Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA73
Modul: TEN1

Tentamen i Matematisk fördjupning fk

2022-08-15 kl 14.00–18.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna. Varje uppgift ger högst tre poäng, och för betyg 3/4/5 krävs minst 8/12/15 poäng. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara en $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar funktion. Ange f:s taylorutveckling av ordning n kring punkten a, med restterm i Lagranges form. (2p)

   (b) Visa att $\left|\cos 2x - 1 + 2x^2\right| \leq \dfrac{2x^4}{3}$, $x \in \mathbb{R}$. (1p)

2. (a) Låt $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiera vad som menas med en randpunkt till M, och vad som menas med att M är sluten. (2p)

   (b) Låt $M = \{(1/n, 2/n) \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, 3, \dots\}$. Bestäm randen av M. (1p)

3. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är partiellt deriverbar i en inre punkt a till D. (1p)

   (b) Antag att $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ då $(x, y) \neq (0, 0)$ och att $f(0, 0) = 1$. Beräkna $f'_x(x, y)$ för alla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Är f'_x kontinuerlig? (2p)

4. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har lokalt minimum i punkten $a \in \mathbb{R}^n$. (1p)

   (b) Avgör om $f(x, y) = y^4 + 2x^3y^2$ har lokalt minimum i $(0, 0)$. (2p)

5. (a) Definiera vad som menas med att $f : D \to \mathbb{R}$ är integrerbar över D, där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. (1p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x}$, där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y) - (1, 0)| < 1\}$. (2p)

6. Antag att $f : D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt. Visa att f är likformigt kontinuerlig.

Lycka till!