Svar, TATA73, 2022-05-30

1. a) Se bok.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}\,dx = \frac{1}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(x-1)^{3/2} + C.$

2. a) Se bok.

b) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{1+y}$. Sätt $x = 2+h,\ y = 1+k$. Låt $\varepsilon > 0$.

$$|f(x,y) - f(2,1)| = \Big|2+h+2k+hk+\frac{2+h}{2+k} - \overset{2+1}{\overset{\downarrow}{3}}\Big| = \Big|(1+k)h + 2k + \frac{h-k}{2+k}\Big| \le$$

$$\le |1+k||h| + 2|k| + \frac{|h|+|k|}{|2+k|} \le /\text{om } |k|\le 1/ \le 2|h| + 2|k| + |h| + |k| \le /\overset{\text{om}}{|h|,|k|<\tfrac{\varepsilon}{6}}/ < \varepsilon.$$

Så om $|(x,y)-(2,1)| < \delta = \min(1, \varepsilon/6)$ är $|f(x,y) - f(2,1)| < \varepsilon$.

3. a) Se bok.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ $\quad f(x,0) = x$ ger $f'_x(0,0) = 1$. $\quad f(0,y) = 0$ ger $f'_y(0,0) = 0$.

$$f(0+h,0+k) - 0 - 1h - 0k = \frac{-hk^2}{h^2+k^2} = \sqrt{h^2+k^2}\,\frac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k),$$

men $\rho(h,k) \not\to 0$ då $(h,k)\to(0,0)$, ty $\rho(h,h) = -1/2^{3/2}$, så f är <u>inte</u> differentierbar.

4. a) Se bok.

b) $$\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}+e^{-t}} = \frac{1}{\sqrt{(x+\theta)^2} + e^{-(x+\theta)^2}}\left((x+1)^2 - x^2\right)$$ / Enligt medelv.satsen, där $0 \le \theta \le 1$ och θ beror på x /

$$= \frac{2x+1}{x+\theta+e^{-(x+\theta)^2}} = \frac{2+1/x}{1+\theta/x + e^{-(x+\theta)^2}/x} \to \underline{\underline{2}},\quad x\to\infty.$$

5. a) Se bok.

b) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \ge 1$. $\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ så $|f'(x)| \le 1$ då $x \ge 1$.

Medelvärdessatsen ger: $|f(x) - f(y)| = |f'(\theta)||x-y| \le |x-y|$ då $x,y \ge 1$, så f <u>är</u> likformigt kontinuerlig.

6. Se bok.