Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA73
Modul: TEN1

Tentamen i Matematisk fördjupning fk

2022-10-18 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna. Varje uppgift ger högst tre poäng, och för betyg 3/4/5 krävs minst 8/12/15 poäng. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar. Ange f:s maclaurinutveckling av ordning n, med restterm i Lagranges form. (1p)

   (b) Visa att $0 \leq e^{-x^2} - 1 + x^2 \leq x^4/2,\ x \in \mathbb{R}$. (2p)

2. (a) Låt $M \subseteq \mathbb{R}^n$ och $a \in \mathbb{R}^n$. Definiera vad som menas med att a är en randpunkt till M, och vad som menas med att M är sluten. (2p)

   (b) Låt $M = \{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t) \in \mathbb{R}^2 :\ t > 0\}$. Bestäm randen av M. (1p)

3. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är partiellt deriverbar i en inre punkt a till D. (1p)

   (b) Antag att $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ då $(x,y) \neq (0,0)$ och att $f(0,0) = 0$.
   Beräkna $f'_y(x,y)$ för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Är f'_y kontinuerlig? (2p)

4. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ har lokalt minimum i punkten $a \in \mathbb{R}^n$. (1p)

   (b) Avgör om $f(x,y) = x^6 + 2x^4y^3 + y^{10}$ har lokalt minimum i $(0,0)$. (2p)

5. (a) Definiera vad som menas med att $f : D \to \mathbb{R}$ är integrerbar över D, där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$. (1p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 y \left(\int_y^1 \cos x^3\, dx \right) dy$. (2p)

6. Antag att $f : D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt. Visa att f är likformigt kontinuerlig.

Lycka till!