

Tentamen i Matematisk fördjupning fk

2023-08-14 kl 14.00–18.00

*Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna.
Varje uppgift ger högst tre poäng, och för betyg 3/4/5 krävs minst 8/12/15 poäng.
Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.*

1. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är kontinuerlig i punkten $a \in D$. (1p)

(b) Visa med $\varepsilon\delta$ -definitionen att funktionen $f(x, y, z) = \frac{x}{y+z}$ är kontinuerlig i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

2. (a) Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbar. Ange f 's maclaurinutveckling av ordning n , med restterm i Lagranges form. (1p)

(b) Visa att $\ln(1+x^2) - x^2 \geq -x^4/2$, $x \in \mathbb{R}$. (2p)

3. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är öppen, tillhör klassen \mathcal{C}^2 . (1p)

(b) Antag att $f(x, y) = x^3y/(x^2 + y^2)$ då $(x, y) \neq (0, 0)$ och att $f(0, 0) = 0$. Beräkna $f''_{xy}(0, 0)$ och $f''_{yx}(0, 0)$. Tillhör f klassen \mathcal{C}^2 ? (2p)

4. (a) Formulera inversa funktionssatsen för en funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Ge ett exempel på en \mathcal{C}^1 -funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ som är inverterbar och sådan att dess invers inte är en \mathcal{C}^1 -funktion. (1p)

5. Antag att funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $f \geq 0$. Visa att

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f(x)^p dx \right)^{1/p} = M,$$

där M är f 's största värde.

6. Antag att funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig, där $a, b \in \mathbb{R}$ och $a < b$. Visa att f är integrerbar över $[a, b]$.

Lycka till!