Svar, TATA73, 2023-08-14

1. a) Se bok.

   b) $f(x,y,z) = \frac{x}{y+z}$. Sätt $x = 1+h$, $y = 1+k$, $z = 1+l$. Låt $\varepsilon > 0$.

   $$|f(x,y,z) - f(1,1,1)| = \left| \frac{1+h}{1+k+1+l} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2+2h-1-k-1-l}{2(2+k+l)} \right| \leq$$

   $$\leq \frac{2|h|+|k|+|l|}{2|2+k+l|} \leq /\text{om } |k|,|l| < \tfrac{1}{2}/ \leq \frac{2|h|+|k|+|l|}{2\cdot 1} < /\text{om } |h|,|k|,|l| < \tfrac{\varepsilon}{2}/ < \varepsilon.$$

   Så om $|(x,y,z)-(1,1,1)| < \delta = \min(1/2, \varepsilon/2)$ är $|f(x,y,z) - f(1,1,1)| < \varepsilon$.

2. a) Se bok.

   b) $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2(1+\theta t)^2} t^2$, där $0 \leq \theta \leq 1$ (standard). $t = x^2$ ger att

   $\ln(1+x^2) - x^2 = -\frac{x^4}{2(1+\theta x^2)^2} \geq -\frac{x^4}{2}$, ty $(1+\theta x^2)^2 \geq 1$ och $-\frac{x^4}{2} \leq 0$.

3. a) Se bok.

   b) $f'_x(x,y) = \frac{x^4 y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ och $f'_y(x,y) = \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ då $(x,y) \neq (0,0)$.

   $f(x,0) = 0$, så $f'_x(0,0) = 0$, och $f(0,y) = 0$, så $f'_y(0,0) = 0$.

   Alltså är $f'_x(0,y) = 0$, så $\underline{f''_{xy}(0,0) = 0}$, och $f'_y(x,0) = x$, så $\underline{f''_{yx}(0,0) = 1}$

   $f \notin C^2$ eftersom $f''_{xy} \neq f''_{yx}$.

4. a) Se bok.

   b) T.ex. $f(x,y) = (x^3, y)$. $f \in C^1$ och $f^{-1}(u,v) = (u^{1/3}, v)$, och $(f^{-1})'_u(0,0)$ existerar inte.

5. $f(x) \leq M$ för $0 \leq x \leq 1$, så $\left(\int_0^1 f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 M^p\,dx\right)^{1/p} = M$.

   Låt $\varepsilon > 0$. f är kont., så det finns $a \in [0,1]$ och $\delta > 0$ s.a. $f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$ om $x \in [0,1]$ och $|x-a| \leq \delta$. Detta medför (eftersom $f \geq 0$) att

   $\int_0^1 f(x)^p\,dx \geq \int_{x\in[0,1] \text{ och } |x-a|\leq\delta} (M - \frac{\varepsilon}{2})^p\,dx \geq (M-\frac{\varepsilon}{2})^p \delta$ (om $\delta \leq 1$), så

   $\left(\int_0^1 f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \geq (M - \frac{\varepsilon}{2})\delta^{1/p}$. $\delta^{1/p} \to 1$ då $p \to \infty$, så $\left(\int_0^1 f(x)^p\,dx\right)^{1/p} > M - \varepsilon$

   då p är stort. Detta ger att $\lim_{p\to\infty} \left(\int_0^1 f(x)^p\,dx\right)^{1/p} = M$.

6. Se bok.