Svar, TATA73, 2024-05-27

1. a) Se bok.

b) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \left| t = \tan\frac{x}{2} \right| = \int \frac{\frac{2\,dt}{t^2+1}}{1+\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}} = \int \frac{2\,dt}{t^2+1+2t+1-t^2} =$

$= \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right| + C.$

2. a) Se bok.

b) Låt $\varepsilon > 0$. Sätt $x = 1+h$, $y = 1+k$, $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$. Om $xy \neq 2$:

$$\left|\frac{x}{2-xy} - 1\right| = \left|\frac{1+h}{2-(1+h)(1+k)} - 1\right| = \left|\frac{1+h-1+h+k+hk}{1-h-k-hk}\right| \le \frac{2|h|+|k|+|h||k|}{|1-h-k-hk|} \le$$

$$\le \left| \begin{array}{l} \text{om } \rho \le 1/4, \\ 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{16} > \frac{1}{3} \end{array} \right| \le \frac{2|h|+|k|+\frac{1}{4}|k|}{1/3} < \left| \begin{array}{l} \text{om } \rho < \varepsilon/12, \\ \frac{2+1+1/4}{1/3} < 3\cdot 4 = 12 \end{array} \right| < \varepsilon.$$

Så om $|(x,y)-(1,1)| < \delta = \min\left(\frac{1}{3}, \frac{\varepsilon}{12}\right)$ är $\left|\frac{x}{2-xy}\right| < \varepsilon$.

3. a) Se bok.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$f(x,0) = x$ ger $f_x'(0,0) = 1$.

$f(0,y) = y$ ger $f_y'(0,0) = 1$.

För $(h,k) \neq (0,0)$: $f(0+h,0+k) - 0 - 1\cdot h - 1\cdot k = \frac{(h+k)^3}{h^2+k^2} - h - k =$

$= \frac{2h^2k+2hk^2}{h^2+k^2} = \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k)$, där $\rho(h,k) = \frac{2h^2k+2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$.

$\rho(h,h) = \frac{4}{2^{3/2}}$, så $\rho(h,k) \not\to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$, så f är inte diff.bar i $(0,0)$.

4. a) Se bok.

b) $f(x,y) = (x+y^2)(x+y^4)$. $f(0,0) = 0$, och $f(t^3,t) = (t^3+t^2)(t^3+t^4) =$

$= t^5(t+1)^2 < 0$ då $t < 0$ och $t \neq -1$, så f har inte lok. min. i $(0,0)$.

5. $\left|\iint_D \sin(x^n+y^n)\,dx\,dy\right| \le \iint_D |\sin(x^n+y^n)|\,dx\,dy \le \iint_D (x^n+y^n)\,dx\,dy =$

$= \int_0^1\int_0^1 (x^n+y^n)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{n+1}+y^n\right)dy = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ då $n \to \infty$.

6. Se bok.