

1. a) Se bok.

b) Låt $\varepsilon > 0$. Sätt $x = 1 + h$. För $x \neq 0, 2$ ($h \neq \pm 1$) har vi:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2x-x^2} - 1 \right| &= \left| \frac{1-2x+x^2}{2x-x^2} \right| = \left| \frac{(x-1)^2}{x(2-x)} \right| = \left| \frac{h^2}{(1+h)(1-h)} \right| = \\ &= \frac{|h|^2}{|1+h||1-h|} \leq \left/ \begin{array}{l} \text{om } |h| \leq 1/2, \\ \text{så } |1 \pm h| \geq 1/2 \end{array} \right/ \leq \frac{|h|^2}{1/2 \cdot 1/2} < \left/ \text{om } |h|^2 < \frac{\varepsilon}{4} \right/ < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sätt $\delta = \min(1/2, \sqrt{\varepsilon}/2)$. Då är $\left| \frac{1}{2x-x^2} - 1 \right| < \varepsilon$ om

$$|x-1| < \delta, \text{ så } \frac{1}{2x-x^2} \rightarrow 1 \text{ då } x \rightarrow 1.$$

2. a) Se bok.

b) Sätt $f(x) = e^{x \sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. Då är $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$,
så $\inf M \geq 0$. För heltal n är $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$, så
 $f(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = e^{(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) \cdot 1} \rightarrow 0$ då $n \rightarrow -\infty$, så $\inf M \leq 0$.

3. a) Se bok.

b) Sätt $f(x) = x \ln x$, $x > 0$. $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$,
och $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, så f är (strängt) konvex. Detta ger
att $f(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)$ för alla $a, b > 0$,
dvs $\frac{a+b}{2} \ln \frac{a+b}{2} \leq \frac{a \ln a + b \ln b}{2}$, $a, b > 0$.

4. Se bok.