 2x^4 - 4yx^3 - x^2$$

Följande resultat ger tillräckliga villkor för stabilitet respektive asymptotisk stabilitet.

Sats 96 Låt $x' = f(x)$ vara ett autonomt system med en isolerad jämviktpunkt i $x = 0$ och V en kontinuerligt deriverbar positivt definit funktion i en omgivning av 0 sådan att $\dot{V}_f(x)$ är negativt semidefinit. Då är 0 en stabil jämviktpunkt. Är dessutom \dot{V}_f negativt definit är jämviktpunkten asymptotiskt stabil.

Bevis. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och sätt $c = \min \{V(x) : \|x\| = \varepsilon\}$. Eftersom V är positivt definit är $c > 0$ och eftersom $\{x : V(x) < c/2\} \cap \{x : \|x\| < \varepsilon\}$ är en öppen omgivning till 0 finns $\delta > 0$ så att

$$\{x : \|x\| < \delta\} \subset \{x : V(x) < c/2\} \cap \{x : \|x\| < \varepsilon\}$$

Om nu $\|b\| < \delta$ och $x(t)$ en lösning till $x' = f(x)$, $x(0) = b$ så följer av kedjeregeln och förutsättningen att $\dot{V}_f(x) \leq 0$ att

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= V(b) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} V(x(\tau)) d\tau \\ &= V(b) + \int_0^t \dot{V}_f(x(\tau)) d\tau \leq V(b) < \frac{c}{2} \end{aligned} \quad (12.1)$$

för alla $t \geq 0$ och då måste också $\|x(t)\| < \varepsilon$ gälla för alla $t \geq 0$ eftersom $\|x(t_0)\| = \varepsilon$ medför att $V(x(t_0)) \geq c$.

Är dessutom $\dot{V}_f(x) < 0$ så snart $x \neq 0$, är jämviktpunkten asymptotiskt stabil, ty om inte $x(t)$ går mot 0 då $t \rightarrow +\infty$ så är

$$0 < \varepsilon_0 = \min \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)), 1 \right\} \leq 1$$

och $V(x(t)) \geq \varepsilon_0$ för $t \geq 0$, eftersom $t \mapsto V(x(t))$ är en avtagande funktion.

Men på den kompakta mängden $\{x : \varepsilon_0 \leq V(x) \leq 1\}$ är $\dot{V}_f(x) \leq -\delta < 0$ för något tal δ och då är enligt (12.1)

$$V(x(t)) = V(b) + \int_0^t \dot{V}_f(x(\tau)) d\tau \leq V(b) - \int_0^t \delta d\tau = V(b) - \delta t$$

som innebär att $V(x(t))$ blir negativt för stora t vilket är en motsägelse. ■

Funktionen V är en *liapunovfunktion*. Tyvärr finns ingen generell metod att konstruera sådana funktioner till ett givet system av differentialekvationer. Man vet inte ens om det finns liapunovfunktioner till alla autonoma system. För problem som har sitt ursprung i fysik, speciellt mekanik, kan man ofta använda en energifunktion som liapunovfunktion, vilket visas i exemplet 97 nedan. Exemplet visar också att en liapunovfunktion kan hantera situationer där stabiliteten inte går att avgöra genom linearisering.

Exempel 97 *En svagt dämpad pendel, där dämpningen är proportionell mot hastigheten i kubik, beskrivs matematiskt av systemet*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 \sin x - \gamma y^3 \end{cases} \quad \gamma, \omega > 0$$

som har en isolerad jämviktpunkt i $(0, 0)$. För den odämpade pendeln (där $\gamma = 0$) har vi en separabel ekvation $\omega^2 \sin x dx + y dy = 0$ med potentialen (=totala energin i systemet)

$$V(x, y) = \int \omega^2 \sin x dx + \int y dy = \omega^2 (1 - \cos x) + \frac{y^2}{2}$$

som är positivt definit för $|x| < \pi$. Vidare är

$$\dot{V}(x, y) = -\gamma y^4 \leq 0$$

och alltså negativt semidefinit. Av sats 96 följer att vi har en stabil jämviktpunkt.

Observera att eftersom $\dot{V}(x, y) = -\gamma y^4$ i exempel 97 bara är semidefinit, kan vi inte dra slutsatsen att $(0, 0)$ är asymptotiskt stabil trots att detta rimligen är fallet. För att visa asymptotisk stabilitet behöver vi konstruera en mer raffinerad Liapunovfunktion. En annan möjlighet är att förbättra satsen 96, vilket vi gör i sats 100.

Nästa sats ger ett tillräckligt villkor för instabilitet hos en jämviktspunkt.

Sats 98 Låt $x' = f(x)$ vara ett autonomt system med en isolerad jämviktspunkt i $x = 0$ och V kontinuerligt deriverbar med \dot{V}_f positivt definit i en omgivning $\{x : \|x\| \leq r\}$ av 0. Antag vidare att $V(0) = 0$ och att varje omgivning till 0 innehåller någon punkt b där $V(b) > 0$. Då är 0 en labil jämviktspunkt.

Bevis. För godtyckligt δ med $0 < \delta < r$ väljer vi b så att $V(b) = \max\{V(x) : \|x\| \leq \delta\}$ och $\|b\| \leq \delta$.

Då är $V(b) > 0$ enligt förutsättningen, vilket också medför att $b \neq 0$. Låt sedan $x(0) = b$. Mängden $K = \{x : \|b\| \leq \|x\| \leq r\}$ är kompakt och eftersom V och \dot{V}_f är kontinuerliga, och \dot{V}_f dessutom positiv, gäller att $a = \min\{\dot{V}_f(x) : x \in K\} > 0$ och $A = \max\{V(x) : x \in K\} < \infty$.

Då följer att

$$V(x(t)) = V(b) + \int_0^t \dot{V}_f(x(\tau)) d\tau \geq V(b) + \int_0^t a d\tau = V(b) + at > V(b)$$

för alla $t > 0$ vilket dels visar att $\|x(t)\| > \|b\|$ och, efter en tid, även att $\|x(t)\| > r$ eftersom $\|x(t)\| \leq r$ medför att $V(x(t)) \leq A$. Jämviktspunkten är alltså instabil. ■

Exempel 99 Vi exemplifierar sats 98 genom att analysera den dämpade pendeln från exempel 97 i jämviktspunkten $x = \pi$ och $y = 0$.

Lösning:

Med variabelbytet $x = \pi + u$ och $y = v$ får vi systemet

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \omega^2 \sin u - \gamma v^3 \end{cases}$$

och med funktionen $V(u, v) = v\omega^2 \sin u - \gamma v^4/4$ blir

$$\dot{V}(u, v) = v^2 \omega^2 \cos u + (\omega^2 \sin u - \gamma v^3)^2$$

som är positivt definit om $|u| < \pi/2$. Punkter (u, v) godtyckligt nära $(0, 0)$ med $V(u, v) > 0$ får vi om $0 < v < \sqrt[3]{(4\omega^2/\gamma) \sin u}$. Av sats 98 följer att jämviktspunk-

ten är labil. Samma slutsats fås förstås med linearisering som ger koefficientmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

och karakteristiska polynomet $p(s) = s^2 - \omega^2 = (s - \omega)(s + \omega)$ som har ett positivt nollställe.

För att sats 96 skall garantera asymptotisk stabilitet krävs att \dot{V}_f är negativt definit. Detta kan ibland vara svårt att åstadkomma och följande förbättring av sats 96 är därför värdefull.

Sats 100 Låt $x' = f(x)$ vara ett autonomt system med en isolerad jämviktpunkt i $x = 0$ och V en kontinuerligt deriverbar positivt definit funktion sådan att $\dot{V}_f(x)$ är negativt semidefinit. Om $x(t) \equiv 0$ är den enda lösningen till $x' = f(x)$ som ligger i mängden $\left\{x : \dot{V}_f(x) = 0\right\}$ är jämviktpunkten $x = 0$ asymptotiskt stabil.

Satsen illustrerars i exempel 99 nedan. Om \dot{V}_f är negativt definit är $\left\{x : \dot{V}_f(x) = 0\right\} = \{0\}$ och den sista slutsatsen i sats 96 är därför ett specialfall av sats 100.

Bevis. Eftersom $V(x(t))$ är avtagande för $t \geq 0$, existerar gränsvärdet $a = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) \geq 0$. Vidare är $\|x(t)\|$ begränsad och då finns också enligt Bolzano-Weierstrass sats¹ en följd $t_n \rightarrow \infty$ så att $x(t_n)$ har ett gränsvärde b då $n \rightarrow \infty$.

Sätt $y_n(t) = x(t + t_n)$ och definiera y som lösningen till $y' = f(y)$ med $y(0) = b$. Då gäller att $y'_n = f(y_n)$ och $y_n(0) = x(t_n)$ och sats 38 ger att

$$\|y_n(t) - y(t)\| \leq \|y_n(0) - y(0)\| e^{Lt} = \|x(t_n) - b\| e^{Lt}$$

vilket medför att $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$ för alla $t \geq 0$ där lösningarna är definierade. Speciellt gäller för $t \geq 0$ att $V(y(t))$ är konstant eftersom

$$V(y(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(y_n(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t + t_n)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a$$

vilket medför att $y(t) \in \left\{x : \dot{V}_f(x) = 0\right\}$ då

$$\dot{V}_f(y(t)) = \frac{d}{dt} V(y(t)) = 0$$

Enligt förutsättningarna i satsen innebär detta att $y(t) \equiv 0$ och således är $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = a = 0$ och därmed $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, vilket skulle bevisas. ■

Exempel 101 Undersök stabiliteten i origo till systemet

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = x^2 - y^3 \end{cases}$$

¹Se lämplig analysbok.

Lösning:

Ansatsen $V(x, y) = ax^2 + by^2$ ger

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= (-2xy) \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) + (x^2 - y^3) \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) \\ &= 2(b - 2a)x^2y - 2by^4\end{aligned}$$

som med $b = 2$ och $a = 1$ ger $\dot{V}(x, y) = -4y^4$ som är negativt semidefinit. Om en lösning, $(x(t), y(t))$, skall uppfylla villkoret $y(t) \equiv 0$ måste emellertid också $x(t) \equiv 0$ gälla och då följer av sats 100 att jämvikten är asymptotiskt stabil.

Bilaga A

Några viktiga resultat från analys och lineär algebra

Här är några viktiga begrepp och resultat från tidigare kurser samlade. Någon kännedom om detta är värdefullt, rentav nödvändigt ibland, om man skall hänga med i resonemang och bevis. För den som eventuellt glömt något finns referenser till kurslitteraturen.

A.1 Euklidiska rum

Ett euklidiskt rum [4, Kap. E] eller [1, Kap. 7] är ett lineärt rum E med en *skalärprodukt* (u, v) [4, Def. E.II.1], [1, Kap. 7.1]. Via skalärprodukten och Cauchy-Schwarz olikhet [4, Kap. E.V] introduceras en *geometri* i rummet så att vi kan tala om *längder* $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ [4, Def. E.II.3] av vektorer $u \in E$ samt *avstånd* $\|u - v\|$ och *vinklar*

$$\alpha = \arccos \left(\frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \right) \quad (\text{A.1})$$

mellan vektorer i E som har positiv längd.

Den viktigaste vinkeln är den räta, $\alpha = \pi/2$, som enligt A.1 är ekvivalent med att $(u, v) = 0$. Två vektorer som bildar rät vinkel är *ortogonala*, vilket skrivs $u \perp v$. För ortogonala vektorer gäller *Pythagoras sats* $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ eller allmänna-

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2 \quad (\text{A.2})$$

om $(u_i, u_j) = 0$ för $j = 1, 2, \dots, n$.

En följd e_1, e_2, \dots av parvis ortogonala och *normerade* vektorer i E bildar ett *ON-system* [4, Def. E.II.5], [1, Kap. 7.2]. Det skall alltså för alla i och j gälla att

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Vektorerna i ett ON-system är alltid lineärt oberoende [4, Sats E.II.6] och om $u \in E$ och $v = \sum_{j=1}^n (u, e_j) e_j$ gäller att $u - v \perp e_j$ för $j = 1, 2, \dots, n$ [4, Lemma E.III.1]. Vektorn v kallas *ortogonal projektionen* av u på det n -dimensionella underrummet $V = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ som spänns upp av vektorerna e_1, e_2, \dots, e_n [4, Def. E.III.2b]. Projektionsoperatoren $P : u \mapsto v$ är linjär och av A.2 följer att

$$\|u\|^2 = \|u - Pu\|^2 + \sum_{j=1}^n |(u, e_j)|^2 \quad (\text{A.3})$$

För varje $v \in V$ är $Pv = v$ och med $u - v$ i stället för u i A.3 får vi

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \|u - v - P(u - v)\|^2 + \sum_{j=1}^n |(u - v, e_j)|^2 \\ &= \|u - Pu\|^2 + \sum_{j=1}^n |(u - v, e_j)|^2 \geq \|u - Pu\|^2 \end{aligned}$$

vilket visar att $\|u - Pu\| = \min_{v \in V} \|u - v\|$ med likhet om och endast om $(u - v) \perp V$ och karakteriserar därmed den ortogonala projektionen Pu som den bästa approximationen av u med vektorer i V ("Minsta kvadratmetoden").

A.2 Serier

En *numerisk serie* [10, Kapitel 1]

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \quad (\text{A.4})$$

är en följd av tal - termer - skrivna som en oändlig summa. Talen kan vara komplexa.

I en *funktionsserie* [10, Kapitel 2] är termerna i stället funktioner

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \quad (\text{A.5})$$

av en variabel t som också ibland är komplex. För varje fixt t är funktionsserien alltså en numerisk serie.

A.2.1 Konvergens

En numerisk serie, eller en funktionsserie för fixt t , är *konvergent*, respektive *punktvis konvergent*, om *delsummorna*

$$s_n = \sum_{j=1}^n u_j \text{ respektive } s_n(t) = \sum_{j=1}^n u_j(t)$$

har gränsvärde då $n \rightarrow +\infty$. Gränsvärdet s eller $s(t)$ kallas seriens summa. Alltså är

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \text{ och } s(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(t)$$

Summan till en funktionsserie är således en funktion.

A.2.2 Absolutkonvergens

Om serien

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} |u_j|$$

konvergerar är den ursprungliga serien *absolutkonvergent*. Ett viktigt resultat [10, Sats 1.2.16] säger att absolutkonvergenta serier är konvergenta. Omvändningen gäller däremot *inte*.

A.2.3 Likformig konvergens

För funktionsserier finns en på många sätt intressantare form av konvergens där vi i stället för att studera skillnaden $s(t) - s_n(t)$ för ett *fixt* värde på t i stället betraktar den *maximala* avvikelsen mellan summa och delsumma

$$\sup_{a \leq t \leq b} |s(t) - s_n(t)| = \|s - s_n\|_I$$

då t får *variera* i ett intervall $I = [a, b]$. Om *supremumnormen* $\|s - s_n\|_I \rightarrow 0$ då $n \rightarrow +\infty$ är serien A.5 likformigt konvergent [10, Definition 2.1.5]. Eftersom $|s(t) - s_n(t)| \leq \|s - s_n\|_I$ kommer likformigt konvergenta serier alltid att konvergera punktvis. Omvändningen gäller däremot *inte*.

Ett par värdefulla egenskaper hos likformig konvergens är att kontinuitet bevaras [10, Sats 2.1.8] och att funktionsserier får integreras [10, Sats 2.2.12] och ibland till och med deriveras [10, Sats 2.2.14] termvis.

A.2.4 Weierstrass majorantsats

Ett tillräckligt villkor för att serien A.5 skall konvergera likformigt ges i Weierstrass majorantsats [10, Sats 2.2.5].

Sats 102 Om den positiva serien $\sum_{j=1}^{\infty} \|u_j\|_I$ är konvergent så konvergerar funktionsserien $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(t)$ likformigt på intervallet I .

Notera analogin med satsen om absolutkonvergens [10, Sats 1.2.16] för numeriska serier.

A.3 Enkelintegraler

De viktigaste resultaten är integralkalkylens två huvudsatser. Den första handlar om integralen som funktion av den övre gränsen. Jämför [11, Sats 6.4.9].

Sats 103 Om u är en integrabel funktion på intervallet $a \leq t \leq b$ är funktionen

$$U(t) = \int_a^t u(\tau) d\tau \tag{A.6}$$

kontinuerlig för $a \leq t \leq b$ och om integranden u är kontinuerlig i t är U deriverbar där med $U'(t) = u(t)$.

Den andra om sambandet mellan integral och primitiv funktion. Jämför [11, Sats 6.4.10].

Sats 104 Om U är kontinuerlig på intervallet $a \leq t \leq b$ och deriverbar i $a < t < b$ med $u = U'$ gäller att

$$\int_a^b u(t) dt = U(b) - U(a) \quad (\text{A.7})$$

förutsatt att u är integrabel på $a \leq t \leq b$.

A.4 Dubbelintegraler

Dubbelintegralen $\iint_D u = \iint_D u(s,t) ds dt$ av en integrabel funktion u över en rektangel $D = \{s, t : a \leq s \leq b, A \leq t \leq B\}$ kan beräknas som två kapslade enkelintegraler så att vi antingen har

$$\iint_D u = \int_A^B \left(\int_a^b u(s,t) ds \right) dt$$

eller

$$\iint_D u = \int_a^b \left(\int_A^B u(s,t) dt \right) ds$$

förutsatt att funktionerna $t \mapsto \int_a^b u(s,t) ds$ och $s \mapsto \int_A^B u(s,t) dt$ existerar för alla $t \in [A, B]$ respektive $s \in [a, b]$. Eftersom det alltså gäller att

$$\int_A^B \left(\int_a^b u(s,t) ds \right) dt = \int_a^b \left(\int_A^B u(s,t) dt \right) ds \quad (\text{A.8})$$

utnyttjas A.8 ofta för att kasta om integrationsordningen när man har kapslade enkelintegraler.

A.5 Parameterintegraler

Funktioner av formen

$$F(x) = \int_a^b f(x,t) dt \quad (\text{A.9})$$

kallas *parameterintegraler* och spelar en viktig roll i matematiken. Integrationsintervallet (a, b) behöver inte vara begränsat. Laplacetransformen med $f(x, t) = e^{-st}u(t)$ och faltningsintegralen med $f(x, t) = g(x-t)h(t)$ är två specialfall med direkt anknytning till den här kursen medan Cauchys integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

är välkänt exempel för alla som läst komplex analys.

Det man ofta vill veta om en parameterintegral är när funktionen F är deriverbar och när formeln

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \quad (\text{A.10})$$

gäller. En bra utredning av detta finns i [11, Kapitel 5, avsnitt 5.1].

Bilaga B

Inversionsformeln

Sats 105 Antag att $U = \mathcal{L}\{u\}$ är definierad i halvplanet $\operatorname{Re} s > q$. Då gäller för varje $t > 0$ där u är kontinuerlig att

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n n^{n+1} U^{(n)}(n/t)}{t^{n+1} n!}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.1})$$

Vi visar formeln (B.1) i specialfallet då $t = 1$. Det allmänna fallet får vi sedan enkelt genom att utnyttja att om $g(t) = u(at)$ för $a > 0$ så är $\tilde{g}(s) = \tilde{u}(s/a)/a$. Detaljerna lämnas som övning.

Bevis. Låt $u : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ vara integrerbar över ändliga delintervall till $[0, \infty[$ med laplaceintegralen $U(s) = \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt$ absolutkonvergent för $\operatorname{Re} s > q$. Vi ska visa att

$$u(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n n^{n+1} U^{(n)}(n)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

om u är kontinuerlig i $t = 1$.

Transformen $U(s)$ har enligt sats 58 derivatorna

$$U^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty t^n u(t) e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re} s > q$$

och det gäller därmed att

$$\frac{(-1)^n n^{n+1} U^{(n)}(n)}{n!} = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^\infty t^n u(t) e^{-nt} dt$$

Vi inför funktionen

$$\varphi_n(t) = \frac{n^{n+1}}{n!} t^n e^{-nt}$$

och noterar att $\int_0^\infty \varphi_n(t) dt = 1$, $\varphi(t) \geq 0$ för $t \geq 0$ och att $\varphi(t)$ har för $t \geq 0$ sitt maximum i $t = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ För den fortsatta undersökningen behöver vi sedan en uppskattning av funktionerna $\varphi_n(t)$ på intervall av formen $|t - 1| > \delta > 0$, $t > 0$. Sätt därför

$$k = \sup \{te^{-t} : |t - 1| > \delta, t > 0\}$$

En enkel funktionsundersökning visar att $0 < k < e^{-1}$ och vi får därmed för $|t - 1| > \delta$, $t > 0$ att

$$\frac{\varphi_{n+1}(t)}{\varphi_n(t)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} te^{-t} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} k < 1$$

om n är tillräckligt stort, säg för $n \geq N$. Vidare gäller att följderna $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_1^\infty$ är avtagande och sätter vi $(1 + 1/N)^{N+1} k = p < 1$ så får vi för $n \geq N$ att

$$\varphi_{n+1}(t) \leq \varphi_n(t) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} k \leq p \varphi_n(t) \leq \dots \leq p^{n+1-N} \varphi_N(t)$$

om $|t - 1| > \delta$, $t > 0$.

Vi betraktar integralerna

$$\int_0^{1-\delta} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt, \int_{1+\delta}^{\infty} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt, n > q$$

Man har för båda integranderna uppskattningarna

$$\varphi_n(t) |u(t) - u(1)| \leq p^{n-N} \varphi_N(t) |u(t) - u(1)|, n > N$$

där vi kan anta att vi valt $N > q$ i den tidigare undersökningen. Det ger att

$$\int_0^{1-\delta} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt \rightarrow 0, \int_{1+\delta}^{\infty} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

eftersom $q^{n-N} \rightarrow 0$ och

$$\int_0^{\infty} \varphi_N(t) |u(t) - u(1)| dt = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} t^N e^{-Nt} |u(t) - u(1)| dt < \infty$$

Detta ger sedan med standardteknik att $I_n = \int_0^{\infty} \varphi_n(t) u(t) dt \rightarrow u(1)$ då $n \rightarrow \infty$. Ty antag att $\varepsilon > 0$ är given. Kontinuiteten i $t = 1$ ger då att det finns ett $\delta > 0$ sådant att $|u(t) - u(1)| < \varepsilon$ för $|t - 1| \leq \delta$. Vi gör därefter en uppdelning

$$\begin{aligned} I_n - u(1) &= \int_0^{\infty} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt = \int_0^{1-\delta} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt \\ &\quad + \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt + \int_{1+\delta}^{\infty} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt \end{aligned}$$

Här kan vi få beloppen av de båda yttre integralerna $< \varepsilon$ om n tillräckligt stort, säg för $n > n_0$. För den mellanliggande integralen får vi att

$$\begin{aligned} \left| \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi_n(t) (u(t) - u(1)) dt \right| &\leq \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi_n(t) |u(t) - u(1)| dt \\ &\leq \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi_n(t) \varepsilon dt \leq \int_0^{\infty} \varphi_n(t) \varepsilon dt = \varepsilon \end{aligned}$$

och det följer därmed att $|I_n - u(1)| < 3\varepsilon$ då $n > n_0$ ■

En noggrannare analys av beviset för inversionssatsen visar att påståendet i satsen är meningsfullt även för värden på t där u har en språngdiskontinuitet. Man kan visa att följande gäller.

Sats 106 Antag att $U = \mathcal{L}\{u\}$ är definierad i halvplanet $\operatorname{Re} s > q$. Då gäller för varje $t_0 > 0$ där höger- och vänstergränsvärdena $u(t_0 \pm) = \lim_{t \rightarrow t_0 \pm} u(t)$ existerar att

$$\frac{u(t_0+) + u(t_0-)}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n n^{n+1} U^{(n)}(n/t_0)}{t_0^{n+1} n!}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.2})$$

Litteraturförteckning

- [1] Karl Gustav Andersson, *Lineär algebra*, Studentlitteratur 2000.
- [2] Karl Gustav Andersson, Lars-Christer Böiers, *Ordinära differentialekvationer*, Studentlitteratur 1989.
- [3] Edwards & Penney. *Differential Equations, Computing and Modelling 4E*. Pearson/Prentice Hall 2008.
- [4] Peter Hackman. *Kossan*. Linköping 1999.
- [5] Peter Hackman. *Krypa-gå, Linjära algebrans tekniska och geometriska grunder*. Linköping 1999.
- [6] Kurt Hansson. *Laplacetransformer och lineära system*. Kompendium MAI.
- [7] Kurt Hansson. *Introduktion till Maple*. (pdf-dokument).
- [8] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos*. Elsevier Academic Press 2004.
- [9] Mats Neymark. *Kompletterande teorikompendium. Analys en variabel*. Kompendium MAI.
- [10] Mats Neymark. *Kompendium om konvergens*. Kompendium MAI.
- [11] Arne Persson, Lars-Christer Böiers. *Analys i flera variabler*. Studentlitteratur 1996.
- [12] Arne Persson, Lars-Christer Böiers. *Analys i en variabel*. Studentlitteratur 1990.
- [13] Ferdinand Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag 2000.