Föreläsning 8

Lineära system av differentialekvationer

8.1 Aktuella avsnitt i läroboken

(5.1) Matrices and Linear Systems.

(5.2) The Eigenvalue Method for Homogeneous Systems.

(5.3) Second-Order Systems and Mechanical Applications.

8.2 Lineära system

Ett system $y' = f(x,y)$ av differentialekvationer är lineärt om högerledet har formen

$$f(x,y) = P(x)y + F(x)$$

där $P(x)$ är en kvadratisk matris vars koefficienter $p_{j,k}(x)$ är kontinuerliga och begränsade funktioner på det öppna intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ och $F(x)$ en vektorvärd funktion på I som också är kontinuerlig och begränsad. Då är $f(x,b) = P(x)b + F(x)$ kontinuerlig och begränsad för varje fix vektor $b \in \mathbb{R}^n$ och dessutom är

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| = \|P(x)(y_1 - y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$$

om $L = \sup_{x \in I} \|P(x)\|$. Således är förutsättningarna i sats 37 uppfyllda och det följer att begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + F(x), \quad y(x_0) = b \tag{8.1}$$

har en unik lösning $y(x)$ för varje vektor $b \in \mathbb{R}^n$ och $x_0 \in I$. Speciellt följer det att begynnelsevärdesproblemet för lineära ekvationer av ordning n som definieras av (4.5) och (4.6) i föreläsning 4 är entydigt lösbart då det kan skrivas som ett första ordningens system av formen (8.1) med lösningsvektorn $\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ och

$$P(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \cdots & -p_1(x) \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}$$

8.3 Homogena system

Om $F = 0$ får vi det homogena systemet

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \tag{8.2}$$

Låt nu vektorerna $e_1, \ldots, e_n$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$ och funktionerna $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ vara lösningarna till begynnelsevärdesproblemen

$$\frac{dy_j}{dx} = P(x)y_j, \quad y_j(x_0) = e_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{8.3}$$

då bildar funktionerna $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ en bas för lösningsrummet till den homogena ekvationen (8.2). Eller annorlunda uttryckt

Sats 41 *Varje lösning till (8.2) kan skrivas som en lineärkombination*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

av baslösningarna (8.3) med konstanter $c_1, \ldots, c_n$.

Bevis. Låt $y(x)$ vara en lösning till (8.2) och $x_0 \in I$. Då finns entydigt bestämda konstanter $c_1, \ldots, c_n$ så att

$$y(x_0) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_n e_n$$

och om vi definierar

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

är $z(x)$ en lösning till (8.2) med $z(x_0) = y(x_0)$ vilket enligt följdsatsen 39 medför att $y(x) \equiv z(x)$ för alla $x \in I$. ∎

8.3.1 Fundamentalmatris

Låt $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ vara baslösningarna (8.3) som hör till standardbasen i $\mathbb{R}^n$ så att

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0) \\ \qquad \vdots \\ e_n = (0, 0, \ldots, 1) \end{cases} \tag{8.4}$$

och definiera matrisen $Y(x, x_0)$ med $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ som kolonnvektorer i Y

$$Y(x, x_0) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

Då är $Y(x_0, x_0) = E =$ enhetsmatrisen, och lösningen till det homogena begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\, y, \quad y(x_0) = b \tag{8.6}$$

kan skrivas som en matrisprodukt: $y(x) = Y(x, x_0)\, b$. Matrisen $Y(x, x_0)$, eller bara $Y(x)$ när x_0 är underförstådd, kallas *fundamentalmatrisen* till systemet (8.2).

Av entydighetssatsen 39 får vi följande räkneregler för fundamentalmatrisen

1. Deriveringsregeln: $\partial Y(x, x_0) / \partial x = P(x)\, Y(x, x_0)$
2. $Y(x_2, x_0) = Y(x_2, x_1)\, Y(x_1, x_0)$, där $x_0, x_1, x_2 \in I$
3. Speciellt: $E = Y(x_0, x_0) = Y(x_0, x_1)\, Y(x_1, x_0) \Rightarrow Y(x_0, x_1) = Y(x_1, x_0)^{-1}$

Beviset lämnas som övning.

8.4 Inhomogena system

På grund av lineariteten kan *varje* lösning till (8.1) skrivas som summan $y_0 + y_p$ av en partikulärlösning y_p till (8.1) och en lösning y_0 till den homogena ekvationen (8.2). Väljer vi partikulärlösningen så att $y_p(x_0) = 0$ kan lösningen till begynnelsevärdesproblemet (8.1) skrivas

$$y(x) = Y(x, x_0)\, b + y_p(x)$$

För att konstruera $y_p(x)$ kan vi använda samma teknik med variation av parametrar som i föreläsning 5. Låt därför $u(x)$ vara en vektorvärd funktion och sätt $y(x) = Y(x, x_0)\, u(x)$. Derivering med avseende på x ger

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} Y(x, x_0)\, u(x) + Y(x, x_0)\, \frac{du}{dx} = P(x)\, y(x) + Y(x, x_0)\, \frac{du}{dx}$$

eftersom det för varje vektor b med $y(x) = Y(x, x_0)\, b$, gäller att

$$\frac{\partial}{\partial x} Y(x, x_0)\, b = \frac{dy}{dx} = P(x)\, y(x)$$

Om vi därför väljer u så att $u(x_0) = 0$ och

$$Y(x, x_0)\, \frac{du}{dx} = F(x) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = Y(x, x_0)^{-1} F(x) = Y(x_0, x)\, F(x)$$

får vi den sökta partikulärlösningen som alltså kan skrivas som integralen

$$y_p(x) = Y(x, x_0)\, u(x) = Y(x, x_0) \int_{x_0}^{x} Y(x_0, t)\, F(t)\, dt \tag{8.7}$$

$$= \int_{x_0}^{x} Y(x, x_0)\, Y(x_0, t)\, F(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} Y(x, t)\, F(t)\, dt \tag{8.8}$$

Allmänna lösningen till (8.1) blir därmed

$$y(x) = Y(x, x_0)\, b + \int_{x_0}^{x} Y(x, t)\, F(t)\, dt \tag{8.9}$$

vilket också förklarar varför matrisen Y kallas fundamental.

8.5 Konstanta koefficienter

Att bestämma baslösningar och fundamentalmatrisen i en enkel form låter sig i allmänhet bara göras om matrisen P inte beror av x. Den homogena ekvationen $y' = Py$ blir då *autonom*, det vill säga högerledet beror inte explicit på x. En konsekvens av detta är att lösningarna är *translationsinvarianta*, vilket betyder att $z(x) = y(x - x_0)$ är en lösning om $y(x)$ är det.

8.5.1 Exponentialmatrisen

Speciellt får vi att fundamentalmatrisen $Y(x,x_0)$ endast beror av skillnaden $x-x_0$ så att

Sats 42 *Det gäller att* $Y(x-x_0,0) = Y(x,x_0)$.

Bevis. Ty om $y_1(x) = Y(x,x_0)b$ och $z(x) = Y(x,0)b$ är båda funktionerna lösningar till $y' = Py$. Då är också $y_2(x) = z(x-x_0) = Y(x-x_0,0)b$ en lösning och eftersom $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b$ är $y_1 = y_2$ vilket medför påståendet eftersom b är godtycklig. ■

Med $Y(x) = Y(x,0)$ blir räknereglerna 1–3 i stället

1. Deriveringsregeln: $Y'(x) = PY(x)$.
2. Exponentiallagen: $Y(x_2+x_1) = Y(x_2)Y(x_1)$.
3. Speciellt är: $Y(0) = E$ och $Y(-x) = Y(x)^{-1}$.

Lösningsformeln (8.9) blir

$$y(x) = Y(x-x_0)b + \int_{x_0}^{x} Y(x-t)F(t)\,dt$$

På grund av räknereglerna 1–3 ovan skriver man Y som en exponentialfunktion.

$$Y(x) = \exp(xP) = e^{xP}$$

När man arbetar med ekvationer med konstanta koefficienter underlättas kalkylen ofta om man räknar komplext eftersom det man då täcker in både exponentialfunktioner och trigonometriska funktioner. Vi antar därför att vektorer ligger i $\mathbb{C}^n$ i stället för $\mathbb{R}^n$. De allmänna räkningarna ser likadana ut men i exempel med siffror får man naturligtvis ta hänsyn till att talen är komplexa.

8.5.2 Diagonaliserbar P-matris

Som vanligt då ekvationerna har konstanta koefficienter finns det lösningar i form av exponentialfunktioner. För att finna dessa sätter vi $y(x) = e^{\lambda x}b$ vilket ger $y' - Py = (\lambda b - Pb)e^{\lambda x} = 0$ om $Pb = \lambda b$. Vi ser att om det finns en bas av egenvektorer $v_1,\ldots,v_n$ till matrisen P i systemet $y' = Py$ så att $Pv_j = \lambda_j v_j$ för $j = 1,\ldots,n$ blir motsvarande baslösningar $y_j(x) = e^{\lambda_j x}v_j$ och fundamentalmatrisen i en bas av egenvektorer blir därmed en diagonalmatris

$$D(x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

där egenvärdena λ_j kan vara komplexa tal. Om matrisen T förmedlar basbytet $(v_1,\ldots,v_n) = (e_1,\ldots,e_n)\,T$ till standardbasen (8.4) blir

$$e^{xP} = Y(x) = TD(x)\,T^{-1}$$

eftersom $\underline{e}b = \underline{v}c = \underline{e}Tc$ och $\underline{e}y(x) = \underline{v}D(x)\,c = \underline{e}TD(x)\,T^{-1}b = \underline{e}Y(x)\,b$ för godtyckligt b.

Exempel 43 *Lös $y' = Py$ med $y(0) = b$ om*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Karaktäristiska polynomet $\det(P - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 17$ har nollställena $\lambda_1 = 1 + 4i$ och $\lambda_2 = 1 - 4i$ och motsvarande egenvektorer $v_1 = (-i, 1)$ och $v_2 = (i, 1)$ vilket ger basbytet

$$\underline{v} = \underline{e}\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{e}T$$

och således fundamentalmatrisen

$$\begin{aligned} e^{xP} &= \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{(1+4i)x} & 0 \\ 0 & e^{(1-4i)x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{e^x}{2}\begin{bmatrix} e^{4ix} + e^{-4ix} & -ie^{4ix} + ie^{-4ix} \\ ie^{4ix} - ie^{-4ix} & e^{4ix} + e^{-4ix} \end{bmatrix} \\ &= e^x\begin{bmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -\sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Med $b = (b_1, b_2)$ blir därför

$$\begin{aligned} y(x) = e^{xP}b = e^x\begin{bmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -\sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} b_1e^x\cos 4x + b_2e^x\sin 4x \\ -b_1e^x\sin 4x + b_2e^x\cos 4x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8.5.3 Defekt *P*-matris

Tyvärr finns inte alltid en bas av egenvektorer till en given matris. Matrisen sägs då vara defekt. För att detta skall inträffa måste karaktäristiska polynomet $\det(\lambda E - P)$ ha multipla nollställen. Ett enkelt exempel får illustrera situationen medan det allmänna fallet både teoretiskt och räknemässigt bäst hanteras med laplacetransformen som är ämne för nästa föreläsning.

Exempel 44 *Lös* $y' = Py$ *med* $y(0) = b$ *om*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Vi har $\det(\lambda E - P) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$ och den enda egenvektorn är $v_1 = (1, 0)$ vilket innebär att $y_1(x) = e^x v_1$ är en lösning. För att få en av y_1 oberoende lösning kan vi resonera på följande sätt: Låt $L(y) = y' - Py$. Då gäller med en godtycklig vektor $u \in \mathbb{C}^n$ att

$$L\left(e^{\lambda x} u\right) = e^{\lambda x}(\lambda E - P)u \tag{8.10}$$

och om vi deriverar denna relation med avseende på λ får vi

$$L\left(xe^{\lambda x} u\right) = xe^{\lambda x}(\lambda E - P)u + e^{\lambda x} u \tag{8.11}$$

formlerna (8.10) och (8.11) i kombination med vektorer u och v ger

$$L\left(e^{\lambda x} u - xe^{\lambda x} v\right) = e^{\lambda x}\left[(\lambda E - P)u - v\right] - xe^{\lambda x}(\lambda E - P)v$$

Högerledet blir då 0 om vi väljer $v = v_1$ och sedan $u = v_2$ som en lösning till $(\lambda E - P)u = v_1$ som i vårt fall ger ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

som har den av v_1 oberoende lösningen $u = v_2 = (0, -1)$ vilket ger följande baslösningar och exponentialmatris

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^x v_1 = e^x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
y_2(x) &= -\left(e^x v_2 - xe^x v_1\right) = -e^x (v_2 - xv_1) = e^x \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \\
e^{xP} &= Y(x) = e^x \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$