Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Utbildningskod: TATA73
Modul: TEN1

Tentamen i Matematisk fördjupning fk

2024-05-27 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna. Varje uppgift ger högst tre poäng, och för betyg 3/4/5 krävs minst 8/12/15 poäng. Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Definiera vad som menas med att $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ är integrerbar på $[a,b]$. (1p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. (2p)

2. (a) Låt f vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att $f(x)\to 0$ då $|x|\to\infty$. (1p)

   (b) Visa med $\varepsilon\delta$-definitionen att $\displaystyle\frac{x}{2-xy}\to 1$ då $(x,y)\to(1,1)$. (2p)

3. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f\colon D\to\mathbb{R}$, där $D\subseteq\mathbb{R}^n$, är differentierbar i en inre punkt a till D. (1p)

   (b) Antag att $f(x,y)=(x+y)^3/(x^2+y^2)$ då $(x,y)\neq(0,0)$ och att $f(0,0)=0$. Avgör om f är differentierbar i $(0,0)$. (2p)

4. (a) Formulera satsen om taylorutveckling av ordning två för en funktion av två variabler. (1p)

   (b) Avgör om $f(x,y)=(x+y^2)(x+y^4)$ har lokalt minimum i $(0,0)$. (2p)

5. Låt $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x,y\le 1\}$. Visa att $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_D \sin(x^n+y^n)\,dx\,dy = 0$.

6. Antag att funktionen $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tillhör klassen $\mathcal{C}^1$. Visa att f är differentierbar.

Lycka till!