Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA73
Modul: TEN1

# Tentamen i Matematisk fördjupning fk

**2023-05-29 kl 8.00–12.00**

*Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna. Varje uppgift ger högst tre poäng, och för betyg 3/4/5 krävs minst 8/12/15 poäng. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.*

1. (a) Beräkna $\displaystyle\int (x+1)e^x \ln x \, dx$. (1p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int \frac{\cos x \, dx}{1+\sin x+\cos x}$. (2p)

2. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är differentierbar i en inre punkt $a$ till $D$. (1p)

   (b) Antag att $f(x,y) = x^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$ då $(x,y) \neq (0,0)$ och att $f(0,0) = 0$. Visa att $f$ är differentierbar i $(0,0)$. Tillhör $f$ klassen $\mathcal{C}^1$? (2p)

3. (a) Låt $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiera vad som menas med att $M$ är öppen i $\mathbb{R}^n$. (1p)

   (b) Antag att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Visa att mängden $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y > f(x)\}$ är öppen i $\mathbb{R}^2$. (2p)

4. (a) Formulera satsen om derivering med avseende på $x$ av $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\, dy$. (1p)

   (b) Bestäm den punkt $x > 2$ där $\displaystyle\int_2^x \frac{e^{-xy}}{y}\, dy$ antar sitt största värde. (2p)

5. Antag att $f : D \to \mathbb{R}$ är begränsad, där $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, a \leq x \leq b, \; c \leq y \leq d\}$.

   (a) Definiera vad som menas med att $f$ är integrerbar över $D$. (1p)

   (b) Visa att om $f$ är integrerbar över $D$, så är $|f|$ integrerbar över $D$. (2p)

6. Antag att funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är kompakt och icke-tom. Visa att $f$ har ett största värde.

**Lycka till!**