Svar, TATA73, 2023-05-29

1. a) $\int (x+1)e^x \ln x \, dx = xe^x \ln x - \int xe^x \frac{1}{x} dx = xe^x \ln x - e^x + C.$

   b) $\int \frac{\cos x \, dx}{1+\sin x + \cos x} = \Big/ t = \tan\frac{x}{2} \Big/ = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)(2+2t)} =$

   $= \int \frac{(1-t)\,dt}{1+t^2} = \arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) + C.$

2. a) Se bok.

   b) $f(0+h, 0+k) = h^2 \sin\frac{1}{h^2+k^2} = 0 + 0h + 0k + \sqrt{h^2+k^2} \cdot \underbrace{\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \sin\frac{1}{h^2+k^2}}_{\rho(h,k)}, \quad (h,k) \neq (0,0),$

   och $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$ (ty "$(\to 0)\cdot$begr."), så f är diffbar.

   $f'_x(x,0) = 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ har inte gr.v. då $x \to 0$, så $f \notin C^1$.

3. a) Se bok.

   b) Antag att $(a,b) \in M$. Då är $\varepsilon = \frac{b - f(a)}{2} > 0$ och f är kont., så $\exists \delta > 0$ s.a. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ då $|x-a| < \delta$. Det följer att $(x,y) \in M$ om $|(x,y) - (a,b)| < r$, där $r = \min(\delta, \varepsilon)$, så M är öppen.

4. a) Se bok.

   b) Sätt $f(x) = \int_2^x \frac{e^{-xy}}{y} dy$, $x > 2$. $f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} + \int_2^x \frac{e^{-xy}\cdot(-y)}{y} dy = \frac{2e^{-x^2} - e^{-2x}}{x}$.

   $f'(x) > 0$ då $x \to 2+$ och $f'(x) < 0$ då $x \to \infty$, och $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-x^2} - e^{-2x} = 0$

   $\Leftrightarrow \ln 2 = x^2 - 2x \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+\ln 2}$. Så största värde i $x = 1 + \sqrt{1+\ln 2}$.

5. a) Se bok.

   b) Låt $\varepsilon > 0$. Då finns trappfkn $\Phi \le f \le \Psi$ m.a.p. en indelning av D i delrektanglar D_{ij} s.a. $\iint_D (\Psi - \Phi)\,dx\,dy < \varepsilon$ (ty f integrerbar).

   Definiera trappfkn Φ', Ψ' på D genom att på D_{ij} sätta:

   $\Phi' = \Phi, \Psi' = \Psi$ om $\Phi \ge 0$, $\Phi' = -\Psi, \Psi = -\Phi'$ om $\Psi \le 0$, $\Phi' = 0, \Psi' = \max(\Psi, -\Phi)$ annars.

   Då är $\Phi' \le |f| \le \Psi'$ och $\iint_D (\Psi' - \Phi')\,dx\,dy \le \iint_D (\Psi - \Phi)\,dx\,dy < \varepsilon$,

   så $|f|$ är integrerbar.

6. Se bok.