

## Föreläsning 5

# Inhomogena ekvationer

### 5.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(3.5) Nonhomogeneous Equations and Underdetermined Coefficients.

(3.6) Forced Oscillations and Resonance.

(3.7) Electrical Circuits.

---

## 5.2 Partikulärlösningar

Vi har sett att om  $\{y_1, y_2\}$  är en bas för  $N(L)$  kan *varje* lösning till  $L(y) = f$  skrivas

$$y(x) = y_p(x) + ay_1(x) + by_2(x)$$

om vi bara kan hitta *en* lösning  $y_p$  till ekvationen.

Att konstruera partikulärlösningar till  $L(y) = f$  innebär att studera den inversa avbildningen  $L^{-1}$ . Då  $N(L) \neq \{0\}$  får vi dock nöja oss med en ”partiell invers” varmed avses en linjär avbildning  $M: \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}^2(I)$  sådan att  $y = M(f)$  medför att  $L(y) = f$  med begynnelsedata  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ .

Förfarandet kallas Lagranges metod och påminner starkt om reduktion av ordning från förra föreläsningen. Utgångspunkten är en bas  $\{y_1, y_2\}$  för  $N(L)$  och ansatsen

$$y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \quad (5.1)$$

där vi i stället för konstanter har multiplicerat med *funktioner*  $u$  och  $v$ . Vi skall sedan bestämma  $u$  och  $v$  så att  $y$  blir en lösning till  $L(y) = f$ . Deriverar vi  $y$  får vi

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) + u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x) \\ &= u(x)y_1'(x) + v(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

där sista likheten förutsätter att vi valt  $u$  och  $v$  så att

$$u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0$$

Nästa derivata blir i så fall

$$y''(x) = u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) + u(x)y_1''(x) + v(x)y_2''(x)$$

och därmed får vi, eftersom  $L(y_1) = L(y_2) = 0$ , att

$$L(y) = uL(y_1) + vL(y_2) + u'y_1' + v'y_2' = u'y_1' + v'y_2'$$

Således är (5.1) en partikulärlösning om vi väljer funktionerna  $u$  och  $v$  så att derivatorna  $u'$  och  $v'$  satisfierar ekvationssystemet

$$\begin{cases} u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0 \\ u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (5.2)$$

Löser vi (5.2) får vi

$$u' = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} \text{ och } v' = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \quad (5.3)$$

Funktionen

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

kallas *Wronskis determinant*. För att  $u$  och  $v$  skall vara väldefinierade genom ekvationerna (5.3) måste  $W(x) \neq 0$  vilket garanteras av följande sats.

**Sats 25** Om två funktioner  $y_1$  och  $y_2$  i  $N(L)$  är sådana att  $W(x_0) = 0$  för något tal  $x_0 \in I$  så är  $y_1$  och  $y_2$  lineärt beroende.

**Bevis.** Antag att  $W(x_0) = 0$ . Vi skall visa att det finns konstanter  $a$  och  $b$  som inte båda är noll så att  $ay_1(x) + by_2(x) \equiv 0$  för alla  $x \in I$ . Vi vet att det finns konstanter  $a$  och  $b$ , som inte båda är noll, så att

$$\begin{cases} ay_1'(x_0) + by_2'(x_0) = 0 \\ ay_1(x_0) + by_2(x_0) = 0 \end{cases}$$

Då gäller, med  $z(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ , att  $z \in N(L)$  och  $z(x_0) = z'(x_0) = 0$  vilket enligt sats 21 medför att  $z(x) \equiv 0$  och således är  $y_1$  och  $y_2$  lineärt beroende ■

Ekvationerna (5.3) kan nu integreras och med

$$u(x) = - \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt \text{ och } v(x) = \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt$$

får vi en partikulärlösning som kan skrivas som en integral

$$\begin{aligned} y(x) &= -y_1(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} f(t) dt \end{aligned}$$

Den "inversa" avbildningen  $y = M(f)$  ges alltså av *integraloperatorn*

$$y(x) = \int_{x_0}^x K(x,t) f(t) dt \quad (5.4)$$

Funktionen  $K(x,t)$  kallas *kärna* och ges av uttrycket

$$K(x,t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{W(t)} \quad (5.5)$$

**Exempel 26** Funktionerna  $\{\cos, \sin\}$  är standardbasen i 0 för  $y'' + y = 0$  och

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

Vi får

$$K(x,t) = \cos t \sin x - \cos x \sin t = \sin(x-t)$$

vilket ger partikulärlösningen

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t) dt \quad (5.6)$$

till  $y'' + y = f$ .

### 5.3 Karaktärisering av partikulärlösningen

Sätter vi  $x = x_0$  i ekvation (5.4) får vi  $y(x_0) = 0$ . Deriverar vi sedan (5.4) med avseende på  $x$  får vi

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y_1'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \\ &\quad - y_1(x) \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} + y_2(x) \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \\ &= -y_1'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)} dt + y_2'(x) \int_{x_0}^x \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)} dt \end{aligned}$$

vilket visar att även  $y'(x_0) = 0$ . Partikulärlösningen som ges av (5.4) kan därmed enligt sats 21 entydigt karaktäriseras som den lösning till  $L(y) = f$  som har begynnelsedata  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ .

**Exempel 27** Skriv, som en integral, en partikulärlösning till ekvationen  $y'' - y'/x + y/x^2 = f(x)$  från exempel 23, då  $f$  är kontinuerlig för  $x > 0$ .

#### Lösning:

Med baslösningarna  $y_1(x) = x$  och  $y_2(x) = x \ln x$  blir

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x$$

vilket enligt (5.5) ger kärnan

$$K(x, t) = \frac{tx \ln x - xt \ln t}{t} = x \ln \left( \frac{x}{t} \right)$$

och vi får, med  $x, x_0 > 0$ , enligt (5.4) lösningen

$$y(x) = \int_{x_0}^x x \ln \left( \frac{x}{t} \right) f(t) dt$$

där  $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ .

### 5.4 Resonans

Betrakta lösningen (5.6) i exempel 26 med  $f(x) = A \sin \omega x$ . Då blir

$$y(x) = A \int_0^x \sin(x-t) \sin \omega t dt = \begin{cases} \frac{\omega A}{\omega^2 - 1} \sin x - \frac{A}{\omega^2 - 1} \sin \omega x, & \omega \neq 1 \\ \frac{A}{2} \sin x - \frac{A}{2} x \cos x, & \omega = 1 \end{cases}$$

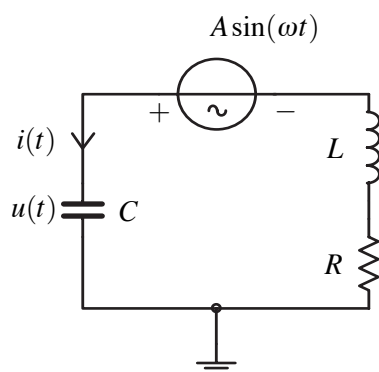
Vi ser att även om högerledet är en begränsad funktion med  $|f(x)| \leq A$  så kan lösningens belopp anta stora värden då  $\omega$  är nära 1 och om  $\omega = 1$  är lösningen inte ens begränsad.

Fenomenet kallas *resonans* och inträffar då högerledet  $f$  innehåller periodiska komponenter med frekvenser som sammanfaller med eller ligger nära nollställena till det karakteristiska polynomet. Mera precist: Om  $L$  har konstanta koefficienter så att  $L(e^{\alpha x}) = P(\alpha)e^{\alpha x}$  så är  $y(x) = Ae^{i\omega x}/P(i\omega)$  en partikulärlösning till  $L(y) = f$  med  $f(x) = Ae^{i\omega x}$  och även om  $|f(x)| = A$  är ett litet tal kan

$$|y(x)| = \frac{A}{|P(i\omega)|}$$

bli mycket stor om  $P(i\omega)$  ligger nära noll.

**Exempel 28** Betrakta resonanskretsen i figur 5.1, där strömbrytaren i figur 4.2 ersätts med ett växelspanningsaggregat, t.ex. en radioantenn, med spänningen  $A \sin \omega t$  och möjlighet att variera frekvensen  $\omega$ . Övriga beteckningar är samma som i figur 4.2. Bestäm maximala förstärkningen,  $F(\omega)/A$ , för resonanskretsen då  $\omega$  varierar.



Figur 5.1: Resonanskrets.

### Lösning:

Vi får analogt med exemplet i förra föreläsningen ekvationerna

$$i = C \frac{du}{dt} \text{ och } A \sin \omega t - L \frac{di}{dt} - Ri - u = 0$$

vilket ger

$$LCu'' + RCu' + u = A \sin \omega t = \text{Im}(Ae^{i\omega t})$$

och en partikulärlösning får vi som

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Im} \left( \frac{Ae^{i\omega t}}{LC(i\omega)^2 + RCi\omega + 1} \right) \\ &= \frac{A}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \operatorname{Im} \left( (1 - LC\omega^2 - RCi\omega) e^{i\omega t} \right) \\ &= A \frac{(1 - LC\omega^2) \sin \omega t - RC\omega \cos \omega t}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2} \\ &= \frac{A \sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \end{aligned}$$

Således är

$$\begin{aligned} \frac{F(\omega)}{A} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} = G(RC\omega) \\ G(x) &= \frac{1}{\sqrt{(1 - Q^2x^2)^2 + x^2}} \end{aligned}$$

som är maximal för det värde på den dimensionslösa frekvensvariabeln  $x = RC\omega \geq 0$  som minimerar funktionen  $p(x) = (1 - Q^2x^2)^2 + x^2$  och där kretsens  $Q$ -värde definierats som kvoten mellan kretsens två tidskonstanter,  $\sqrt{LC}$  och  $RC$ , där den första bestämmer periodtiden för oscillationer i den odämpade ( $R = 0$ ) resonanskretsen och den andra hur snabbt fria ( $A = 0$ ) oscillationer dämpas på grund av energiförlusterna när  $R > 0$ .

$$Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$$

Funktionsundersökning ger att

$$\min_{x \geq 0} p(x) = \begin{cases} p(0) = 1, & Q \leq 1/\sqrt{2} \\ p(x_0) = \frac{4Q^2 - 1}{4Q^4}, & Q > 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

och

$$x_0 = RC\omega_0 = \frac{\sqrt{Q^2 - 1/2}}{Q^2}$$

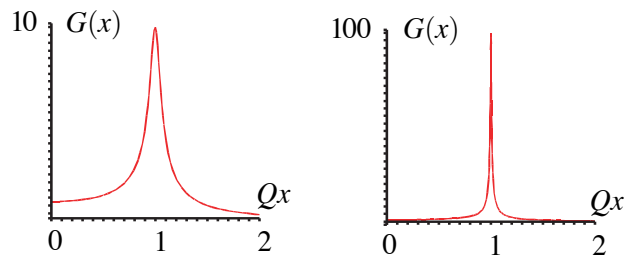
Vi får därmed att

$$\max_{\omega \geq 0} \left( \frac{F(\omega)}{A} \right) = \max_{x \geq 0} G(x) = \begin{cases} 1, & Q \leq 1/\sqrt{2} \\ \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}, & Q > 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

För att en resonanskrets skall fungera väl, t.ex. som avstämningkrets i en radiomottagare, bör den ha ett  $Q$ -värde på 100. Då kan med god approximation formlerna ovan förenklas till

$$x_0 = RC\omega_0 \approx \frac{1}{Q}, \quad \max_{x \geq 0} G(x) \approx Q$$

Figureerna nedan illustrerar hur förstärkningen  $G(x) = F(\omega)/A$  hos resonanskretsen beror av frekvensen då  $Q = 10$  respektive  $Q = 100$ .



Figur 5.2: Förstärkning med  $Q = 10$  respektive  $Q = 100$ .