

Tentamen i Matematisk fördjupning fk

2026-01-09 kl 14.00–18.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade och ordentligt skrivna.

Varje uppgift ger högst tre poäng. För betyg 3/4/5 krävs dels minst 2 poäng på (a)-uppgifter, dels minst 8/12/15 poäng totalt.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. (a) Formulera analysens huvudsats. (1p)
(b) Beräkna $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$. (2p)
2. (a) Låt f vara en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att $f(x) \rightarrow 2$ då $|x| \rightarrow \infty$. (1p)
(b) Visa med $\varepsilon\delta$ -definitionen att $\frac{3y}{4 - xy} \rightarrow 1$ då $(x, y) \rightarrow (1, 1)$. (2p)
3. (a) Definiera vad som menas med att funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, där $D \subseteq \mathbb{R}^n$, är differentierbar i en inre punkt a till D . (1p)
(b) Avgör om $f(x, y) = \sqrt{|x|^3 + |y|^3}$ är differentierbar i $(0, 0)$. (2p)
4. (a) Formulera satsen om taylorutveckling av ordning två för en funktion av två variabler. (1p)
(b) Avgör om $f(x, y) = (y + x^4)(y + x^6)$ har lokalt minimum i $(0, 0)$. (2p)
5. (a) Definiera vad som menas med att $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ är integrerbar över D , där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. (1p)
(b) Beräkna $\int_0^1 \left(\int_0^{\arccos y} e^{\sin x} dx \right) dy$. (2p)
6. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(D)$, där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är öppen. Visa att $f''_{12} = f''_{21}$.

Lycka till!