Föreläsning 4

Lineära ekvationer av högre ordning

4.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(3.1) Introduction: Second-Order Linear Equations.

(3.2) General Solutions of Linear Equations.

(3.3) Homogeneous Equations with Constant Coefficients

4.2 Lineära ekvationer av andra ordningen

Lineära differentialekvationer av andra ordningen skrivs allmänt

$$A(x)\,y'' + B(x)\,y' + C(x)\,y = F(x) \tag{4.1}$$

där A, B, C och F är kontinuerliga funktioner av x i något öppet intervall $I =]a,b[$ som inte behöver vara begränsat. En lösning är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $y(x)$ som är definierad i I och satisfierar (4.1). Som begynnelsedata anger man värdena $y(x_0)$ och $y'(x_0)$ för något $x_0 \in I$.

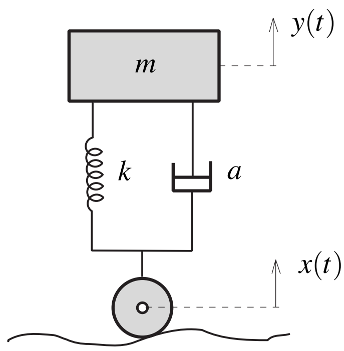
Normalt antar vi att $A(x) \neq 0$ för alla $x \in I$ och kan då skriva (4.1) på formen

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \tag{4.2}$$

4.2.1 Exempel från mekanik och ellära

Hjulupphängning med stötdämpare

Som ett typexempel på en differentialekvationer av formen (4.2), betraktar vi en förenklad modell av hjulupphängningen i en bil eller landningsstället i ett flygplan. Systemet beskrivs schematiskt av figur 4.1. Sambandet mellan accelerationen $y''(t)$



Figur 4.1: Landningsställ.

och de krafter som påverkar fordonet med massan m blir med Newtons kraftlag $ma = F$

$$my'' = k(x-y) + a(x' - y')$$

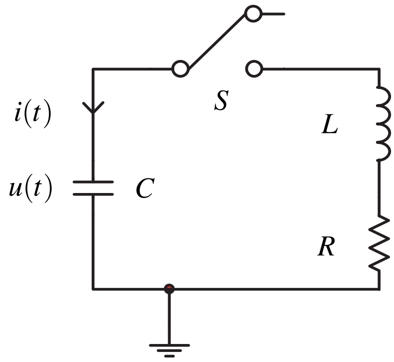
där vi antar att motkraften i oljestötdämparen är proportionell mot den relativa hastigheten $x' - y'$. Efter omskrivning får vi ekvationen

$$y'' + py' + qy = f \tag{4.3}$$

där $p = a/m$, $q = k/m$ och $f(t) = ax'(t)/m + kx(t)/m$.

Resonanskrets

Ett exempel från elektricitetsläran får vi om vi betraktar resonanskretsen i figur 4.2.



Figur 4.2: Resonanskrets.

Sambanden

$$i = C\frac{du}{dt} \text{ och } -L\frac{di}{dt} - Ri - u = 0$$

ger en differentialekvation som beskriver hur spänningen u över kondensatorn varierar med tiden $t > 0$. Om man slår till strömbrytaren S vid $t = 0$ då kondensatorn är uppladdad med spänningen u_0 får vi följande begynnelsevärdesproblem om strömmen initialt är noll, $i(0) = Cu'(0) = 0$

$$\begin{cases} LCu'' + RCu' + u = 0 \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

4.3 Existens och entydighet av lösningar

Hela teorin vilar tungt på följande sats om existens och entydighet för lösningarna till (4.2). Beviset för denna sats och andra liknande resultat får emellertid anstå till föreläsning 7.

Sats 21 *För varje uppsättning begynnelsedata $y(x_0) = b_0$ och $y'(x_0) = b_1$, finns exakt en lösning, $y(x)$, till (4.2) som satisfierar dessa begynnelsedata.*

4.4 Homogena ekvationer

Vi skall till att börja med studera allmänna egenskaper hos lösningarna till (4.2) då högerledet $f = 0$. Sådana ekvationer kallas *homogena*.

4.4.1 Lösningens struktur

Lineära differentialekvationer skriver vi i fortsättningen som $L(y) = f$ där vi uppfattar L som den lineära avbildningen

$$L(y) \stackrel{\text{def}}{=} y'' + p(x)y' + q(x)y : \mathscr{C}^2(I) \to \mathscr{C}(I) \tag{4.4}$$

Tyvärr finns ingen generell lösningsmetod av typen ”integrerande faktor” eller liknande för ekvationer av högre ordning. Vad vi däremot kan konstatera är att eftersom L är en lineär avbildning så gäller att

$$L(ay_1 + by_2) = aL(y_1) + bL(y_2)$$

för godtyckliga konstanter a och b. En omedelbar följd av detta är att lösningsmängden

$$N(L) = \left\{ y \in \mathscr{C}^2(I) : L(y) = 0 \right\}$$

till den *homogena* ekvationen $L(y) = 0$ bildar ett *lineärt rum*.

4.4.2 Nollrummet

Låt nu y_1 och y_2 vara två lösningar till ekvationen (4.2) så att $L(y_1) = f$ och $L(y_2) = f$. Då är på grund av lineariteten $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f - f = 0$ och alltså $y_1 - y_2 \in N(L)$. Det innebär att när vi känner *en* lösning y_1 till den *inhomogena* ekvationen (4.2) och har god kännedom om nollrummet $N(L)$ så har vi också god kännedom om alla andra lösningar genom att vi vet att $y = y_1 + z$, där $z \in N(L)$.

I det allmänna fallet, då koefficienterna $p(t)$ och $q(t)$ inte är konstanta, har man ingen karaktäristisk ekvation och det finns inte heller någon annan enkel metod att finna explicita lösningar till $L(y) = 0$. Däremot kan man konstruera en bas för $N(L)$ på ett mera abstrakt sätt. Vi formulerar resultatet i följande sats.

Sats 22 *Låt y_1 och y_2 vara de två lösningarna till (4.2) med begynnelsedata*

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, \quad y_1'(x_0) = 0 \\ y_2(x_0) &= 0, \quad y_2'(x_0) = 1 \end{aligned}$$

vars existens och entydighet garanteras av sats 21. Då kan varje lösning till $L(y) = 0$ skrivas som en lineärkombination $y = ay_1 + by_2$.

Bevis. Om $L(y) = 0$ och $z = y(x_0)y_1 + y'(x_0)y_2$ så följer av lineariteten att även $L(z) = 0$. Vidare är $z(x_0) = y(x_0)$ och $z'(x_0) = y'(x_0)$ och på grund av entydigheten är $y = z$ ■

Speciellt följer det av sats 22 att nollrummet är tvådimensionellt och $N(L) = [y_1, y_2]$ [1].

[1] $[u, v, w, \ldots]$ betecknar lineära höljet till vektorerna $u, v, w, \ldots$.

4.4.3 Reduktion av ordning

Någon enkel metod att lösa $L(y) = 0$, och därmed bestämma $N(L)$, när p och q beror av x finns inte. Om vi däremot på något sätt (t.ex. genial gissning) har funnit *en* lösning $\phi \in N(L)$ är vi i ett bättre läge. Idén är då att ansätta $y = u\phi$ och bestämma funktionen $u = u(x)$ så att $y = u\phi \in N(L)$.

För att undersöka vad som krävs av u deriverar vi och får

$$y' = u'\phi + u\phi', \quad y'' = u''\phi + 2u'\phi' + u\phi''$$

Då blir eftersom $L(\phi) = 0$,

$$L(y) = \phi u'' + \left(2\phi' + p\phi\right)u' + uL(\phi) = \phi u'' + \left(2\phi' + p\phi\right)u'$$

och om vi även skall ha $L(y) = 0$, måste u satisfiera differentialekvationen

$$u'' + \left(2\frac{\phi'}{\phi} + p\right)u' = 0$$

som är lineär av första ordningen i derivatan $v = u'$. En integrerande faktor är

$$\exp\left(\int\left(2\frac{\phi'}{\phi} + p\right)dx\right) = \phi^2 e^{\int p\,dx}$$

och vi får

$$v = u' = \phi^{-2}e^{-\int p\,dx}$$

Om vi tur, lyckas vi integrera en gång till och kan då bestämma u och därmed $y = u\phi$.

Exempel 23 *Det är lätt att se att $y_1(x) = x$ löser ekvationen $x^2y'' - xy' + y = 0$ då $x > 0$. Bestäm en bas för nollrummet.*

Lösning:

Med $y = xu$ blir $y' = xu' + u$ och $y'' = xu'' + 2u'$ vilket ger

$$\begin{aligned} x^2y'' - xy' + y &= x^2\left(xu'' + 2u'\right) - x\left(xu' + u\right) + xu \\ &= x^2\left(xu'' + u'\right) = x^2\left(xu'\right)' = 0 \end{aligned}$$

och vi får

$$xu' = a \Leftrightarrow u = a\ln x + b \Rightarrow y = xu = ax\ln x + bx$$

Funktionerna $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x\ln x$ är lineärt oberoende och därmed en bas för det tvådimensionella nollrummet $N(L) = \left\{y : x^2y'' - xy' + y = 0,\ x > 0\right\}$.

4.5 Allmänna lineära ekvationer

Allt som sagts för andra ordningens ekvationer, speciellt satsen 21 om lösningens existens och entydighet, kan direkt generaliseras till allmänna lineära ekvationer $L(y) = f$ av ordning n där

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y \tag{4.5}$$

med kontinuerliga koefficienter och begynnelsedata

$$y(x_0) = b_0,\ y'(x_0) = b_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \tag{4.6}$$

Speciellt får vi att nollrummet $N(L) = \{y : L(y) = 0\}$ är ett n-dimensionellt lineärt rum.

4.6 Konstanta koefficienter

När koefficienterna $p_1, \ldots,\ p_n$ i (4.5) inte beror av x förenklas situationen avsevärt eftersom det alltid finns en lösning av formen $y = e^{rx}$ där r är ett (ev. komplext) nollställe till ekvationens *karaktäristiska polynom*

$$P(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n \tag{4.7}$$

eftersom vi har $L(e^{rx}) = P(r)\,e^{rx}$ om koefficienterna är konstanta. Förfarandet med reduktion av ordning kan sedan användas succesivt för att minska ekvationens ordning.

Exempel 24 *Ange en bas för lösningsrummet till* $y'' + 4y' + 4y = 0$

Lösning:

Karaktäristiska polynomet $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2$ har ett nollställe $r = -2$ och ansatsen $y = e^{-2x}u$ ger

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}u'' &= 0 \\ u &= ax + b \\ y &= axe^{-2x} + be^{-2x} \end{aligned}$$

och som basvektorer kan vi ta $y_1(x) = e^{-2x}$ och $y_2(x) = xe^{-2x}$. Mer komplicerade ekvationer hanteras bäst med funktionen `dsolve` i Maple.