Föreläsning 7

Existens och entydighet

7.1 Aktuella avsnitt i läroboken

Appendix Existence and Uniqueness of Solutions.

Som vi sett i flera exempel kan man ibland lösa en differentialekvation $y' = f(x,y)$ och erhålla y som ett uttryck i kända funktioner. Genom att välja lämpligt värde på en integrationskonstant får man ofta också en unik lösning $y(x)$ som uppfyller givna begynnelsedata $y(x_0) = b$.

Denna procedur fungerar dock endast i undantagsfall. Man är i regel hänvisad till numeriska metoder för att lösa differentialekvationer. Detta är egentligen inget nytt; även en explicit lösning, som exempelvis $y = e^x$ till ekvationen $y' = y$, måste man beräkna numeriskt när man vill se en graf eller ha en tabell.

Innan man använder eller konstruerar en numerisk lösningsmetod måste man emellertid veta att det *finns* en lösning och helst också att den är *unik*. Det är den typen av resultat som denna föreläsning handlar om.

7.2 En integralekvation

I föreläsning 6 visades att om $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en kontinuerlig funktion så är $y : I \to \mathbb{R}^n$ är en kontinuerligt deriverbar lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = b \tag{7.1}$$

om och endast om y är en *kontinuerlig* lösning till integralekvationen

$$y(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{7.2}$$

I stället för att lösa begynnelsevärdesproblemet (7.1), kan vi alltså lösa integralekvationen (7.2) och det är faktiskt enklare.

7.3 Iteration

Den metod vi skall använda är att börja med en enkel gissning som vi sedan successivt förbättrar. Ett första – och naturligtvis mycket naivt – försök att lösa (7.2) är att prova med funktionen $y_0(x) = \text{konstant} = b$ som i alla fall satisfierar begynnelsedata. Insatt i (7.2) ger detta

$$y_1(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t,b)\, dt$$

vilket förstås sällan är lika med y_0 om $x \neq x_0$. Vi ger emellertid inte upp, utan sätter in den nya funktionen $y_1(x)$, och får i nästa varv

$$y_2(x) = b + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt$$

Upprepas detta blir resultatet en *funktionsföljd* $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ som, förhoppningsvis, allt bättre och bättre approximerar en lösning. Denna erhålles i så fall som gränsvärdet $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$.

Låt oss se hur detta fungerar i ett välkänt fall där vi redan vet hur lösningen ser ut.

Exempel 36 *Lös ekvationen $y' = ay$ med $y(0) = 1$.*

Lösning:

Om vi startar med $y_0(x) = 1$ får vi succesivt

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 + \int_0^x a\,dt = 1 + ax \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x a(1+at)\,dt = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x a\left(1 + at + \frac{(at)^2}{2}\right)dt = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{2\cdot 3} \\
&\vdots \\
y_n(x) &= 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{(ax)^n}{n!}
\end{aligned}$$

och vi ser att

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = e^{ax}$$

vilket stämmer med vad vi hade anledning att vänta oss.

För att komma vidare med den allmänna integralekvationen (7.2) måste vi precisera förutsättningarna om f. Det räcker därvid inte att förutsätta att f är kontinuerlig om vi vill ha en unik lösning.

Sats 37 *Om $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är kontinuerlig och dessutom lipschitzkontinuerlig i den andra variabeln, så att det för någon konstant L gäller att*

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leq L\,\|y_1 - y_2\|$$

för alla $x \in I$ och $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, så har integralekvationen (7.2) en kontinuerlig lösning $y(x)$ för varje $b \in \mathbb{R}^n$ sådan att $f(x,b)$ är begränsad på I och $x_0 \in I$.

Bevis. Vi måste visa att den rekursivt definierade funktionsföljden $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ där $y_0(x) = b$ och

$$y_{n+1}(x) = b + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t))\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergerar mot en kontinuerlig gränsfunktion $y(x)$ och dessutom att följande kalkyl är tillåten

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = b + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt \\ &= b + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))\, dt \\ &= b + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \end{aligned}$$

Vi konstaterar att

$$y_n(x) = b + \sum_{k=1}^{n} [y_k(x) - y_{k-1}(x)]$$

och dessutom att för $k = 2, 3, \ldots$ gäller

$$y_k(x) - y_{k-1}(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))]\, dt$$

vilket ger uppskattningen

$$\begin{aligned} \|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| &\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, y_{k-1}(t)) - f(t, y_{k-2}(t))\|\, dt \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} \|y_{k-1}(t) - y_{k-2}(t)\|\, dt \end{aligned}$$

För $k = 1$ och $x > x_0$ gäller dessutom

$$\|y_1(x) - b\| \leq \left\| \int_{x_0}^{x} f(t, b)\, dt \right\| \leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, b)\|\, dt \leq M(x - x_0)$$

där $M = \sup_{x\in I} \|f(x, b)\|$. Vi får nu succesivt

$$\begin{aligned} \|y_2(x) - y_1(x)\| &\leq L \int_{x_0}^{x} \|y_1(t) - b\|\, dt \leq ML \int_{x_0}^{x} (t - x_0)\, dt = ML \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \|y_3(x) - y_2(x)\| &\leq L \int_{x_0}^{x} \|y_2(t) - y_1(t)\|\, dt \leq ML^2 \int_{x_0}^{x} \frac{(t - x_0)^2}{2} dt = ML^2 \frac{(x - x_0)^3}{2 \cdot 3} \\ \|y_4(x) - y_3(x)\| &\leq L \int_{x_0}^{x} \|y_3(t) - y_2(t)\|\, dt \leq ML^3 \int_{x_0}^{x} \frac{(t - x_0)^3}{2 \cdot 3} dt = ML^3 \frac{(x - x_0)^4}{4!} \\ &\vdots \\ \|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| &\leq ML^{k-1} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \end{aligned}$$

i fallet då $x < x_0$ ger motsvarande kalkyl i stället att

$$\|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| \leq ML^{k-1} \frac{(x_0 - x)^k}{k!}$$

och vi får därmed om $|I|$ betecknar längden av intervallet I att

$$\sup_{x\in I} \|y_k(x) - y_{k-1}(x)\| \leq ML^{k-1}\frac{|I|^k}{k!}$$

Eftersom

$$\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{|I|^k}{k!} = \frac{M}{L}\left(e^{L|I|} - 1\right)$$

följer det av Weierstrass majorantsats att funktionsserien

$$y(x) = b + \sum_{k=1}^{\infty}\left[y_k(x) - y_{k-1}(x)\right] = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

konvergerar absolut och likformigt på I och att summan $y(x)$ är kontinuerlig eftersom alla funktionerna y_n i följden är det. Dessutom konvergerar $f(t, y_n(t))$ likformigt mot $f(t, y(t))$ då $n \to \infty$ eftersom

$$\sup_{x\in I}\|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))\| \leq L \sup_{x\in I}\|y_n(t) - y(t)\| \to 0$$

och då följer det att

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt = \int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Därmed är satsen bevisad. ■

7.4 Entydighet och stabilitet

När vi nu har visat att ekvation (7.1) och (7.2) alltid har lösning om f är lipschitzkontinuerlig, återstår frågan om det finns flera lösningar. Besläktad med entydigheten är också problemet med stabiliteten: Vad som händer med lösningen vid små ändringar i f och b. Svaret finns i nästa sats.

Sats 38 *Om $y_1(x)$ respektive $y_2(x)$ är lösningar till begynnelsevärdesproblemen*

$$\begin{aligned} y' &= f_1(x, y), \quad y(x_0) = b_1 \\ y' &= f_2(x, y), \quad y(x_0) = b_2 \end{aligned}$$

där f_1 och f_2 uppfyller förutsättningarna i sats 37 med lipschitzkonstanter L_1 respektive L_2 så gäller för $x \geq x_0$ att

$$\|y_1(x) - y_2(x)\| \leq \|b_1 - b_2\| e^{k(x-x_0)} + \frac{\mu}{k}\left(e^{k(x-x_0)} - 1\right)$$

där $k = \min(L_1, L_2)$ och $\mu = \max_{x,y}\|f_1(x, y) - f_2(x, y)\|$.

Följdsats 39 *Speciellt följer av sats 38 att lösningen till ekvation (7.1) är unik, eftersom det för två lösningar* $y_1(x)$ *och* $y_2(x)$ *med samma högerled,* $f = f_1 = f_2$ *så att* $\mu = 0$*, och samma begynnelsedata,* $b = b_1 = b_2$ *så att* $\|b_1 - b_2\| = 0$*, måste gälla att* $y_1(x) - y_2(x) \equiv 0$.

Så till beviset.

Bevis. Sambanden

$$\begin{aligned} y_1(x) &= b_1 + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_1(t))\, dt \\ y_2(x) &= b_2 + \int_{x_0}^{x} f_2(t, y_2(t))\, dt \end{aligned}$$

ger med triangelolikheten och någon av omskrivningarna

$$\begin{aligned} f_1(t, y_1) - f_2(t, y_2) &= [f_1(t, y_1) - f_1(t, y_2)] + [f_1(t, y_2) - f_2(t, y_2)] \\ &= [f_1(t, y_1) - f_2(t, y_1)] + [f_2(t, y_1) - f_2(t, y_2)] \end{aligned}$$

uppskattningen

$$\|f_1(t, y_1) - f_2(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\| + \mu$$

och därmed är

$$\begin{aligned} \|y_1(x) - y_2(x)\| &\leq \|b_1 - b_2\| + \int_{x_0}^{x} \|f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t))\|\, dt \\ &\leq \|b_1 - b_2\| + \int_{x_0}^{x} (k\|y_1(t) - y_2(t)\| + \mu)\, dt \\ &\leq \|b_1 - b_2\| + k\int_{x_0}^{x} \|y_1(t) - y_2(t)\|\, dt + \mu(x - x_0) \end{aligned}$$

Sätt $u(x) = \int_{x_0}^{x} \|y_1(t) - y_2(t)\|\, dt$. Då är $u(x_0) = 0$ och $u'(x) = \|y_1(x) - y_2(x)\|$ vilket ger olikheten

$$u'(x) \leq ku(x) + \|b_1 - b_2\| + \mu(x - x_0) \tag{7.3}$$

Grönwalls lemma (33) ger då för $x > x_0$ att

$$\begin{aligned} u(x) &\leq e^{k(x-x_0)}u(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{k(x-t)}(\|b_1 - b_2\| + \mu(t - x_0))\, dt \\ &= \frac{1}{k}\|b_1 - b_2\|\left(e^{k(x-x_0)} - 1\right) + \frac{\mu}{k^2}\left(e^{k(x-x_0)} - 1\right) - \frac{\mu}{k}(x - x_0) \end{aligned} \tag{7.4}$$

kombinerar vi (7.3) och (7.4) får vi slutligen

$$\begin{aligned} \|y_1(x) - y_2(x)\| = u'(x) &\leq ku(x) + \|b_1 - b_2\| + \mu(x - x_0) \\ &\leq \|b_1 - b_2\|e^{k(x-x_0)} + \frac{\mu}{k}\left(e^{k(x-x_0)} - 1\right) \end{aligned}$$

■

Det kan mycket väl finnas lösningar till ekvation (7.1) även om f inte är lipschitz-kontinuerlig. Däremot kan vi i sådana fall inte garantera att lösningen är entydig. Jämför med exempel 40.

Exempel 40 *Begynnelsevärdesproblemet* $y' = \sqrt[3]{y}$ *med* $y(0) = 0$ *har tre lösningar:*

1. $y(x) = 0$
2. $y(x) = \begin{cases} \sqrt{(2x/3)^3} & \textit{för } x \geqslant 0, \\ 0 & \textit{för } x < 0. \end{cases}$
3. $y(x) = \begin{cases} -\sqrt{(2x/3)^3} & \textit{för } x \geqslant 0, \\ 0 & \textit{för } x < 0. \end{cases}$

Ett resultat av det faktum att funktionen $\sqrt[3]{y}$ *inte är lipschitzkontinuerlig i en omgivning av* $y = 0$ *eftersom det gäller att*

$$\frac{\left|\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2}\right|}{|y_1 - y_2|} = \frac{1}{\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{y_1 y_2} + \sqrt[3]{y_2^2}} \geqslant \frac{2/3}{\sqrt[3]{y_1^2} + \sqrt[3]{y_2^2}}$$

7.5 Lokala resultat

Vi har hittills förutsatt att funktionen $f(x,y)$ uppfyller lipschitzvillkoret

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\| \tag{7.5}$$

med en konstant L som gäller för $x \in I$ och *godtyckliga* vektorer $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Det är inte alltid möjligt att uppnå detta utan vi får acceptera inskränkningar även i y-led så att (7.5) bara gäller om $y_1, y_2 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Det kan då hända att graferna till funktionerna $y_n(x)$ i iterationen inte ligger kvar i ”rektangeln” $\{(x,y) : x \in I,\ y \in \Omega\}$ och vi kan då inte garantera att lösningen är definierad för alla x i intervallet I. I sådana fall får vi nöja oss med att konstatera att det i något delintervall $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$, med $\delta > 0$, finns en unik lösning till $y' = f(x,y)$.