Föreläsning 6

System av differentialekvationer

6.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(4.1) First-Order Systems and Applications.

(4.2) The Method of Elimination.

6.2 System av första ordningen

I många sammanhang uppträder differenetialekvationer naturligt som system där två eller flera funktioner skall bestämmas.

Exempel 29 *I resonanskretsen i figur 5.1, föreläsning 5, beskrivs strömmen $i(t)$ och spänningen $u(t)$ av systemet*

$$\begin{cases} di/dt = -Ri/L - u/L + e(t)/L \\ du/dt = i/C \end{cases}$$

där $e(t) = A \sin \omega t$.

Ett system av första ordningen med två ekvationer ser allmänt ut på följande sätt

$$\begin{cases} dy_1/dx = f(x, y_1, y_2) \\ dy_2/dx = g(x, y_1, y_2) \end{cases} \tag{6.1}$$

där funktionerna $y_1(x)$ och $y_2(x)$ skall bestämmas för alla x i något öppet intervall I. Ett ännu allmännare system med n ekvationer ser då ut så här

$$\begin{cases} dy_1/dx = f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ dy_2/dx = f_2(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \vdots \\ dy_n/dx = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n) \end{cases} \tag{6.2}$$

Både (6.1) och (6.2) kan emellertid skrivas mycket kompaktare som

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.3}$$

om vi betraktar y och f som en vektorvärda funktioner: $y : I \to \mathbb{R}^n$ och $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ så att $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ och $f = (f_1, f_2, \dots f_n)$ i det n-dimensionella fallet. Med derivatan $dy/dx = y'$ förstår vi då vektorn $(y_1', y_2', \dots y_n')$ där alla komponenterna deriverats med avseende på x.

6.3 Ekvationer av högre ordning som system

System av formen (6.2) eller (6.3) är i själva verket mycket allmänna och innehåller som specialfall alla differentialekvationer av ordning n som kan skrivas på formen

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

Detta inses genom att betrakta derivatorna upp till ordning $n-1$ som komponenter i en n-dimensionell vektor $Y = \left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$. Vi får då $dY/dx = \left(y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)$ och därmed

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ f(x,Y) \end{bmatrix} = F(x,Y)$$

Exempel 30 *Stötdämparen i figur 4.1, föreläsning 5, beskrivs av ekvationen $y'' + py' + qy = f(t)$, vilken som system med $y_1 = y$ och $y_2 = y'$ kan skrivas*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ f(t) - qy_1 - py_2 \end{bmatrix}$$
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

där den sista omskrivningen av ekvationen med konstanta matriser A och B som $y' = Ay + Bf$ är en följd av att ekvationen är lineär och har konstanta koefficienter.

Övning 31 *Hur ser matriserna A och B ut i exemplet med resonanskretsen?*

6.4 Begynnelsevärden och entydighet

Precis som i det skalära fallet krävs ytterligare villkor på den vektorvärda lösningen $y(x)$ till systemet (6.3) om funktionen skall vara entydigt bestämd. Normalt ger man då begynnelevillkor av formen $y(x_0) = b$, där $b \in \mathbb{R}^n$ är en given vektor och $x_0 \in I$. Vi skall i nästa föreläsning precisera villkor som garanterar att begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = b \tag{6.4}$$

har entydigt bestämd lösning.

6.5 Räkning med vektorvärda funktioner

Som vi redan sett definieras derivatan u' av den vektorvärda funktionen $u : I \to \mathbb{R}^n$ genom att man deriverar komponentfunktionerna. Helt analogt definieras integralen

$$\int_a^b u(x)\,dx = \left(\int_a^b u_1(x)\,dx, \int_a^b u_2(x)\,dx, \ldots, \int_a^b u_n(x)\,dx\right)$$

som den vektor man får genom att integrera komponenterna.

6.5.1 Räkneregler

Följande räkneregler gäller och är heller inte svåra att visa.

1. $(Au)' = Au'$ och $\int_a^b Au(x)\,dx = A\left(\int_a^b u(x)\,dx\right)$ om A är en konstant $n \times n$-matris.
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ och $\int_a^b c \cdot u(x)\,dx = c \cdot \left(\int_a^b u(x)\,dx\right)$ om c är en konstant vektor och $u \cdot v$ betecknar den vanliga skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$.
3. Integralkalkylens huvudsatser: $\frac{d}{dx}\int_a^x u(t)\,dt = u(x)$ och $\int_a^b u'(x)\,dx = u(b) - u(a)$.
4. $\left\|\int_a^b u(x)\,dx\right\| \le \int_a^b \|u(x)\|\,dx$, där längden av u definieras av $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$.
5. Vi har även olikheten $\|Au\| \le \|A\|\,\|u\|$ där matrisnormen definieras som $\|A\| = \max_{u \neq 0} \|Au\| / \|u\|$.

Bevis. Reglerna 1, 2 och 6.3 följer direkt ur definitionen och lämnas som övning. För att visa 4 utnyttjar vi Cauchys olikhet, $|u \cdot v| \le \|u\|\,\|v\|$, på följande sätt: Låt $c = \int_a^b u(x)\,dx$. Påståendet är trivialt om $c = 0$ och om inte, så gäller enligt 6.4 och Cauchy att

$$\begin{aligned}\|c\|^2 = c \cdot c = c \cdot \int_a^b u(x)\,dx &\overset{\text{Enligt 2}}{=} \int_a^b c \cdot u(x)\,dx \\ \le \int_a^b |c \cdot u(x)|\,dx &\overset{\text{Cauchy}}{\le} \int_a^b \|c\|\,\|u(x)\|\,dx = \|c\| \int_a^b \|u(x)\|\,dx\end{aligned}$$

vilket efter division med $\|c\| > 0$ ger den sökta olikheten. ■

6.6 Differentialekvationen som integralekvation

I många komplicerade situationer, såväl teoretiska som praktiska, är det enklare att arbeta med integraler än med derivator. Detta beror på att man ofta måste göra uppskattningar av de ingående storheterna och då är räkneregeln 4 ovan, som saknar motsvarighet för derivator, mycket användbar.

Sats 32 *Om $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en kontinuerlig funktion gäller att $y(x)$ är en kontinuerligt deriverbar lösning till (6.4) om och endast om $y(x)$ är en kontinuerlig lösning till integralekvationen*

$$y(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\,dt, \quad x, x_0 \in I \tag{6.5}$$

Bevis. Om $y \in \mathscr{C}^1(I)$ satisfierar (6.4) får vi efter integration av båda leden

$$y(x) - y(x_0) = y(x) - b = \int_{x_0}^x f(t, y(t))\,dt$$

och om $y \in \mathscr{C}(I)$ löser (6.5) är $t \mapsto f(t, y(t))$ en kontinuerlig funktion och integralen $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$, och därmed $y(x)$, kontinuerligt deriverbar med $y'(x) = f(x, y(x))$ för $x \in I$. Vidare är $y(x_0) = b$. ■

6.6.1 Grönwalls lemma

Som en illustration till integralens företräden framför derivatan visar vi en olikhet som ofta kommer till användning i fortsättningen.

Sats 33 *Om u är en kontinuerligt deriverbar reellvärd funktion för $x \in I$ och där satisfierar olikheten*

$$u'(x) + au(x) \leq f(x) \tag{6.6}$$

med någon konstant a, så gäller också att

$$u(x) \leq e^{-a(x-x_0)} u(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-t)} f(t)\, dt \tag{6.7}$$

för $x \geq x_0$.

Bevis. Multiplikation med $e^{ax} > 0$ ger olikheten

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax} u(x)\right) = e^{ax}\left(u'(x) + au(x)\right) \leq e^{ax} f(x)$$

och efter integration får vi, om $x > x_0$, att

$$e^{ax} u(x) - e^{ax_0} u(x_0) \leq \int_{x_0}^{x} e^{at} f(t)\, dt$$

$$u(x) \leq e^{-a(x-x_0)} u(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-a(x-t)} f(t)\, dt$$

■

6.7 Lipschitzkontinuitet

Om $f : I \to \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ med begränsad derivata så följer av medelvärdessatsen att $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$ för något tal ξ mellan x och y vilket ger olkheten

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| \tag{6.8}$$

för $x, y \in I$ om $L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$. Funktioner som uppfyller (6.8) kallas *lipschitzkontinuerliga*.

För vektorvärda funktioner av flera variabler generaliseras medelvärdessatsen till en olikhet.

Sats 34 *Om $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är kontinuerligt deriverbar i en öppen konvex mängd D gäller olikheten*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \left\|f'((1-\theta)x + \theta y)\right\| \|y - x\|$$

för något $\theta \in]0,1[$ och $x, y \in D$. Uttrycket $\|f'(x)\|$ betecknar matrisnormen enligt (5).

Bevis. Låt $c \in \mathbb{R}^n$ och sätt $\varphi(t) = c \cdot f((1-t)x + ty)$. Då är $\varphi'(t) = c \cdot f'((1-t)x + ty)(y - x)$ och (6.8) medför att $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$ för något $\theta \in]0,1[$. Cauchys olikhet och (5) ger sedan med $c = f(y) - f(x)$ att

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|^2 &= c \cdot (f(y) - f(x)) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \\ &= c \cdot f'((1-\theta)x + \theta y)(y - x) \leq \|c\| \left\|f'((1-\theta)x + \theta y)(y - x)\right\| \\ &\leq \|c\| \left\|f'((1-\theta)x + \theta y)\right\| \|y - x\| \end{aligned}$$

vilket om $c \neq 0$ ger den sökta olikheten efter division med $\|c\| = \|f(y) - f(x)\|$. I fallet $c = 0$ är satsen trivial. ■

Som en omedelbar följd av sats 34 får vi följande resultat.

Följdsats 35 *En funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ som är kontinuerligt deriverbar i en öppen konvex mängd D med begränsad derivata är lipschitzkontinuerlig så att*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq L \|y - x\|$$

med lipschitzkontstant: $L = \sup_{x \in D} \|f'(x)\|$.