Svar, TATA72, 2024-12-09

1. a) Se bok.

b) Låt $\varepsilon > 0$. Sätt $x = 2+h$. $|x^3 - x^2 - 4| = |(2+h)^3 - (2+h)^2 - 4| =$

$= |8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 4 - 4h - h^2 - 4| = |8h + 5h^2 + h^3| =$

$= |h||8 + 5h + h^2| \leq |h|(8 + 5|h| + |h|^2) \leq$ / om $|h| \leq 1$ /

$\leq |h|(8+5+1) <$ / om $|h| < \frac{\varepsilon}{14}$ / $< \varepsilon$. Sätt $\delta = \min(1, \varepsilon/14)$.

Då är $|x^3 - x^2 - 4| < \varepsilon$ om $|x-2| < \delta$, så $x^3 - x^2 \to 4$ då $x \to 2$.

2. a) $f(x) = x^{\ln x} = (e^{\ln x})^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$, så $f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} =$

$= \underline{2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x}$.

b) $f(x) = \ln(1+e^x)$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $f''(x) = \dfrac{(1+e^x)e^x - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

$f'' > 0$, så f är konvex.

c) $f(x) = \operatorname{as} e^x + \operatorname{as}\sqrt{1-e^{2x}}$, $x < 0$, så

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} - \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}}\sqrt{1-e^{2x}}} = 0,$$

för alla $x < 0$, så f är konstant.

3. a) Se bok.

b) Se bok.

4. Se bok.