Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA73
Modul: TEN1

Tentamen i Matematisk fördjupning fk

2022-05-30 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna. Varje uppgift ger högst tre poäng, och för betyg 3/4/5 krävs minst 8/12/15 poäng. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Formulera och bevisa satsen om partiell integration för obestämda integraler. (2p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$. (1p)

2. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är kontinuerlig i punkten $a \in D$. (1p)

   (b) Visa med $\varepsilon\delta$-definitionen att funktionen $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{1+y}$ är kontinuerlig i punkten $(2,1)$. (2p)

3. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är differentierbar i en inre punkt a till D. (1p)

   (b) Avgör om $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ är differentierbar i origo. (2p)

4. (a) Formulera medelvärdessatsen för integraler över intervall på reella axeln. (1p)

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}+e^{-t}}$. (2p)

5. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}$, är likformigt kontinuerlig. (1p)

   (b) Avgör om funktionen $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$, är likformigt kontinuerlig. (2p)

6. Antag att $f \in C^2(D)$, där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är öppen. Visa att $f''_{12} = f''_{21}$.

Lycka till!