Föreläsning 3

Modeller för dynamiska förlopp

3.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(2.1) Population Models.

(2.2) Equilibrium Solutions and Stability.

(2.3) Acceleration-Velocity Models.

3.2 Autonoma ekvationer

Ekvationer av formen $y' = f(y)$ där högerledet inte beror explicit av den oberoende variabeln t kallas *autonoma*. Eftersom vi har

$$1 - \frac{y'}{f(y)} = 0 \tag{3.1}$$

är autonoma ekvationer separabla och om $F(y) = \int dy/f(y)$ får vi lösningar implicit som $t = F(y) + C$.

3.2.1 Jämviktspunkter

Omskrivningen (3.1) förusätter att $f(y) \neq 0$. Om $f(y) = 0$ för något $y = k$, får vi en *stationär* (tidsoberoende) lösning $y(t) \equiv k$ till den ursprungliga ekvationen. Ett värde k sådant att $f(k) = 0$ kallas en *jämviktspunkt* till ekvationen.

3.2.2 Stabilitet

Vi skall undersöka hur lösningar $y(t)$ till autonoma ekvationer uppträder som funktion av t för stora värden på t om begynnelsevärdet $y(0)$ ligger nära en jämviktspunkt k. Vi börjar med två definitioner.

Definition 14 *En jämviktspunkt k är stabil om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett tal $\delta > 0$, så att* $\max_{0\leq t<+\infty} |y(t) - k| \leq \varepsilon$ *för varje lösning $y(t)$ som uppfyller villkoret $|y(0) - k| \leq \delta$.*

En starkare form av stabilitet kallas *asymptotisk stabilitet*.

Definition 15 *En jämviktspunkt k är asymptotiskt stabil om det finns ett positivt tal δ så att* $\lim_{t\to+\infty} y(t) = k$ *för varje lösning som uppfyller villkoret $|y(0) - k| \leq \delta$.*

En jämviktspunkt som inte är stabil kallas *instabil* eller *labil* och karaktäriseras av att det finns ett positivt tal ε_0 så att $\max_{0\leq t<+\infty} |y(t) - k| > \varepsilon_0$ oavsett hur nära k vi väljer startvärdet $y(0)$, så länge $y(0) \neq k$ förstås.

Exempel 16 *Ekvationen $y' = r(y-k)$, där r är konstant, har $y = k$ som enda jämviktspunkt och alla lösningar kan skrivas $y(t) = k + Ae^{rt}$. Vi får $|y(0) - k| = |A|$ och*

$$|y(t) - k| = |A| e^{rt} = |y(0) - k| e^{rt}$$

vilket visar att k är stabil om $r \leq 0$ (där vi kan ta $\delta = \varepsilon$) och om $r < 0$ är k dessutom asymptotiskt stabil. Om $r > 0$ är k labil eftersom $\lim_{t\to+\infty} |y(t) - k| = +\infty$ *så snart $y(0) \neq k$.*

3.3 Logistisk tillväxt

Ett intressantare exempel är en differentialekvation som används för att beskriva populationsdynamiken i en biotop, så kallad *logistisk tillväxt*.

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{3.2}$$

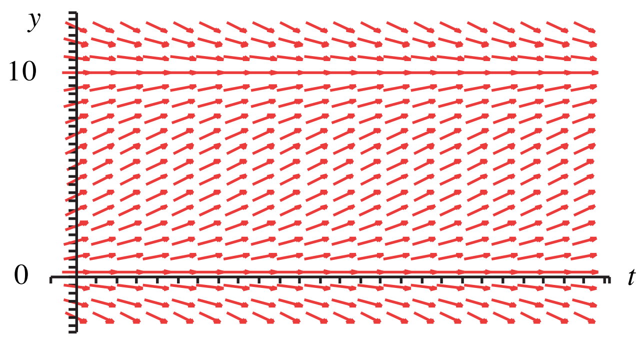
Funktionen y betecknar antalet individer i populationen och r och K är positiva konstanter som anger tillväxthastigheten hos populationen respektive biotopens kapacitet. Löser vi ekvationen i Maple med startvärdet $y(0) = y_0$ får vi

$$y(t) = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}$$

Vi ser att om $y_0 > 0$ så är

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = K$$

Riktningsfältet i figur 3.1 illustrerar också tydligt att $y = K$ är en asymptotiskt stabil jämviktspunkt medan $y = 0$ är labil



Figur 3.1: Riktningsfält till ekvation (3.2) med $K = 10$ och $r = 1$.

3.4 Stabilitetskriterier

För att undersöka det allmänna fallet antar vi att f är deriverbar i k. Med $y(t) = k + x(t)$ är $y' = x'$ och på grund av deriverbarheten får vi

$$f(y) = f(k+x) = f(k) + f'(k)x + \omega(x)x$$

där $\omega(x) \to 0$ då $x \to 0$. Vidare är $f(k) = 0$ och sätter vi $r = f'(k)$ får vi ekvationen

$$x' = rx + \omega(x)x$$

med $x(0) = y(0) - k \neq 0$.

Antag först att $r > 0$ och välj $\delta > 0$ så att $|\omega(x)| \leq r/2$ om $|x| \leq \delta$. Då gäller, så länge $|x(t)| \leq \delta$, att

$$\ln\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right| = \int_0^t \frac{x'(\tau)}{x(\tau)} d\tau = rt + \int_0^t \omega(x(\tau))\, d\tau \geq \frac{rt}{2}$$

vilket ger olikheten

$$|x(0)|\, e^{rt/2} \leq |x(t)| \leq \delta$$

och alltså är $|x(t)| = |y(t) - k| \geq \delta/2 = \varepsilon_0$ bara vi väntar tillräckligt länge hur litet $|x(0)| = |y(0) - k|$ än är från början. Jämviktspunkten k är därmed labil.

Om å andra sidan $r = -q < 0$ har vi med ett δ så att $|x| \leq \delta$ medför $|\omega(x)| \leq q/2$ olikheterna

$$\ln\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right| = -qt + \int_0^t \omega(x(\tau))\, d\tau \leq -\frac{qt}{2}$$
$$|y(t) - k| = |x(t)| \leq |x(0)|\, e^{-qt/2} \leq |x(0)| = |y(0) - k|$$

vilket visar att jämviktspunkten k är asymptotiskt stabil.

Vi sammanfattar i en sats.

Sats 17 *Om $f(k) = 0$ och $f'(k) > 0$ är k en labil jämviktspunkt och om $f'(k) < 0$ är k en asymptotiskt stabil jämviktspunkt till $y' = f(y)$.*

3.5 Tröskeleffekter

Om differentialekvationen (3.2) beskriver hur fiskpopulationen i en sjö varierar med tiden, kan man naturligtvis fråga sig hur denna påverkas av fiske. Antag att konstanten $h > 0$ betecknar antalet fiskar som skördas per tidsenhet. Då får vi ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - h \tag{3.3}$$

Högerledet kan efter faktorisering skrivas

$$f(y) = h\left(\frac{y}{T} - 1\right)\left(1 - \frac{y}{H}\right)$$

där konstanterna H och T ges av

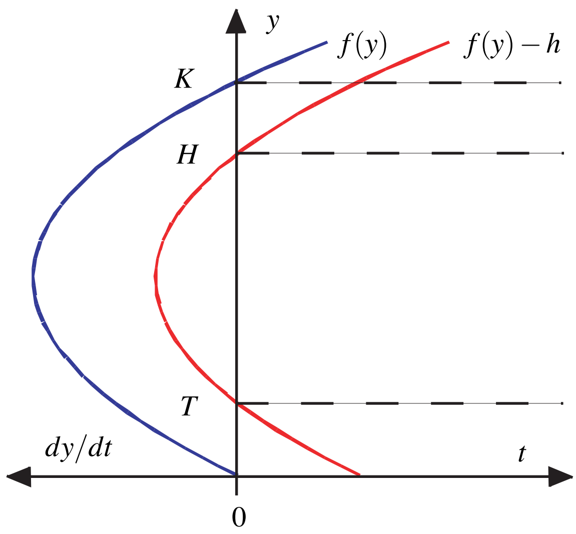
$$H = \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4h}{rK}}\right) \text{ och } T = \frac{K}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4h}{rK}}\right)$$

så att $H > T$.

Funktionen $f(y)$ har nollställena $y = T$ och $y = H$ och i dessa punkter är derivatorna

$$f'(T) = \frac{h}{TH}(H-T) > 0$$
$$f'(H) = -\frac{h}{TH}(H-T) < 0$$

Det följer av sats 17 att $y = T$ är labil medan $y = H$ är asymptotiskt stabil. Situationen illustreras i figur 3.2 nedan och modellen visar också att ett skördeuttag $h > rK/4$ medför att populationen dör ut.



Figur 3.2: Tröskelvärde vid skörd.

3.5.1 Ett gränsfall

Om $f(k) = f'(k) = 0$ kan man tyvärr inte dra några bestämda slutsatser vilket följande exempel visar.

Exempel 18 *Ekvationen $y' = -y^2$ har jämviktspunkten $y = 0$ och lösningen*

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y(0)} = t \Leftrightarrow y(t) = \frac{y(0)}{1+ty(0)} = \frac{1}{t-a}$$

om $y(0) = -1/a < 0$. Då gäller att $y(t) \to +\infty$ då $t \to a+$. Alltså labil.

Exempel 19 *Ekvationen $y' = -y^3/2$ har också jämviktspunkten $y = 0$ och lösningen*

$$\frac{1}{y^2(t)} - \frac{1}{y^2(0)} = t \Leftrightarrow y^2(t) = \frac{y^2(0)}{1+ty^2(0)}$$

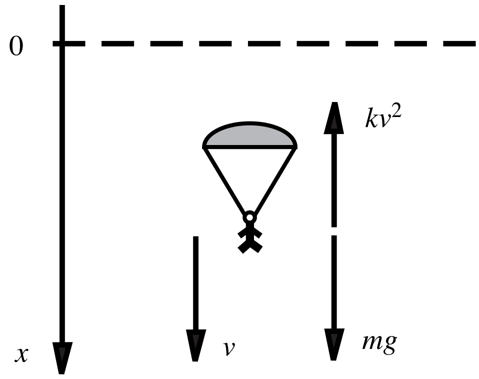
vilket medför att $|y(t)| \to 0$ då $t \to +\infty$. Alltså asymptotiskt stabil.

3.6 Hastighet och acceleration

Kombinationen av Newtons kraftekvation $F = ma$ och definitionen av acceleration $a = dv/dt$ och hastighet $v = ds/dt$ leder på ett naturligt sätt till differentialekvationer. I själva verket är det inom denna begreppssfär som teorin har sina rötter.

3.6.1 Fritt fall med luftmotstånd

Exempel 20 *En fallskärmshoppare (se fig. 3.3) som faller rakt ner under inverkan av gravitationen bromsas av luftmotsåndet som antas proportionellt mot kvadraten på hastigheten. Beräkna hastigheten som funktion av fallsträckan.*



Figur 3.3: Fritt fall med luftmotstånd.

Lösning

Newtons lag ger ekvationen

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

och om vi betraktar hastigheten v som en funktion av fallsträckan x blir $dv/dt = (dv/dx)(dx/dt) = v dv/dx$ vilket ger

$$mv\frac{dv}{dx} = mg - kv^2 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{mg - kv^2}{mv}$$

Den stationära lösningen ges av $mg - kv^2 = 0$ och representerar den gränshastighet $v_0 = \sqrt{mg/k}$ som uppnås då tyngd och luftmotstånd är lika stora. Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{dv}{dx} = g\frac{1 - (v/v_0)^2}{v}$$

Lösningen får med $v(0) = 0$ följande utseende

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2gx}{v_0^2}\right)}$$

Genom att lösa ekvationen $v(x) = 99v_0/100$, ser vi att 99% av gränshastigheten uppnås redan efter fallsträckan

$$x_{99} = \frac{v_0^2}{2g} \ln\left(\frac{10000}{199}\right) \approx 1.8\,\mathrm{m}$$

om $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ och $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$.