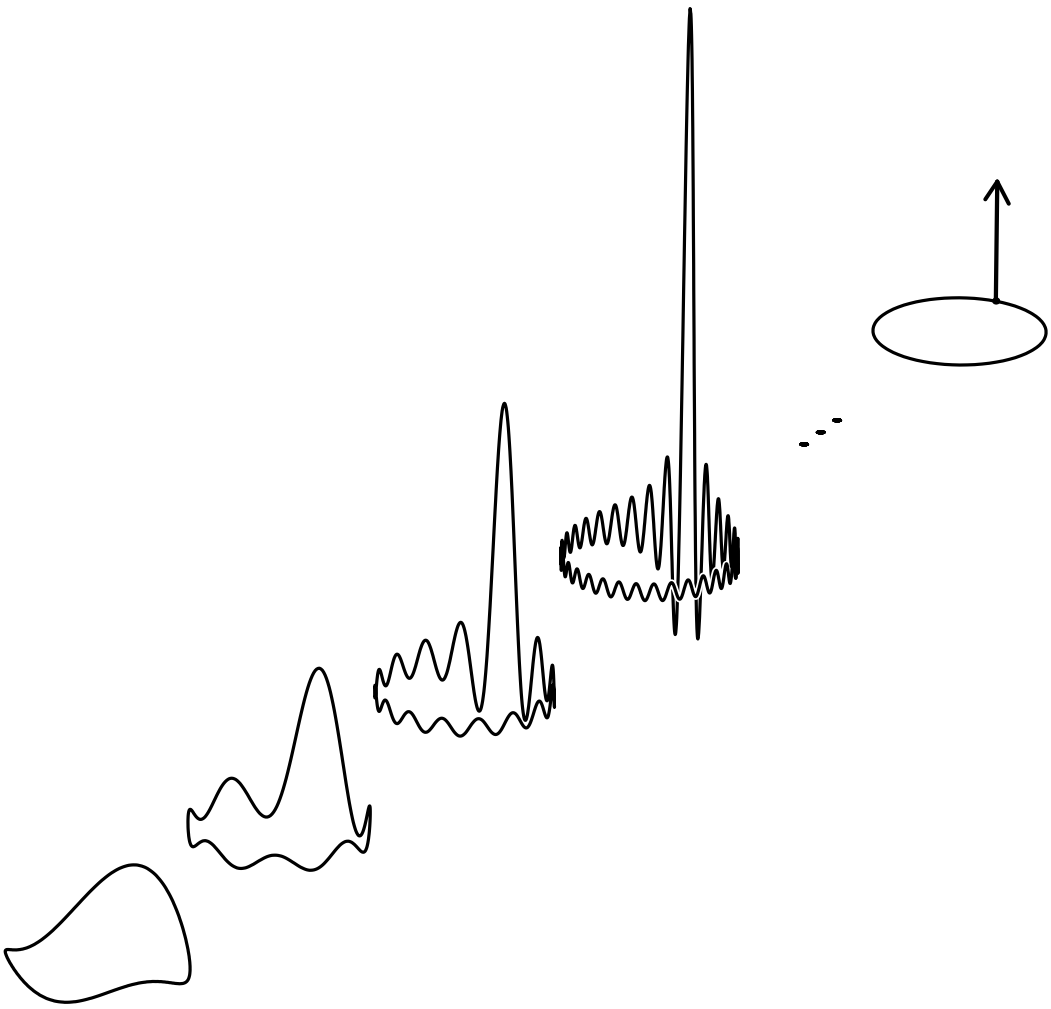
TATA77

Fourieranalys



Mats Aigner, 2023

Innehåll

Distributioner

Föreläsning 1 **1**
Inledning . . . 1
Funktionsrum och konvergensbegrepp . . . 3
Testfunktioner och distributioner . . . 6
Restriktion av distributioner . . . 11
Konvergens av distributioner . . . 12
Övningar . . . 13

Föreläsning 2 **15**
Operationer på distributioner . . . 15
Differentialekvationer och distributioner . . . 20
Divisionsproblemet för distributioner . . . 21
Stöd för distributioner . . . 24
Övningar . . . 25

Föreläsning 3 **27**
Faltning . . . 27
Regularisering . . . 30
Faltning och distributioner . . . 32
LTI-system . . . 34
Övningar . . . 37

Fourierserier

Föreläsning 4 **39**
Periodiska funktioner . . . 39
Fourierkoefficienter och fourierserier . . . 42
Räkneregler för fourierkoefficienter . . . 44
Punktvis konvergens . . . 45
Entydighet . . . 49
Övningar . . . 51

Föreläsning 5 **53**
Periodisk faltning . . . 53
Unitära rum . . . 55
Konvergens i medel och Parsevals formel . . . 59
Övningar . . . 63

Föreläsning 6 **65**
Periodiska distributioner . . . 65
Fourierserier för periodiska distributioner . . . 67
Summering av vissa serier . . . 71
Övningar . . . 73

Fouriertransformen

Föreläsning 7 **75**
Fouriertransform av integrerbara funktioner . . . 75
Räkneregler för fouriertransformen . . . 77
Egenskaper hos fouriertransformen . . . 80
Fouriers inversionsformel . . . 81
Entydighet . . . 84
Övningar . . . 85

Föreläsning 8 **87**
Faltning och fouriertransform . . . 87
Parsevals formel . . . 89
Ett svängningsproblem . . . 93
Övningar . . . 95

Föreläsning 9 **97**
Fouriertransform och distributioner . . . 97
Tempererade distributioner . . . 97
Fouriertransform av tempererade distributioner . . . 102
Räkneregler . . . 105
Faltning . . . 107
Övningar . . . 109

Laplacetransformen

Föreläsning 10 **111**
Laplacetransform av lokalt integrerbara funktioner . . . 111
Räkneregler för laplacetransformen . . . 116
Faltning och laplacetransform . . . 119
Inversionsformeln och entydighet . . . 120
Start- och slutvärdessatserna . . . 121
Övningar . . . 123

Föreläsning 11 **125**
Laplacetransform och distributioner . . . 125
Analytiska distributioner . . . 126
Laplacetransform av distributioner . . . 132
Räkneregler . . . 136
Faltning . . . 137
Enkelsidig laplacetransform . . . 138
Begynnelsevärdesproblem . . . 141
Övningar . . . 143

Z-transformen

Föreläsning 12 **145**
Z-transform av talföljder . . . 145
Räkneregler för z-transformen . . . 148
Faltning och z-transform . . . 150
Inversionsformeln . . . 151
Enkelsidig z-transform . . . 152
Övningar . . . 155

Appendix **157**
Linjära rum och normer . . . 157
Mängder av reella tal . . . 158
Höger- och vänstergränsvärden . . . 159
Maclaurinutvecklingar . . . 159
Likformig konvergens . . . 160
Serier . . . 161
Integraler . . . 162

Svar till övningar **167**

Litteraturförteckning **173**

Index **175**

Distributioner

Inom teknik- och naturvetenskap förekommer vissa idealiseringar, till exempel momentana impulser inom signalteori, och punktladdningar och dipoler inom ellära, som man vill hantera på ett enhetligt sätt tillsammans med kontinuerligt varierande storheter. Detta kan uppnås genom att använda *distributioner*, en slags generalisering av funktioner.

Även inom ren matematik är distributioner mycket användbara, till stor del för att distributioner alltid kan deriveras. Detta gör att man på ett meningsfullt sätt kan derivera funktioner som inte är deriverbara i klassisk mening, vilket är värdefullt vid lösningen av många problem.

En allmän teori för distributioner utvecklades av Laurent Schwartz (1915–2002) under den senare delen av 1940-talet. Vissa speciella distributioner, till exempel den så kallade *diracimpulsen*, och vissa tekniker inom teorin var dock i bruk långt tidigare.

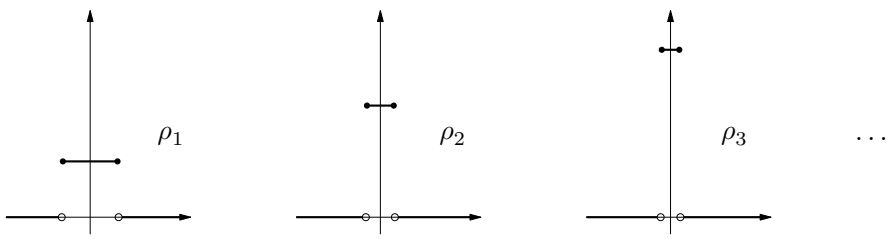
Föreläsning 1

Inledning

Vi börjar med att visa hur ett konkret fysikaliskt problem kan leda till ett behov av att generalisera funktionsbegreppet.

Antag att vi har en kropp av något slag liggande längs en x-axel och att vi vill beskriva kroppens massfördelning i x-led. För många kroppar kan vi göra detta genom att ange densiteten ρ (mätt i kg/m) som en funktion av x. Men massfördelningen för en idealiserad punktformig kropp K, belägen vid $x = 0$ och med massan 1 kg, kan inte beskrivas på detta sätt. Att sätta $\rho(x) = 0$ då $x \neq 0$ och "$\rho(0) = \infty$" är inte tillräckligt precist, eftersom denna beskrivning inte innehåller någon information om att K:s massa är just 1 kg.

Massfördelningen för K kan dock beskrivas *approximativt* med densitetsfunktioner. Sätt till exempel $\rho_n(x) = n$ då $|x| \leq 1/2n$ och $\rho_n(x) = 0$ annars, för $n = 1, 2, 3, \ldots$:



Notera att $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x)\,dx = 1$ (kg) för alla n. Med ökande n ger ρ_n en bättre och bättre approximativ beskrivning av K:s massfördelning, så i någon mening borde gränsvärdet av ρ_n då $n \to \infty$ beskriva massfördelningen för K. Men om vi låter ρ vara den funktion

som ges av

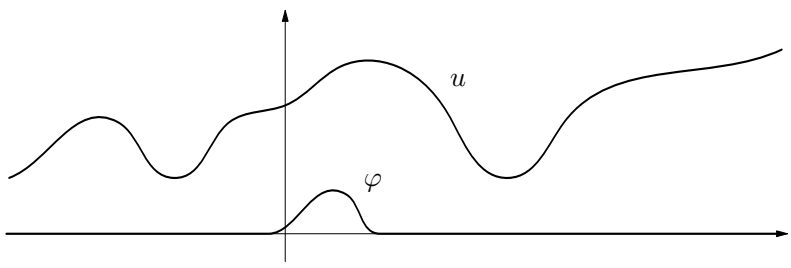
$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

så får vi att $\rho(x) = 0$ då $x \neq 0$ och "$\rho(0) = \infty$". Detta så kallade *punktvisa gränsvärde* av följden ρ_n ger alltså inte tillräcklig information om K:s massfördelning.

Vi beskriver nu informellt hur gränsvärdet av följden ρ_n kan ges bättre mening genom att se funktionerna ρ_n som *distributioner*. Notera att en funktion u på x-axeln kan ses som något som *verkar på punkter*, det vill säga, givet en punkt x ger funktionen tillbaka ett tal $u(x)$. En *distribution* u på x-axeln är däremot något som *verkar på testfunktioner*, där man med en *testfunktion* menar en oändligt deriverbar funktion av x som är lika med noll utanför ett begränsat intervall. Givet en testfunktion φ (en "viktad utspridd punkt") ger alltså distributionen u tillbaka ett tal $u(\varphi)$, som oftast betecknas $\langle u, \varphi\rangle$.

Varje så kallat *lokalt integrerbar* funktion u av x kan betraktas som en distribution genom att definiera u:s verkan på testfunktioner genom

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\,dx.$$



Värdet $\langle u, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\,dx$ kan ses som en "viktad sampling" av u:s funktionsvärden, och ett viktigt faktum är att man ur värdena $\langle u, \varphi\rangle$ kan återskapa funktionsvärdena $u(x)$ i alla punkter x där u är kontinuerlig. Ingen väsentlig information om funktionen u går därför förlorad när vi betraktar den som en distribution.

Betrakta nu ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... som distributioner. Om φ är en godtycklig testfunktion så följer (efter visst räknande) att

$$\lim_{n\to\infty} \langle \rho_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Låt *diracimpulsen* δ vara den distribution som definieras av att $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Då gäller alltså för alla testfunktioner φ att

$$\lim_{n\to\infty} \langle \rho_n, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle,$$

vilket innebär att δ är gränsvärdet av följden ρ_n i *distributionsmening*. Informellt kan man därför tänka på δ som "en generaliserad funktion av x som är lika med 0 då $x \neq 0$ och som är lika med ∞ då $x = 0$, på ett sådant sätt att $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$".

Att diracimpulsen δ ger en bra beskrivning av massfördelningen för den punktformiga kroppen K är kanske inte uppenbart just nu, men det kommer förhoppningsvis att framgå under kursens gång. Resten av denna föreläsning ska vi huvudsakligen ägna åt att precisera de begrepp som skisserats ovan.

Funktionsrum och konvergensbegrepp

Med ett *funktionsrum* menas i allmänhet ett linjärt rum (vektorrum) vars element är funktioner av något slag. Funktionsrum har ofta oändlig dimension. Vi intresserar oss för funktionsrum bland annat för att de distributioner och transformer vi senare ska studera kan ses som linjära avbildningar definierade på vissa funktionsrum.

1.1 Rummen $\mathcal{C}(I)$, $\mathcal{C}^k(I)$ och $\mathcal{C}^\infty(I)$ Låt I vara ett intervall. (Precis vad vi menar med ett intervall står i A.3 i Appendix.) Vi låter $\mathcal{C}(I)$ beteckna mängden av alla kontinuerliga funktioner $u\colon I \to \mathbb{C}$. För $u, v \in \mathcal{C}(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ definieras summan $u+v$ och produkten cu som de funktioner som ges av

$$(u+v)(t) = u(t) + v(t), \quad t \in I,$$

och

$$(cu)(t) = cu(t), \quad t \in I.$$

Det följer att $u+v, cu \in \mathcal{C}(I)$ och att mängden $\mathcal{C}(I)$, med dessa definitioner av addition och multiplikation med tal, är ett linjärt rum. (Se A.1 för definitionen av ett linjärt rum.)

För ett öppet intervall I låter vi $\mathcal{C}^k(I)$ (där $k \geq 1$ är ett heltal) och $\mathcal{C}^\infty(I)$ beteckna de linjära underrum av $\mathcal{C}(I)$ som består av de funktioner som är k gånger kontinuerligt deriverbara på I respektive oändligt deriverbara på I.

1.2 Styckvis reguljära funktioner Vi säger att en funktion u är *styckvis kontinuerlig* på ett intervall I om u:s definitionsmängd innehåller I och om det finns högst ändligt många *undantagspunkter* för u på varje begränsat delintervall av I, där en undantagspunkt definieras som en punkt i vilken u inte är kontinuerlig.

Andra typer av styckvis reguljäritet för en funktion u på ett intervall I definieras genom att ändra betydelsen av ”undantagspunkt” ovan. Till exempel får vi *styckvis konstanta* funktioner om en undantagspunkt definieras som en punkt $a \in I$ som inte har någon omgivning i vilken u är konstant (det vill säga, det finns inga $\varepsilon > 0$ och $c \in \mathbb{C}$ sådana att $u(t) = c$ då $t \in I$ och $a - \varepsilon < t < a + \varepsilon$). Analogt får vi *styckvis kontinuerligt deriverbara* funktioner (styckvis $\mathcal{C}^1$-funktioner) om en undantagspunkt definieras som en punkt som inte har någon omgivning i vilken u är kontinuerligt deriverbar.

1.3 Rummen $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$ och $\mathcal{C}^k_{\mathrm{sty}}(I)$ Låt I vara ett intervall. Vi låter $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$ beteckna mängden av alla funktioner $u\colon I \to \mathbb{C}$ som är styckvis kontinuerliga på I. För $u, v \in \mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ definierar vi summan $u+v$ och produkten cu som i rummet $\mathcal{C}(I)$ (se ovan). Mängden $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$ blir med dessa definitioner ett linjärt rum. Vidare betecknar vi det linjära underrum av $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$ som består av styckvis $\mathcal{C}^k$-funktioner med $\mathcal{C}^k_{\mathrm{sty}}(I)$.

Det dyker ibland upp funktioner som, så att säga, tillhör $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$ förutom att de inte är definierade i några enstaka punkter. Vi inför därför en terminologi för att hantera detta. En funktion $u\colon D \to \mathbb{C}$ sägs *väsentligen tillhöra* $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$ om D är en delmängd av I som innehåller alla punkter i I utom högst ändligt många på varje begränsat delintervall av I, och om funktionen $\tilde{u}$ tillhör $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$, där

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in D, \\ 0, & t \in I \text{ och } t \notin D. \end{cases}$$

Vi kommer också att använda motsvarande terminologi för vissa underrum av $\mathcal{C}_{\mathrm{sty}}(I)$, och begrepp som definieras för funktioner i något av dessa underrum kommer vi ofta att betrakta som definierade också för funktioner som väsentligen tillhör underrummet.

1.4 Rummen $\mathcal{L}^1(I)$ och $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$ Låt I vara ett intervall. Vi låter $\mathcal{L}^1(I)$ beteckna mängden av de funktioner $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$ som är sådana att

$$\int_I |u(t)|\,dt < \infty.$$

De funktioner som tillhör $\mathcal{L}^1(I)$ kallar vi *integrerbara* på I. (Se A.15 för hur integralen av en styckvis kontinuerlig funktion definieras.)

Mängden $\mathcal{L}^1(I)$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$, ty om $u, v \in \mathcal{L}^1(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ så har vi att

$$\int_I |u(t) + v(t)|\,dt \le \int_I \big(|u(t)| + |v(t)|\big)\,dt = \int_I |u(t)|\,dt + \int_I |v(t)|\,dt < \infty,$$

och att

$$\int_I |cu(t)|\,dt = |c| \int_I |u(t)|\,dt < \infty,$$

vilket ger att $u + v$ och cu tillhör $\mathcal{L}^1(I)$.

Vidare låter vi $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$ beteckna mängden av de funktioner $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$ för vilka

$$\int_K |u(t)|\,dt < \infty$$

för varje kompakt (det vill säga slutet och begränsat) intervall K sådant att $K \subseteq I$. Som för $\mathcal{L}^1(I)$ följer att mängden $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$. Funktioner som tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$ kallar vi *lokalt integrerbara* på I.

1.5 Exempel Låt $I =]0, 1]$. Då gäller att funktionen $1/\sqrt{t}$ tillhör $\mathcal{L}^1(I)$, eftersom $\int_I |1/\sqrt{t}|\,dt < \infty$, men att funktionen $1/t$ inte tillhör $\mathcal{L}^1(I)$, eftersom $\int_I |1/t|\,dt = \infty$. Däremot har vi att $1/t$ tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$, ty om K är ett kompakt delintervall av I så finns ett $a > 0$ sådant att $K \subseteq [a, 1]$ (se A.5), och det följer att $\int_K |1/t|\,dt \le \ln(1/a) < \infty$.

1.6 Rummet $\mathcal{L}^\infty(I)$ Låt I vara ett intervall. Vi låter $\mathcal{L}^\infty(I)$ beteckna mängden av de funktioner $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$ som är begränsade på I. (Att en funktion $u\colon I \to \mathbb{C}$ är begränsad på I betyder att det finns en konstant $C \ge 0$ sådan att $|u(t)| \le C$ för alla $t \in I$.)

Mängden $\mathcal{L}^\infty(I)$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$, ty om $u, v \in \mathcal{L}^\infty(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ så följer att $u + v$ och cu är begränsade på I, vilket ger att $u + v$ och cu tillhör $\mathcal{L}^\infty(I)$.

Ett funktionsrum hör ofta på ett naturligt sätt ihop med ett *konvergensbegrepp*, som definierar vad som ska menas med att en följd u_1, u_2, ... av funktioner konvergerar mot en funktion u. En viktig egenskap hos de distributioner och transformer vi senare ska studera är att de är kontinuerliga med avseende på lämpliga konvergensbegrepp.

1.7 Punktvis konvergens och likformig konvergens Låt D vara en godtycklig mängd och låt u och u_n, där $n = 1, 2, \ldots$, vara komplexvärda funktioner som är definierade åtminstone på mängden D. Följden u_n sägs *konvergera punktvis mot u på D* om

$$u_n(t) \to u(t) \text{ då } n \to \infty, \text{ för varje } t \in D,$$

och följden u_n sägs *konvergera likformigt mot u på D* om

$$\sup_{t \in D} |u_n(t) - u(t)| \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

(Se A.6 för begreppet supremum.)

Med andra ord, följden u_n sägs konvergera punktvis mot u på D om det för varje givet $t \in D$ och varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att $|u_n(t) - u(t)| < \varepsilon$ för alla $n > N$, och följden u_n sägs konvergera likformigt mot u på D om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att $|u_n(t) - u(t)| < \varepsilon$ för alla $n > N$ och $t \in D$.

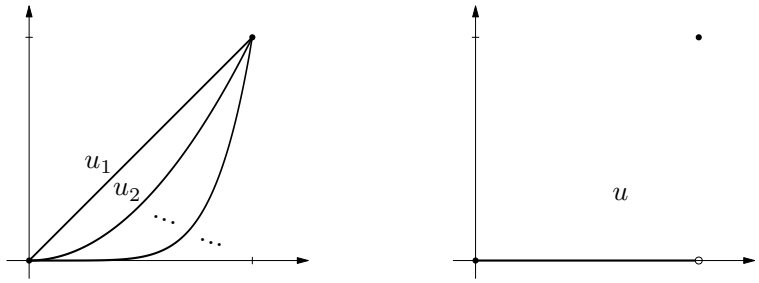
Det följer av definitionerna att om följden u_n är likformigt konvergent mot u på D så är den även punktvis konvergent mot u på D.

Istället för att säga att "följden u_n konvergerar punktvis mot u på D", kan man skriva "$u_n \to u$ punktvis på D". Vidare sägs följden u_n *konvergera punktvis på* D om det finns en funktion $u\colon D \to \mathbb{C}$ sådan att u_n konvergerar punktvis mot u på D. Om alla u_n har samma definitionsmängd säger man oftast bara att "följden u_n konvergerar punktvis" och underförstår att konvergensen sker på deras gemensamma definitionsmängd.

Samma typ av konventioner gäller även för likformig konvergens, och för andra former av konvergens som vi kommer till senare.

1.8 Exempel Sätt $u_n(t) = t^n$ då $0 \le t \le 1$, för $n = 1, 2, \ldots$, och sätt

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$



Då konvergerar följden u_n punktvis mot u. Däremot konvergerar följden u_n inte likformigt mot u, eftersom vi för varje $n \ge 1$ har att $\sup_{0 \le t \le 1} |u_n(t) - u(t)| = 1$. För varje a sådant att $0 < a < 1$ gäller dock att $u_n \to u$ likformigt på intervallet $[0, a]$.

Lägg märke till att varje funktion u_n är kontinuerlig men att gränsfunktionen u inte är det. Kontinuitet behöver alltså inte bevaras under punktvis konvergens. Däremot gäller att kontinuitet bevaras under likformig konvergens (se sats A.9), så likformig konvergens är ett konvergensbegrepp som på ett naturligt sätt hör ihop med rummet $\mathcal{C}([0, 1])$.

Vissa konvergensbegrepp kan definieras med hjälp av en lämplig *norm* på motsvarande funktionsrum. (Se A.2 för definitionen av en norm på ett linjärt rum.)

1.9 $\mathcal{L}^1$-normen För $u \in \mathcal{L}^1(I)$ definieras $\mathcal{L}^1$-*normen* av u, betecknad $\|u\|_1$, genom

$$\|u\|_1 = \int_I |u(t)|\, dt.$$

Att $\| \ \|_1$ är en norm på $\mathcal{L}^1(I)$ är en rättfram följd av definitionerna.

Det naturliga konvergensbegreppet för rummet $\mathcal{L}^1(I)$ definieras med hjälp av $\| \ \|_1$: om u och u_n, $n = 1, 2, \ldots$, tillhör $\mathcal{L}^1(I)$ så sägs följden u_n *konvergera mot* u *i* $\mathcal{L}^1(I)$ om $\|u_n - u\|_1 \to 0$ då $n \to \infty$. Om funktionerna är reellvärda så betyder detta att arean mellan graferna för u_n och u går mot noll då $n \to \infty$.

1.10 Supremumnormen För en begränsad funktion $u\colon D \to \mathbb{C}$, där D är en godtycklig mängd, definieras *supremumnormen* av u, betecknad $\|u\|_\infty$, genom

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in D} |u(t)|.$$

Av definitionen följer att $\| \ \|_\infty$ är en norm på det linjära rum som består av begränsade funktioner från D till $\mathbb{C}$.

Speciellt är $\| \ \|_\infty$ en norm på rummet $\mathcal{L}^\infty(I)$, där I är ett godtyckligt intervall, och om u och u_n, $n = 1, 2, \ldots$, tillhör $\mathcal{L}^\infty(I)$ så sägs följden u_n *konvergera mot* u *i* $\mathcal{L}^\infty(I)$ om $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ då $n \to \infty$, det vill säga om $u_n \to u$ likformigt på I (se 1.7).

1.11 Anmärkning Vi har valt att låta rummet $\mathcal{L}^1(I)$ bestå av styckvis kontinuerliga funktioner eftersom det inte krävs någon avancerad teori för att definiera dessa funktioner samtidigt som de flesta funktioner av praktiskt intresse är styckvis kontinuerliga. Vissa matematiskt önskvärda egenskaper saknas dock hos rummet $\mathcal{L}^1(I)$.

I mera avancerade framställningar av teorin (se till exempel [11]) arbetar man istället med så kallade mätbara funktioner och den så kallade lebesgueintegralen. Motsvarande rum, $L^1(I)$, blir då *fullständigt*. Detta innebär att varje *cauchyföljd* i $L^1(I)$ är konvergent, det vill säga att om $u_n \in L^1(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd sådan att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $N \in \mathbb{N}$ sådant att $\|u_m - u_n\|_1 < \varepsilon$ för alla $m, n > N$, så finns det en funktion $u \in L^1(I)$ sådan att $\|u_n - u\|_1 \to 0$ då $n \to \infty$. Denna grundläggande egenskap saknas hos vårt rum $\mathcal{L}^1(I)$, men vi kommer inte att driva teorin så långt att detta kommer att vara någon större nackdel för oss.

Testfunktioner och distributioner

1.12 Stödet för en funktion Låt D vara en delmängd av $\mathbb{R}$ och låt $u\colon D \to \mathbb{C}$ vara en funktion definierad på D. Med *stödet* för u menas mängden av de punkter $a \in D$ sådana att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en punkt $t \in D$ sådan att $|t - a| < \varepsilon$ och $u(t) \neq 0$.

Stödet för u består med andra ord av de punkter a sådana att $u(a) \neq 0$, tillsammans med de punkter i D som ligger godtyckligt nära sådana punkter.

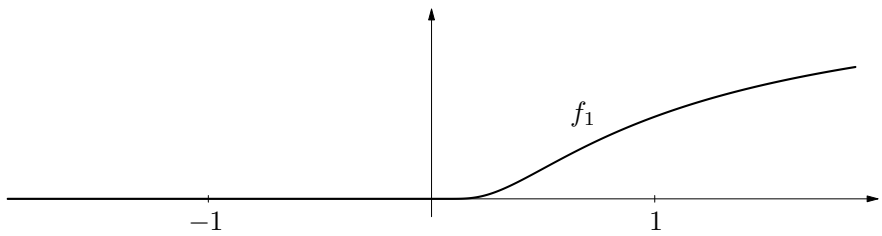
1.13 Rummet $\mathcal{D}(I)$ av testfunktioner Låt I vara ett öppet intervall. En *testfunktion på* I är en funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$ som har kompakt stöd. Vi låter $\mathcal{D}(I)$ beteckna mängden av alla testfunktioner på I.

En testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ är alltså oändligt deriverbar, och att φ har kompakt stöd betyder att φ:s stöd är en kompakt delmängd av $\mathbb{R}$. En följd av detta är att det finns punkter $a, b \in I$ (som beror på φ) sådana att stödet för φ är en delmängd av det kompakta intervallet $[a, b]$ (se A.5).

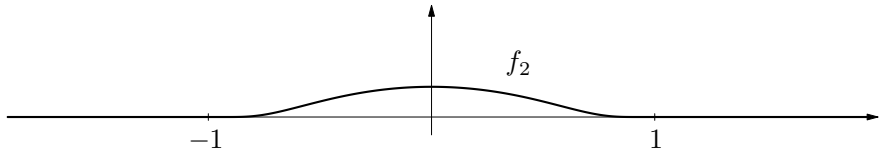
Mängden $\mathcal{D}(I)$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{C}^\infty(I)$, ty om $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ så finns kompakta delintervall K och L av I sådana att $\varphi = 0$ utanför K och $\psi = 0$ utanför L, vilket medför att $\varphi + \psi = 0$ utanför $K \cup L$ och att $c\varphi = 0$ utanför K, och av detta följer att $\varphi + \psi$ och $c\varphi$ tillhör $\mathcal{D}(I)$.

Om φ och φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, tillhör $\mathcal{D}(I)$ så sägs följden φ_n *konvergera mot* φ *i* $\mathcal{D}(I)$ om det finns ett kompakt delintervall K av I sådant att K innehåller stöden till alla φ_n, och om $\varphi_n^{(k)}$ konvergerar likformigt mot $\varphi^{(k)}$ för alla $k \in \mathbb{N}$. (Här betecknar $\varphi^{(k)}$ derivatan av ordning k av φ, och $\varphi^{(0)} = \varphi$.) Detta konvergensbegrepp i rummet $\mathcal{D}(I)$ är av central betydelse inom distributionsteorin.

1.14 Exempel Sätt $f_1(t) = 0$ då $t \leq 0$ och $f_1(t) = e^{-1/t}$ då $t > 0$. Då är f_1 oändligt deriverbar på $\mathbb{R}$ (vilket man kan visa med hjälp av induktion), och $f_1(t) > 0$ då $t > 0$.



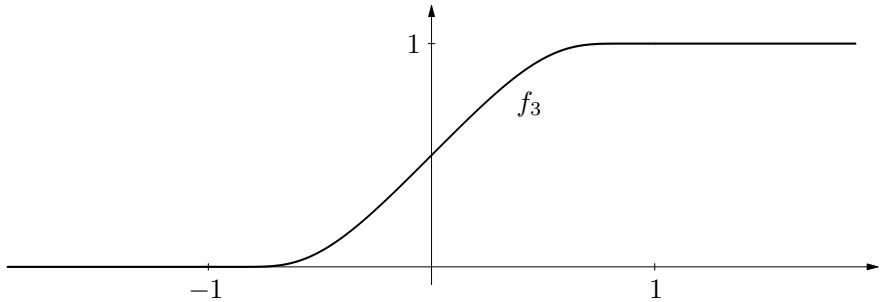
Sätt nu $f_2(t) = f_1(1+t)f_1(1-t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Då är f_2 oändligt deriverbar, $f_2(t) > 0$ om $|t| < 1$, och $f_2(t) = 0$ om $|t| \geq 1$, vilket visar att $f_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ och att det alltså finns testfunktioner som inte är identiskt lika med noll. Notera också att f_2 är en jämn funktion, det vill säga att $f_2(-t) = f_2(t)$.



Vi får ytterligare en användbar funktion f_3 genom att sätta

$$f_3(t) = \frac{1}{C}\int_{-1}^{t} f_2(r)\,dr, \text{ för alla } t \in \mathbb{R}, \text{ där } C = \int_{-1}^{1} f_2(r)\,dr \approx 0{,}133086.$$

Eftersom $f_3' = f_2/C$ (enligt analysens huvudsats) är f_3 oändligt deriverbar, och vi har att $f_3(t) = 0$ då $t \leq -1$, att $f_3(t) = 1$ då $t \geq 1$, och att f_3 är strängt växande på $[-1, 1]$. Dessutom gäller att $f_3(t) + f_3(-t) = 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$.



För $a \in \mathbb{R}$ och $\varepsilon > 0$ sätter vi också

$$f_3(t; a, \varepsilon) = f_3\Big(\frac{t-a}{\varepsilon}\Big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Med hjälp av funktionen f_3 kan vi till exempel konstruera en ”avskärningsfunktion” för ett begränsat intervall $[a, b]$: låt $\varepsilon > 0$ och sätt

$$\rho(t) = f_3(t; a - \varepsilon/2, \varepsilon/4) - f_3(t; b + \varepsilon/2, \varepsilon/4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Då är ρ oändligt deriverbar, $\rho = 1$ i en omgivning av $[a, b]$, och ρ:s stöd är kompakt och innehållet i intervallet $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$.

1.15 Rummet $\mathcal{D}'(I)$ av distributioner Låt I vara ett öppet intervall. En *distribution på I* är en linjär funktion $u\colon \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C}$ som uppfyller följande *kontinuitetsvillkor*: för varje kompakt delintervall K av I finns konstanter $C \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{k=0}^{N} \sup_{t \in K} |\varphi^{(k)}(t)|$$

för alla $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ vars stöd ligger i K.

Mängden av alla distributioner på I betecknas $\mathcal{D}'(I)$, och man säger att en distribution på I är en "kontinuerlig linjär funktional på $\mathcal{D}(I)$". (Med en *funktional* menas i allmänhet en skalärvärd funktion definierad på ett linjärt rum.)

För en distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ och en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ kallas $u(\varphi)$ för det värde som fås då u *verkar på* φ, och vi betecknar oftast $u(\varphi)$ med $\langle u, \varphi \rangle$. (Vi tillåter oss också att skriva "$\langle u, \varphi \rangle$" när en funktion $u\colon \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C}$ ska definieras.) Linjäriteten hos u innebär, med detta beteckningssätt, att det för alla $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ gäller att

$$\langle u, \varphi + \psi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle u, \psi \rangle,$$

och att

$$\langle u, c\varphi \rangle = c\langle u, \varphi \rangle.$$

För $u, v \in \mathcal{D}'(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ definieras summan $u + v$ och produkten cu genom

$$\langle u + v, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle v, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

och

$$\langle cu, \varphi \rangle = c\langle u, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Det följer att $u + v$ och cu är distributioner på I, och att $\mathcal{D}'(I)$, med dessa definitioner av addition och multiplikation med tal, är ett linjärt rum.

Följande sats ger en alternativ karakterisering av det kontinuitetsvillkor (se 1.15) som en distribution måste uppfylla.

1.16 Sats *Antag att $u\colon \mathcal{D}(I) \to \mathbb{C}$ är en linjär funktion. Då gäller att $u \in \mathcal{D}'(I)$ om och endast om följande villkor är uppfyllt: om $\varphi_n \in \mathcal{D}(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd sådan att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{D}(I)$ så gäller att $\langle u, \varphi_n \rangle \to 0$ då $n \to \infty$.*

Bevis Om vi antar att $u \in \mathcal{D}'(I)$ och att $\varphi_n \in \mathcal{D}(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd sådan att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{D}(I)$ så är det en rättfram följd av definitionerna att $\langle u, \varphi_n \rangle \to 0$ då $n \to \infty$.

Antag nu att $u \notin \mathcal{D}'(I)$, det vill säga att u inte uppfyller kontinuitetsvillkoret i 1.15. Då finns ett kompakt delintervall K av I sådant att det för varje $n = 1, 2, \ldots$, finns en testfunktion $\psi_n \in \mathcal{D}(I)$ vars stöd ligger i K och som är sådan att

$$|\langle u, \psi_n \rangle| > n \sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in K} |\psi_n^{(k)}(t)|.$$

Sätt $\varphi_n = \psi_n / \langle u, \psi_n \rangle$. Då är $\varphi_n^{(k)} = \psi_n^{(k)} / \langle u, \psi_n \rangle$, så om $l \in \mathbb{N}$ har vi för varje $n \geq l$ att

$$\sup_{t \in K} |\varphi_n^{(l)}(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in K} |\varphi_n^{(k)}(t)| = \frac{1}{|\langle u, \psi_n \rangle|} \sum_{k=0}^{n} \sup_{t \in K} |\psi_n^{(k)}(t)| < \frac{1}{n}.$$

Detta ger att $\varphi_n^{(l)} \to 0$ likformigt, för alla $l \in \mathbb{N}$. Vi har alltså att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{D}(I)$ men att $\langle u, \varphi_n \rangle = 1$ för alla n, så villkoret i satsen är inte uppfyllt. $\square$

1.17 Sats *Antag att I är ett öppet intervall och att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$ (eller allmännare att u väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$, se 1.3). Då ger funktionen u upphov till en distribution på I, betecknad $u_{\mathcal{D}'}$, vars verkan på testfunktioner ges av*

$$\langle u_{\mathcal{D}'}, \varphi \rangle = \int_I u(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Efter beviset av denna sats kommer vi ofta att beteckna $u_{\mathcal{D}'}$ med u, och vad som avses får då framgå av sammanhanget.

Bevis Om $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ så finns ett kompakt intervall $K \subseteq I$ sådant att $\varphi = 0$ utanför K, vilket ger att

$$\int_I |u(t)\varphi(t)|\,dt = \int_K |u(t)\varphi(t)|\,dt \le \left(\int_K |u(t)|\,dt\right) \sup_{t\in K} |\varphi(t)| < \infty,$$

eftersom u väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$ och φ är kontinuerlig på K. Integralen $\int_I u(t)\varphi(t)\,dt$ är alltså absolutkonvergent, så $u_{\mathcal{D}'}$ är en väldefinierad funktion från $\mathcal{D}(I)$ till $\mathbb{C}$.

Att $u_{\mathcal{D}'}$ är linjär följer av integralens linjäritet.

Låt nu K vara ett godtyckligt kompakt delintervall av I. Om $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ är sådan att dess stöd ligger i K så har vi att

$$|\langle u_{\mathcal{D}'}, \varphi \rangle| = \left|\int_I u(t)\varphi(t)\,dt\right| \le \int_I |u(t)\varphi(t)|\,dt \le \left(\int_K |u(t)|\,dt\right) \sup_{t\in K} |\varphi(t)|,$$

vilket visar att $u_{\mathcal{D}'}$ uppfyller det kontinuitetsvillkor som krävs av en distribution på I (med $C = \int_K |u(t)|\,dt$ och $N = 0$) och därmed att $u_{\mathcal{D}'} \in \mathcal{D}'(I)$. □

Varje lokalt integrerbar funktion kan alltså ses som en distribution, vilket ger oss många exempel på distributioner. Låt oss se hur det ser ut då några distributioner som ges av enkla funktioner verkar på testfunktioner.

1.18 Exempel Vi låter χ beteckna *stegfunktionen*, även kallad *heavisidefunktionen*, som definieras av

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Stegfunktionen är lokalt integrerbar på $\mathbb{R}$, så den ger upphov till en distribution på $\mathbb{R}$, som också betecknas χ, vars verkan på testfunktioner ges av

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\varphi(t)\,dt + \int_0^{\infty} 1\varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1.19 Exempel De funktioner som är konstant lika med 0 respektive 1 på $\mathbb{R}$ är lokalt integrerbara på $\mathbb{R}$, så de ger upphov till distributioner på $\mathbb{R}$, som också betecknas 0 respektive 1, vars verkan på testfunktioner ges av

$$\langle 0, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 0\varphi(t)\,dt = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

och av

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 1\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

1.20 Likhet i distributionsmening Låt $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$, där I är ett öppet intervall. Om funktionerna u och v är sådana att $u_{\mathcal{D}'} = v_{\mathcal{D}'}$, det vill säga sådana att

$$\int_I u(t)\varphi(t)\,dt = \int_I v(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

så sägs u vara lika med v *i distributionsmening.*

Funktioner som är lika i distributionsmening kan sägas vara ”väsentligen lika”. Den precisa innebörden av detta framgår av följande sats.

1.21 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$, där I är ett öppet intervall. Om u är lika med v i distributionsmening så är $u(a) = v(a)$ i varje punkt $a \in I$ där både u och v är kontinuerliga.*

Bevis Antag att $u_{\mathcal{D}'} = v_{\mathcal{D}'}$ och att $a \in I$ är en punkt där både u och v är kontinuerliga. Låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett $\eta > 0$ sådant att $[a-\eta, a+\eta] \subseteq I$ och sådant att $|u(t)-u(a)| \le \varepsilon/2$ och $|v(t) - v(a)| \le \varepsilon/2$ då $|t - a| \le \eta$. Sätt (se exempel 1.14)

$$\varphi(t) = \frac{1}{C\eta} f_2\Big(\frac{t-a}{\eta}\Big), \quad t \in I,$$

så att $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, $\varphi(t) > 0$ om $|t - a| < \eta$, $\varphi(t) = 0$ om $|t - a| \ge \eta$, och $\int_I \varphi(t)\,dt = 1$. Detta ger att

$$|u(a) - \langle u_{\mathcal{D}'}, \varphi\rangle| = \left|\int_I u(a)\varphi(t)\,dt - \int_I u(t)\varphi(t)\,dt\right| \le \int_{a-\eta}^{a+\eta} |u(a) - u(t)|\varphi(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{2},$$

och, på samma sätt, att $|v(a) - \langle v_{\mathcal{D}'}, \varphi\rangle| \le \varepsilon/2$. Av likheten

$$\langle u_{\mathcal{D}'}, \varphi\rangle = \langle v_{\mathcal{D}'}, \varphi\rangle$$

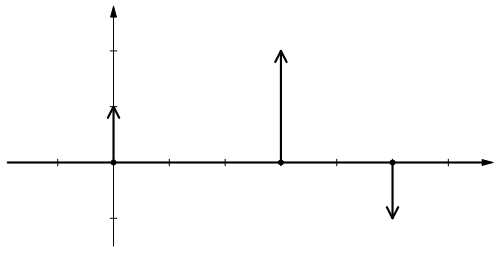
följer nu att $|u(a) - v(a)| \le \varepsilon$, och detta ger i sin tur att $u(a) = v(a)$ eftersom $\varepsilon > 0$ var godtyckligt. □

1.22 Diracimpulsen Den distribution δ på $\mathbb{R}$ som ges av

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

kallas *diracimpulsen.* Andra vanliga benämningar på denna mycket viktiga distribution är *deltafunktionen* och *diracmåttet.* Diracimpulsen kan ses som en matematisk representation av en ”enhetspuls” i punkten 0 på reella axeln. För en godtycklig punkt a på reella axeln låter vi δ_a beteckna ”diracimpulsen i punkten a”, det vill säga den distribution på $\mathbb{R}$ som ges av $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Man brukar åskådliggöra diracimpulser genom att rita pilar, till exempel som i följande figur som föreställer distributionen $\delta + 2\delta_3 - \delta_5$:



Låt oss verifiera att δ är en distribution på $\mathbb{R}$. Om $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ och $c \in \mathbb{C}$ så har vi att

$$\langle \delta, \varphi + \psi \rangle = (\varphi + \psi)(0) = \varphi(0) + \psi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \delta, \psi \rangle,$$

och att

$$\langle \delta, c\varphi \rangle = (c\varphi)(0) = c\varphi(0) = c\langle \delta, \varphi \rangle,$$

vilket visar att δ är linjär. Om $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd sådan att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ så gäller speciellt att $\varphi_n \to 0$ likformigt, och därmed punktvis, vilket ger att $\langle \delta, \varphi_n \rangle = \varphi_n(0) \to 0$ då $n \to \infty$. Därmed har vi att $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, enligt sats 1.16.

Diracimpulsen "är inte en funktion", det vill säga, det finns ingen funktion $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ sådan att $\delta = u_{\mathcal{D}'}$. Ty om vi antar att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)\, dt = 0$$

för varje $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sådan att $\varphi(0) = 0$ (vilket skulle vara fallet om $u_{\mathcal{D}'} = \delta$), så följer som i beviset för sats 1.21 att $u(t) = 0$ i varje punkt $t \neq 0$ där u är kontinuerlig, och detta medför att $u_{\mathcal{D}'} = 0$.

Restriktion av distributioner

Låt I vara ett öppet intervall och låt J vara ett öppet delintervall av I. Om $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ och φ utvidgas till en funktion på I genom att sätta $\varphi(t) = 0$ då $t \in I \setminus J$ så kommer den utvidgade funktionen φ att tillhöra $\mathcal{D}(I)$. På detta sätt kan vi se $\mathcal{D}(J)$ som ett linjärt underrum av $\mathcal{D}(I)$, det vill säga, vi kan se $\mathcal{D}(J)$ som mängden av de $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ vars stöd ligger i J. Detta synsätt använder vi i följande definition.

1.23 Definition Låt I vara ett öppet intervall och låt J vara ett öppet delintervall av I. För $u \in \mathcal{D}'(I)$ definieras *restriktionen av u till J*, betecknad u_J, genom

$$\langle u_J, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(J).$$

Det följer att $u_J \in \mathcal{D}'(J)$, eftersom $u \in \mathcal{D}'(I)$. Efter detta avsnitt kommer vi ofta att beteckna u_J med u, och vad som avses får då framgå av sammanhanget.

1.24 Likhet på öppna intervall Låt I vara ett öppet intervall, låt $u, v \in \mathcal{D}'(I)$, och låt J vara ett öppet delintervall av I. Om $u_J = v_J$, det vill säga om $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, så sägs u vara lika med v *på* J.

Observera att det i allmänhet inte är meningsfullt att fråga sig om u är lika med v i en *punkt* som tillhör I.

1.25 Exempel Vi visar att diracimpulsen δ är lika med 0 på intervallet $J =]0, \infty[$.

Det vi behöver visa är, enligt 1.24, att $\delta_J = 0_J$, det vill säga att $\langle \delta, \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(J)$. Låt därför φ vara en godtycklig testfunktion i $\mathcal{D}(J)$. Eftersom δ och 0 är distributioner på $\mathbb{R}$ ser vi här φ som en testfunktion på $\mathbb{R}$ vars stöd ligger i J. Punkten 0 ingår alltså inte i φ:s stöd, så $\varphi(0) = 0$. Detta ger att

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0 = \langle 0, \varphi \rangle,$$

och därmed har vi visat att $\delta = 0$ på $]0, \infty[$.

På samma sätt kan man visa att $\delta = 0$ på intervallet $]-\infty, 0[$.

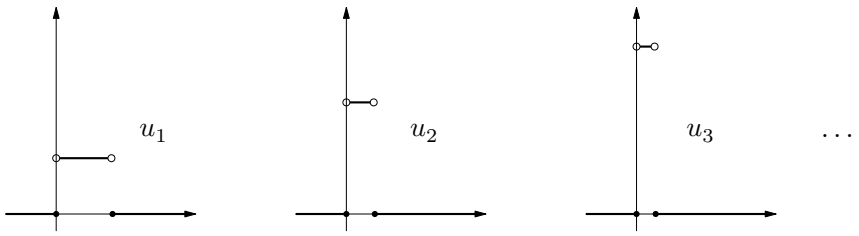
Konvergens av distributioner

1.26 Definition Låt $u \in \mathcal{D}'(I)$. En följd $u_n \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, sägs *konvergera mot u i distributionsmening* om

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Mera allmänt sägs en följd $u_n \in \mathcal{D}'(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, *konvergera mot u i $\mathcal{D}'(I)$* om $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

1.27 Exempel Sätt $u_n(t) = n$ då $0 < t < 1/n$ och $u_n(t) = 0$ annars, för $n = 1, 2, \ldots$:



Notera att funktionerna u_n tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ för alla $n \geq 1$. Vi undersöker om följden u_n är konvergent i distributionsmening, och vad den i så fall konvergerar mot, genom att för en godtycklig testfunktion φ på $\mathbb{R}$ undersöka gränsvärdet $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, \varphi\rangle$.

Låt alltså $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Till att börja med har vi att

$$\langle u_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{1/n} n\varphi(t)\,dt, \quad n \geq 1.$$

Vi approximerar $\varphi(t)$ med $\varphi(0)$ genom att göra en kort maclaurinutveckling av φ (se A.8):

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi_1(t)t, \quad t \in \mathbb{R},$$

där $\varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Detta ger att

$$\langle u_n, \varphi\rangle = \int_0^{1/n} n\big(\varphi(0) + \varphi_1(t)t\big)\,dt = \varphi(0) + n\int_0^{1/n} \varphi_1(t)t\,dt, \quad n \geq 1.$$

Eftersom $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är derivatan φ' kontinuerlig och har kompakt stöd, så det finns en konstant C sådan att $|\varphi'(t)| \leq C$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Detta ger att $|\varphi_1(t)| \leq C$ för alla $t \in \mathbb{R}$ (se A.8), så vi kan nu visa att den sista termen ovan går mot noll:

$$\left| n\int_0^{1/n} \varphi_1(t)t\,dt \right| \leq n\int_0^{1/n} |\varphi_1(t)t|\,dt \leq nC\frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{C}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Sammantaget har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi\rangle = \varphi(0),$$

vilket med hjälp av diracimpulsen δ kan skrivas $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle$. Eftersom φ var godtycklig i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ gäller detta för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, så enligt definition 1.26 konvergerar följden u_n mot δ i distributionsmening.

Övningar

1A Vad blir $\langle u, \varphi \rangle$ om $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ och

(a) $u = 3\delta_2 - 4e^t$, (b) $u = 1 + \delta - \chi$, (c) $u(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0? \end{cases}$

1B Bestäm distributionen u om $\langle u, \varphi \rangle$, för $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, är lika med

(a) $2\varphi(1) + \int_{-1}^{2} (\cos t)\varphi(t)\, dt$, (b) $\int_0^\infty \varphi'(t)\, dt$, (c) $\int_{-\infty}^{3} e^{2t}\varphi'(t)\, dt$.

1C Låt funktionen u och intervallet I ges av

(a) $u(t) = |t|^{-1/2}$ då $t \neq 0$, $I = \mathbb{R}$, (b) $u(t) = t^{-1}$ då $t \neq 0$, $I = \mathbb{R}$,

(c) $u(t) = t^{-1}$ då $t > 0$, $I =]0, \infty[$.

Ger u upphov till en distribution på I (se sats 1.17)? Hur verkar i så fall u på $\varphi \in \mathcal{D}(I)$?

1D Sätt $u_n(t) = n - n^2|t|$ då $|t| \leq 1/n$ och sätt $u_n(t) = 0$ annars, för $n \geq 1$. Bestäm gränsvärdet av följden u_n i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

***1E** Definiera $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ genom $\langle u, \varphi \rangle = -\int_0^\infty (\ln t)\varphi'(t)\, dt$ för $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ och låt f vara den funktion som ges av $f(t) = 1/t$ då $t > 0$ och $f(t) = 0$ då $t \leq 0$.

(a) Visa att $u = f$ på $]0, \infty[$ (se 1.24), det vill säga, visa att $\langle u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vars stöd är en delmängd av $]0, \infty[$.

(b) Visa att $u = f$ på $]-\infty, 0[$.

(c) Är det meningsfullt att fråga sig om $u = f$ på $\mathbb{R}$?

***1F** Sätt $u_n(t) = n^2$ då $-1/n < t < 0$, $u_n(t) = -n^2$ då $0 < t < 1/n$ och $u_n(t) = 0$ annars, för $n \geq 1$. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi \rangle$, där $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

***1G** Sätt $u_n(t) = n \cos nt$, för $t \in \mathbb{R}$ och $n \geq 1$. Visa att $u_n \to 0$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

***1H** Visa att funktionen f_1 i exempel 1.14 tillhör $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

****1I** Skissa en följd u_n av funktioner sådan att:

(a) $u_n \to 0$ punktvis på $[0, 1]$, men $u_n \not\to 0$ i $\mathcal{L}^1([0, 1])$ (jämför med sats A.18),

(b) $u_n \to 0$ i $\mathcal{L}^1([0, 1])$, men inte för någon punkt $t \in [0, 1]$ gäller att $u_n(t) \to 0$,

(c) $u_n \to 0$ likformigt på $\mathbb{R}$, men $u_n \not\to 0$ i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (jämför med sats A.9).

****1J** Visa att om $u \in \mathcal{D}'(I)$ och $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{D}(I)$ så gäller att $\langle u, \varphi_n \rangle \to 0$ då $n \to \infty$.

****1K** Finns det någon distribution på $\mathbb{R}$ som är lika med $e^{1/t}$ på $]0, \infty[$?

Föreläsning 2

Operationer på distributioner

Distributioner ses ofta som ”generaliserade funktioner”. Detta beror inte enbart på att varje lokalt integrerbar funktion kan ses som en distribution, utan också på att många operationer på funktioner kan generaliseras till distributioner.

Vi definierar nedan ett antal operationer på distributioner: derivering, multiplikation med $\mathcal{C}^\infty$-funktioner, affina variabelbyten, och konjugering. Det är värt att notera att dessa operationer är linjära (konjugering är konjugatlinjär) och kontinuerliga. Att en operation $T\colon \mathcal{D}'(I) \to \mathcal{D}'(I)$ är linjär betyder att $T(u+v) = T(u) + T(v)$ och att $T(cu) = cT(u)$ ($T(cu) = \bar{c}\,T(u)$ om T är konjugatlinjär) för alla $u, v \in \mathcal{D}'(I)$ och $c \in \mathbb{C}$, och att T är kontinuerlig betyder att $T(u_n) \to T(u)$ i $\mathcal{D}'(I)$ om $u_n \to u$ i $\mathcal{D}'(I)$.

2.1 Derivering Om $u \in \mathcal{C}^1(I)$ och vi låter derivatan u' verka på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ så får vi, genom att välja punkter $a, b \in I$ till vänster respektive till höger om φ:s stöd (vilket medför att $\varphi(t) = 0$ då $t \le a$ eller $t \ge b$), att

$$\int_I u'(t)\varphi(t)\,dt = \int_a^b u'(t)\varphi(t)\,dt = \Big[u(t)\varphi(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_I u(t)\varphi'(t)\,dt.$$

För en distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ definieras därför dess *derivata* u' genom

$$\langle u', \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Låt oss verifiera att $u' \in \mathcal{D}'(I)$. Om $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ så gäller att $\varphi' \in \mathcal{D}(I)$, vilket ger att u' är en väldefinierad funktion från $\mathcal{D}(I)$ till $\mathbb{C}$. Om $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ så har vi att

$$\langle u', \varphi + \psi\rangle = -\langle u, (\varphi+\psi)'\rangle = -\langle u, \varphi' + \psi'\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle - \langle u, \psi'\rangle = \langle u', \varphi\rangle + \langle u', \psi\rangle,$$

och att

$$\langle u', c\varphi\rangle = -\langle u, (c\varphi)'\rangle = -\langle u, c\varphi'\rangle = -c\langle u, \varphi'\rangle = c\langle u', \varphi\rangle,$$

vilket visar att u' är linjär. Om $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{D}(I)$ så följer att $\varphi_n' \to 0$ i $\mathcal{D}(I)$, vilket ger att $\langle u', \varphi_n\rangle = -\langle u, \varphi_n'\rangle \to 0$ då $n \to \infty$, eftersom $u \in \mathcal{D}'(I)$. Alltså har vi att $u' \in \mathcal{D}'(I)$, enligt sats 1.16.

Låt oss också verifiera att derivering, det vill säga operationen $u \mapsto u'$, är en linjär och kontinuerlig operation på $\mathcal{D}'(I)$. Om $u, v \in \mathcal{D}'(I)$ och $c \in \mathbb{C}$ så har vi för en godtycklig testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ att

$$\langle (u+v)', \varphi\rangle = -\langle u+v, \varphi'\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle - \langle v, \varphi'\rangle = \langle u', \varphi\rangle + \langle v', \varphi\rangle = \langle u'+v', \varphi\rangle,$$

och att

$$\langle (cu)', \varphi\rangle = -\langle cu, \varphi'\rangle = -c\langle u, \varphi'\rangle = c\langle u', \varphi\rangle = \langle cu', \varphi\rangle,$$

vilket visar att $(u+v)' = u' + v'$ och att $(cu)' = cu'$, det vill säga att derivering är en linjär operation på $\mathcal{D}'(I)$. Om $u_n \to u$ i $\mathcal{D}'(I)$ så följer att $u_n' \to u'$ i $\mathcal{D}'(I)$, ty om $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ så har vi att $\langle u_n', \varphi\rangle = -\langle u_n, \varphi'\rangle \to -\langle u, \varphi'\rangle = \langle u', \varphi\rangle$ då $n \to \infty$, eftersom $\varphi' \in \mathcal{D}(I)$. Derivering är alltså en kontinuerlig operation på $\mathcal{D}'(I)$.

2.2 Exempel Antag att distributionen $u \in \mathcal{D}'(I)$ är konstant, det vill säga att $u = C$ för något $C \in \mathbb{C}$. Då är $u' = 0$, ty låt $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ vara en godtycklig testfunktion och välj punkter $a, b \in I$ till vänster respektive till höger om φ:s stöd. Då har vi att

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_I C\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b C\varphi'(t)\,dt = -\Big[C\varphi(t)\Big]_a^b = 0 = \langle 0, \varphi \rangle.$$

2.3 Distributionsderivator och punktvisa derivator Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$, där I är ett öppet intervall, och låt, som tidigare, $u_{\mathcal{D}'}$ beteckna den distribution som u ger upphov till.

Vi kallar derivatan $(u_{\mathcal{D}'})' \in \mathcal{D}'(I)$ för *distributionsderivatan* av u, eller för *derivatan av u i distributionsmening.* För att skilja på distributionsderivatan av u och den vanliga derivatan av u, det vill säga den funktion som är lika med $u'(t)$ i de punkter $t \in I$ där u är deriverbar och är odefinierad för övrigt, kallar vi ibland den senare för den *punktvisa derivatan* av u.

Beteckningen u' används ibland för distributionsderivatan av u och ibland för den punktvisa derivatan av u, beroende på sammanhanget.

2.4 Exempel För stegfunktionen χ (se 1.18) har vi att den punktvisa derivatan är den funktion som är lika med 0 i alla punkter $t \neq 0$, och som är odefinierad i punkten 0.

Vi beräknar nu distributionsderivatan χ' av χ, genom att se hur den verkar på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \chi', \varphi \rangle = -\langle \chi, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^{\infty} \varphi'(t)\,dt = -\Big[\varphi(t)\Big]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

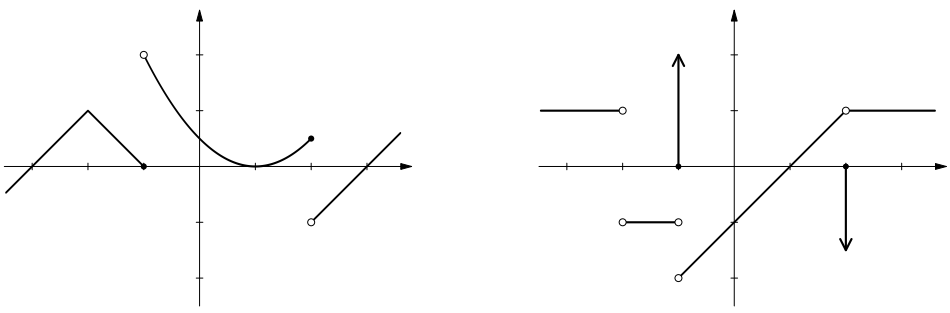
där δ är diracimpulsen (se 1.22). Vi har alltså att $\chi' = \delta$ (i distributionsmening).

2.5 Sats *Låt I vara ett öppet intervall och antag att $u \in \mathcal{C}^1_{\text{sty}}(I)$ och att u:s punktvisa derivata u' väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$ (se 1.3 och 1.17). Då har u högergränsvärde och vänstergränsvärde (se A.7) i varje undantagspunkt $a \in I$ för u, och*

$$(u_{\mathcal{D}'})' = (u')_{\mathcal{D}'} + \sum_a \big(u(a+) - u(a-)\big)\delta_a,$$

där summan tas över alla undantagspunkter för u på I.

Med andra ord, om satsens förutsättningar är uppfyllda så ges distributionsderivatan av den punktvisa derivatan plus, för varje språngdiskontinuitet, språngets höjd gånger en diracimpuls i diskontinuitetspunkten. Till exempel har funktionen i figuren nedan till vänster den distributionsderivata som åskådliggörs i figuren till höger:



Bevis för sats 2.5 Antag att $a \in I$ är en undantagspunkt för u. För att visa att u har vänstergränsvärde i a väljer vi en punkt $c \in I$ sådan att $c < a$ och sådan att $[c, a[$ inte innehåller någon undantagspunkt för u. Då har vi att

$$u(t) = u(c) + \int_c^t u'(r)\,dr, \quad c \le t < a,$$

och detta ger, eftersom u' väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(I)$, att

$$\lim_{t \to a-} u(t) = u(c) + \int_c^a u'(r)\,dr,$$

vilket visar att u har vänstergränsvärde i punkten a. Att u har högergränsvärde i a visas på samma sätt.

Låt nu φ vara en godtycklig testfunktion i $\mathcal{D}(I)$ och välj punkter $c, d \in I$ som inte är undantagspunkter för u och som är sådana att $[c, d]$ innehåller φ:s stöd. Låt vidare $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$, för något $N \ge 0$, vara de undantagspunkter för u som ligger i $[c, d]$ och sätt $a_0 = c$, $a_{N+1} = d$. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\langle (u_{\mathcal{D}'})', \varphi \rangle &= -\langle u_{\mathcal{D}'}, \varphi' \rangle = -\int_I u(t)\varphi'(t)\,dt = -\sum_{n=0}^{N} \int_{a_n}^{a_{n+1}} u(t)\varphi'(t)\,dt \\
&= -\sum_{n=0}^{N} \left(\Big[u(t)\varphi(t) \Big]_{(a_n)+}^{(a_{n+1})-} - \int_{a_n}^{a_{n+1}} u'(t)\varphi(t)\,dt \right) \\
&= \int_{a_0}^{a_{N+1}} u'(t)\varphi(t)\,dt - \sum_{n=0}^{N} \big(u(a_{n+1}-)\varphi(a_{n+1}) - u(a_n+)\varphi(a_n) \big) \\
&= \langle (u')_{\mathcal{D}'}, \varphi \rangle + \sum_{n=1}^{N} \big(u(a_n+) - u(a_n-) \big) \langle \delta_{a_n}, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

där vi använt att $\varphi(a_0) = 0$ och att $\varphi(a_{N+1}) = 0$. Detta visar att

$$(u_{\mathcal{D}'})' = (u')_{\mathcal{D}'} + \sum_a \big(u(a+) - u(a-) \big) \delta_a,$$

där summan tas över alla undantagspunkter för u på I. □

2.6 Högre ordningens derivator För en distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ definieras derivator av högre ordning genom upprepad derivering (precis som för funktioner). Vi har alltså att andraderivatan $u'' = (u')'$ ges av $\langle u'', \varphi \rangle = -\langle u', \varphi' \rangle = \langle u, \varphi'' \rangle$ för alla testfunktioner $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, och i allmänhet gäller, för $k \in \mathbb{N}$, att

$$\langle u^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle u, \varphi^{(k)} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

2.7 Exempel Derivatan av ordning k av diracimpulsen δ ges av

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Vi har alltså, för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, att

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \;\; \langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0), \;\; \langle \delta'', \varphi \rangle = \varphi''(0), \;\; \langle \delta''', \varphi \rangle = -\varphi'''(0),$$

och så vidare.

2.8 Multiplikation med $\mathcal{C}^\infty$-funktioner Om $f, u \in \mathcal{C}(I)$, där I är ett öppet intervall, och vi låter produkten fu verka på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, så får vi att

$$\int_I (fu)(t)\varphi(t)\,dt = \int_I \big(f(t)u(t)\big)\varphi(t)\,dt = \int_I u(t)\big(f(t)\varphi(t)\big)\,dt = \int_I u(t)(f\varphi)(t)\,dt.$$

För en distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ definieras därför dess *produkt* fu (också betecknad uf) med en funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ genom

$$\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Det följer från definitionen (med verifieringar liknande de som gjordes för derivering i 2.1) att $fu \in \mathcal{D}'(I)$, och att operationen $u \mapsto fu$ är linjär och kontinuerlig på $\mathcal{D}'(I)$.

Notera att definitionen är meningsfull tack vare att $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, eftersom det annars inte skulle gälla att $f\varphi \in \mathcal{D}(I)$ för varje $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Distributioner kan alltså i allmänhet bara multipliceras med oändligt deriverbara funktioner.

2.9 Exempel Följande likheter kommer ofta till användning:

(a) $f\delta_a = f(a)\delta_a$, där $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$,

(b) $t\delta^{(k)} = -k\delta^{(k-1)}$, där $k \geq 1$ är ett heltal.

För att visa dessa likheter låter vi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara en godtycklig testfunktion. Vi har att

$$\langle f\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, f\varphi\rangle = (f\varphi)(a) = f(a)\varphi(a) = f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle = \langle f(a)\delta_a, \varphi\rangle,$$

vilket visar att (a) gäller. Upprepad derivering ger att $(t\varphi)^{(k)} = t\varphi^{(k)} + k\varphi^{(k-1)}$, så

$$\langle t\delta^{(k)}, \varphi\rangle = \langle \delta^{(k)}, t\varphi\rangle = (-1)^k (t\varphi)^{(k)}(0) = (-1)^k k\varphi^{(k-1)}(0) = -\langle k\delta^{(k-1)}, \varphi\rangle,$$

vilket visar att (b) gäller. Några exempel: $e^t\delta = \delta$, $(\sin t)\delta_\pi = 0$, och $t\delta'' = -2\delta'$.

2.10 Sats *Antag att $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ och att $u \in \mathcal{D}'(I)$. Då gäller att $(fu)' = fu' + f'u$.*

Bevis Eftersom vi har att $\langle (fu)', \varphi\rangle = -\langle fu, \varphi'\rangle = -\langle u, f\varphi'\rangle = -\langle u, (f\varphi)' - f'\varphi\rangle = \langle u', f\varphi\rangle + \langle u, f'\varphi\rangle = \langle fu' + f'u, \varphi\rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, så gäller att $(fu)' = fu' + f'u$. □

2.11 Affina variabelbyten Låt $a \neq 0$ och b vara reella tal. Om $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ och vi låter funktionen $u(at+b)$ verka på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så ger ett variabelbyte att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(at+b)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi\big((t-b)/a\big)\,dt.$$

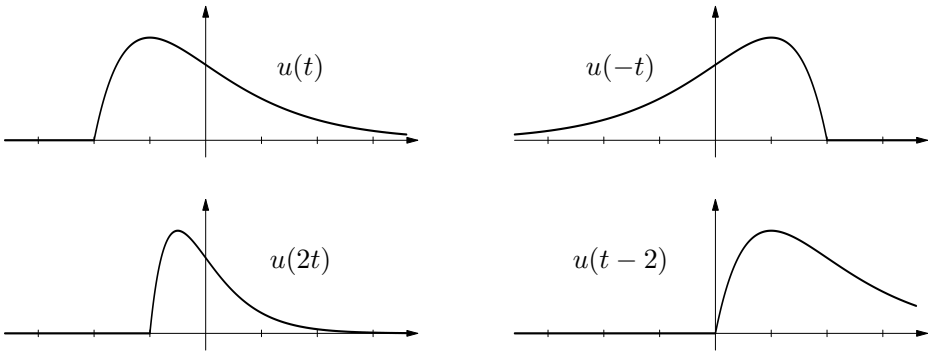
För en distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definierar vi därför $u(at+b)$ genom

$$\big\langle u(at+b), \varphi(t)\big\rangle = \frac{1}{|a|}\big\langle u(t), \varphi\big((t-b)/a\big)\big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Högerledet står här för $\frac{1}{|a|}\langle u, \psi\rangle$, där ψ är den testfunktion som ges av $\psi(t) = \varphi((t-b)/a)$ för $t \in \mathbb{R}$, och vänsterledet står för $u(at+b)$:s verkan på φ, som alltså definieras som värdet av högerledet. Denna typ av (förhoppningsvis intuitiva) notation kommer vi ofta att använda. Observera alltså att om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ så betyder $u(at+b)$ *inte* något i stil med "u:s värde i punkten $at+b$", utan att $u(at+b)$ då betecknar den funktion från $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ till $\mathbb{C}$ som definierades ovan.

Det följer från definitionen att $u(at+b) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, och att operationen $u \mapsto u(at+b)$ är linjär och kontinuerlig på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Vissa specialfall är av särskild betydelse. Givet en funktion eller distribution u på $\mathbb{R}$ kallas $u(-t)$ för *speglingen* av u, och om $a > 0$ kallas $u(at)$ för en *omskalning* av u, och om $a \in \mathbb{R}$ kallas $u(t-a)$ för en *translation* av u. Följande figurer ger några exempel:



Om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ så ger definitionen av affina variabelbyten att

$$\big\langle u(-t), \varphi(t)\big\rangle = \big\langle u(t), \varphi(-t)\big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

och för $a > 0$ att

$$\big\langle u(at), \varphi(t)\big\rangle = \big\langle u(t), \varphi(t/a)\big\rangle/a, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

och för $a \in \mathbb{R}$ att

$$\big\langle u(t-a), \varphi(t)\big\rangle = \big\langle u(t), \varphi(t+a)\big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Vi kommer ibland att beteckna spegling med tecknet $\check{}$ och operationen ”translation med a” med τ_a, det vill säga $\check{u}(t) = u(-t)$ och $(\tau_a u)(t) = u(t-a)$. Med dessa beteckningar har vi, om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, att

$$\langle \check{u}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\varphi}\rangle,$$

och att

$$\langle \tau_a u, \varphi\rangle = \langle u, \tau_{-a}\varphi\rangle.$$

2.12 Exempel Vi förenklar distributionen $\delta(2t-6)$.

För en godtycklig testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ger definitionen av affina variabelbyten att

$$\big\langle \delta(2t-6), \varphi(t)\big\rangle = \frac{1}{|2|}\big\langle \delta(t), \varphi\big((t+6)/2\big)\big\rangle = \frac{1}{2}\varphi\big((0+6)/2\big) = \frac{1}{2}\varphi(3) = \frac{1}{2}\langle \delta_3, \varphi\rangle.$$

Alltså gäller att $\delta(2t-6) = \frac{1}{2}\delta_3$.

2.13 Konjugering För en funktion $u(t)$ låter vi $\overline{u}$ beteckna den funktion som fås genom att komplexkonjugera u:s värden. Om $u \in \mathcal{C}(I)$, där I är ett öppet intervall, och vi låter $\overline{u}$ verka på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, så får vi att

$$\int_I \overline{u}(t)\varphi(t)\,dt = \int_I \overline{u(t)}\varphi(t)\,dt = \int_I \overline{u(t)\overline{\varphi(t)}}\,dt = \overline{\int_I u(t)\overline{\varphi}(t)\,dt}.$$

För en distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ definieras därför dess *konjugering* $\overline{u}$ genom

$$\langle \overline{u}, \varphi\rangle = \overline{\langle u, \overline{\varphi}\rangle}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Av definitionen följer att $\overline{u} \in \mathcal{D}'(I)$, och att operationen $u \mapsto \overline{u}$ är konjugatlinjär och kontinuerlig på $\mathcal{D}'(I)$.

Differentialekvationer och distributioner

För en konstant distribution u gäller att $u' = 0$. Följande grundläggande sats visar att det inte finns några andra distributioner vars derivata är lika med noll.

2.14 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'(I)$ och att $u' = 0$. Då är $u = C$ för någon konstant $C \in \mathbb{C}$.*

Bevis Välj först en testfunktion $\rho \in \mathcal{D}(I)$ sådan att $\int_I \rho(t)\,dt = 1$. Till exempel kan ρ konstrueras med hjälp av funktionen f_2 i exempel 1.14.

Låt nu $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ vara en godtycklig testfunktion. Välj en punkt $a \in I$ till vänster om stöden för φ och ρ (vilket medför att $\varphi(t) = \rho(t) = 0$ då $t \le a$) och sätt

$$\psi(t) = \int_a^t \big(\varphi(r) - \langle 1, \varphi\rangle \rho(r)\big)\,dr, \quad t \in I.$$

Då gäller att $\psi' = \varphi - \langle 1, \varphi\rangle\rho$, så $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I)$ och $\psi' \in \mathcal{D}(I)$. Vidare är $\psi(t) = 0$ då $t \le a$, och dessutom är $\psi(t) = 0$ då t ligger till höger om stöden för φ och ρ, eftersom

$$\int_I \big(\varphi(r) - \langle 1, \varphi\rangle \rho(r)\big)\,dr = \int_I \varphi(r)\,dr - \langle 1, \varphi\rangle \int_I \rho(r)\,dr = \langle 1, \varphi\rangle - \langle 1, \varphi\rangle \cdot 1 = 0.$$

Funktionen ψ tillhör alltså $\mathcal{D}(I)$. Vi har nu att

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi\rangle &= \big\langle u, \langle 1, \varphi\rangle\rho + \varphi - \langle 1, \varphi\rangle\rho\big\rangle = \langle 1, \varphi\rangle\langle u, \rho\rangle + \langle u, \psi'\rangle \\ &= \langle u, \rho\rangle\langle 1, \varphi\rangle - \langle u', \psi\rangle.\end{aligned}$$

Men $u' = 0$, så med $C = \langle u, \rho\rangle$ får vi att $u = C$. □

En följd av satsen ovan är att om $v \in \mathcal{D}'(I)$ och om $u \in \mathcal{D}'(I)$ är en *primitiv* till v, det vill säga om $u' = v$, så ges alla primitiver till v av $u + C$, där $C \in \mathbb{C}$ är en godtycklig konstant. Man kan visa (se till exempel [5]) att varje distribution har en primitiv.

Vissa differentialekvationer kan lösas genom att reducera dem till formen $u' = 0$:

2.15 Exempel Vi bestämmer alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $u' - 3u = \delta$.

Multiplikation med den integrerande faktorn e^{-3t} ger att

$$e^{-3t}u' - 3e^{-3t}u = e^{-3t}\delta,$$

där vänsterledet är lika med $(e^{-3t}u)'$ enligt produktregeln (sats 2.10), och högerledet kan förenklas: $e^{-3t}\delta = e^{-3\cdot 0}\delta = \delta$, enligt exempel 2.9 (a). Alltså har vi att

$$(e^{-3t}u)' = \delta.$$

Enligt exempel 2.4 är χ en primitiv till δ, det vill säga $\chi' = \delta$, så ekvationen kan skrivas

$$(e^{-3t}u - \chi)' = 0.$$

Sats 2.14 ger att $e^{-3t}u - \chi = C$ för någon konstant $C \in \mathbb{C}$, så ekvationen har lösningarna

$$u = Ce^{3t} + e^{3t}\chi.$$

Vi ser från lösningsgången att den homogena ekvationen $u' - 3u = 0$, där $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, har den allmänna lösningen $u = Ce^{3t}$. Alla lösningar i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $u' - 3u = 0$ ges alltså av oändligt deriverbara funktioner.

Följande sats om den allmänna lösningen till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter kan bevisas genom att successivt lösa differentialekvationer av typen $u' - ru = v$, där $r \in \mathbb{C}$ är en konstant (tillvägagångssättet demonstreras i [4]). Sats 2.14 används då varje gång alla primitiver till en distribution ska bestämmas.

2.16 Sats *Alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen*

$$c_m u^{(m)} + c_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + c_1 u' + c_0 u = 0,$$

där $m \geq 1$, $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, och $c_m \neq 0$ ges av

$$u = P_1(t) e^{r_1 t} + \ldots + P_k(t) e^{r_k t},$$

där $r_1, \ldots, r_k$ är de distinkta rötterna, med respektive multiplicitet $m_1, \ldots, m_k$, till den karakteristiska ekvationen $c_m r^m + c_{m-1} r^{m-1} + \ldots + c_1 r + c_0 = 0$, och P_i är ett godtyckligt komplext polynom med grad mindre än m_i, för $i = 1, \ldots, k$. □

Alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen $c_m u^{(m)} + \ldots + c_0 u = 0$ ges alltså av oändligt deriverbara funktioner, så ekvationen har samma lösningar i *distributionsmening* (lösningar söks bland distributioner) som i så kallad *klassisk* mening (lösningar söks bland funktioner som är deriverbara minst m gånger).

Divisionsproblemet för distributioner

Antag att vi har en ekvation $fu = v$, där $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ och $v \in \mathcal{D}'(I)$ är givna. Om $f(t) \neq 0$ för alla $t \in I$ så kan vi lösa ut u genom att dela med f, det vill säga genom att multiplicera ekvationen med $1/f$, eftersom $1/f$ då är en $\mathcal{C}^\infty$-funktion på I. I detta fall blir alltså lösningen entydigt bestämd och ges av $u = (1/f)v$.

Följande sats behandlar enklast möjliga fall då f har ett nollställe i en punkt $a \in I$, nämligen $f(t) = t - a$ och $v = 0$. Notera först att $(t-a)\delta_a = 0$, enligt exempel 2.9 (a).

2.17 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'(I)$ och att $(t-a)u = 0$, där a är en punkt i I. Då är $u = C\delta_a$ för någon konstant $C \in \mathbb{C}$.*

Bevis Välj först en testfunktion $\rho \in \mathcal{D}(I)$ sådan att $\rho(a) = 1$. Till exempel kan man konstruera ρ med hjälp av funktionen f_2 i exempel 1.14.

Låt nu $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ vara en godtycklig testfunktion. Då är $\varphi - \varphi(a)\rho$ en testfunktion som har värdet 0 i punkten a, vilket för $t \in I$ ger att

$$\big(\varphi - \varphi(a)\rho\big)(t) = 0 + \int_a^t \big(\varphi - \varphi(a)\rho\big)'(r)\, dr = (t-a) \int_0^1 \big(\varphi - \varphi(a)\rho\big)'(a + (t-a)r)\, dr.$$

Vi kallar den sista integralen, sedd som funktion av t, för $\psi(t)$. Av sats A.19 följer att ψ kan deriveras upprepade gånger under integraltecknet, så $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Eftersom φ och ρ har kompakt stöd i I, och $\varphi(t) - \varphi(a)\rho(t) = (t-a)\psi(t)$, har även ψ kompakt stöd i I. Funktionen ψ tillhör alltså $\mathcal{D}(I)$. Vi har nu att

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \big\langle u, \varphi(a)\rho + \varphi - \varphi(a)\rho \big\rangle = \varphi(a)\langle u, \rho \rangle + \langle u, (t-a)\psi \rangle \\ &= \langle u, \rho \rangle \langle \delta_a, \varphi \rangle + \langle (t-a)u, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Men $(t-a)u = 0$, så med $C = \langle u, \rho \rangle$ får vi att $u = C\delta_a$. □

2.18 Exempel Vi bestämmer alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $(t^2+2t)u = 0$.
Ekvationen kan skrivas

$$t\big((t+2)u\big) = 0,$$

så sats 2.17 ger att det finns en konstant $C \in \mathbb{C}$ sådan att

$$(t+2)u = C\delta.$$

Vi vill nu "bryta ut" en faktor $t+2$ ur högerledet. Enligt exempel 2.9 (a) är $(t+2)\delta = 2\delta$, så $(t+2)(\frac{C}{2}\delta) = C\delta$. Ekvationen kan nu skrivas

$$(t+2)u = (t+2)\big(\tfrac{C}{2}\delta\big).$$

Sats 2.17 ger, eftersom $(t+2)\big(u - \frac{C}{2}\delta\big) = 0$, att det finns en konstant $D \in \mathbb{C}$ sådan att

$$u = \tfrac{C}{2}\delta + D\delta_{-2}.$$

Alla lösningar till ekvationen $(t^2+2t)u = 0$ ges alltså av $u = E\delta + D\delta_{-2}$, där $D, E \in \mathbb{C}$ är godtyckliga konstanter.

Följande sats, som är en generalisering av sats 2.17, kan bevisas genom att successivt lösa ekvationer av typen $(t-a)u = v$ (som i exemplet ovan) med hjälp av bland annat sats 2.17 och likheten i exempel 2.9 (b): $t\delta^{(k)} = -k\delta^{(k-1)}$.

2.19 Sats *Alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen*

$$(t-a_1)^{m_1} \dots (t-a_k)^{m_k} u = 0,$$

där $k \geq 1$, $m_1, \dots, m_k \geq 1$, och $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ är distinkta ges av

$$u = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i-1} C_{i,j}\, \delta_{a_i}^{(j)},$$

där $C_{i,j} \in \mathbb{C}$ är en godtycklig konstant, för $i = 1, \dots, k$ och $j = 0, \dots, m_i - 1$. □

2.20 Distributionerna $\underline{t}^{-k}$ Finns det någon lösning $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $tu = 1$? I så fall måste u ges av funktionen $1/t$ på intervallen $]-\infty, 0[$ och $]0, \infty[$. Det går dock inte att definiera en distribution på $\mathbb{R}$ genom att sätta dess verkan på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ lika med

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}\varphi(t)\, dt,$$

eftersom denna integral är divergent om $\varphi(0) \neq 0$. En lösning till ekvationen $tu = 1$ kan däremot konstrueras som följer, med hjälp av derivering i distributionsmening.

Vi låter $\underline{t}^{-1}$ beteckna distributionsderivatan av funktionen $\ln|t|$, eller mera precist uttryckt: funktionen $\ln|t|$, definierad för $t \neq 0$, tillhör väsentligen $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ (se 1.3) och ger därmed upphov till en distribution på $\mathbb{R}$ (enligt sats 1.17), vars derivata vi betecknar $\underline{t}^{-1}$.

Av definitionen följer att $\underline{t}^{-1} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, och följande beräkning, där $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är en godtycklig testfunktion, visar att $t\underline{t}^{-1} = 1$:

$$\langle t\underline{t}^{-1}, \varphi\rangle = \langle \underline{t}^{-1}, t\varphi\rangle = \langle (\ln|t|)', t\varphi\rangle = -\langle \ln|t|, (t\varphi)'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \big(\ln|t|\big)(t\varphi)'(t)\, dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}(t\varphi)'(t)\ln|t|\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty}(t\varphi)'(t)\ln|t|\,dt\right)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\Big[t\varphi(t)\ln|t|\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} t\varphi(t)\frac{1}{t}\,dt + \Big[t\varphi(t)\ln|t|\Big]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} t\varphi(t)\frac{1}{t}\,dt\right)\\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\varepsilon\varphi(-\varepsilon)\ln\varepsilon - \varepsilon\varphi(\varepsilon)\ln\varepsilon - \int_{|t|\geq\varepsilon}\varphi(t)\,dt\right)\\
&= 0 + 0 + \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt\\
&= \langle 1, \varphi\rangle.
\end{aligned}
$$

Vidare sätter vi $\underline{t}^{-0} = 1$, och definierar distributionerna $\underline{t}^{-2}$, $\underline{t}^{-3}$, ..., genom att sätta

$$\underline{t}^{-(k+1)} = -\frac{1}{k}(\underline{t}^{-k})', \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Notera att detta medför att $(\underline{t}^{-k})' = -k\underline{t}^{-(k+1)}$ för alla $k \in \mathbb{N}$.

2.21 Sats *För $k \geq 1$ gäller att $t\underline{t}^{-k} = \underline{t}^{-(k-1)}$ och att $t^k\underline{t}^{-k} = 1$.*

Bevis Vi visar först med induktion att $t\underline{t}^{-k} = \underline{t}^{-(k-1)}$ för $k \geq 1$. Att $t\underline{t}^{-1} = 1$ visades ovan. Antag att $t\underline{t}^{-k} = \underline{t}^{-(k-1)}$ för något $k \geq 1$. Derivering av denna likhet ger att

$$\underline{t}^{-k} + t(-k)\underline{t}^{-(k+1)} = -(k-1)\underline{t}^{-k},$$

det vill säga att $t\underline{t}^{-(k+1)} = \underline{t}^{-k}$. Av induktionsprincipen följer nu att $t\underline{t}^{-k} = \underline{t}^{-(k-1)}$ för alla $k \geq 1$. Den andra likheten i satsen är en direkt följd av den första: för $k \geq 1$ får vi att

$$t^k\underline{t}^{-k} = t^{k-1}t\underline{t}^{-k} = t^{k-1}\underline{t}^{-(k-1)} = \ldots = t\underline{t}^{-1} = 1. \qquad \square$$

2.22 Exempel Vi bestämmer alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen

$$(t-1)^2(t+2)u = 6t + 3. \qquad (*)$$

Notera att $(*)$ är en linjär ekvation. Den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation $(t-1)^2(t+2)u = 0$ ges enligt sats 2.19 av $C\delta_1 + D\delta_1' + E\delta_{-2}$, där $C, D, E \in \mathbb{C}$.

För att hitta en partikulärlösning gör vi följande partialbråksuppdelning:

$$\frac{6t+3}{(t-1)^2(t+2)} = \frac{3}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+2}, \quad t \neq 1, -2.$$

Alltså är $(t-1)^2(t+2)\big(3(t-1)^{-2} + (t-1)^{-1} - (t+2)^{-1}\big) = 6t+3$ för $t \neq 1, -2$, och denna likhet medför att

$$3\underline{(t-1)}^{-2} + \underline{(t-1)}^{-1} - \underline{(t+2)}^{-1}$$

är en partikulärlösning till $(*)$, eftersom det av sats 2.21 följer att $(t-1)^2\underline{(t-1)}^{-2} = 1$, $(t-1)\underline{(t-1)}^{-1} = 1$ och $(t+2)\underline{(t+2)}^{-1} = 1$. Alla lösningar i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till $(*)$ ges alltså av

$$u = 3\underline{(t-1)}^{-2} + \underline{(t-1)}^{-1} - \underline{(t+2)}^{-1} + C\delta_1 + D\delta_1' + E\delta_{-2},$$

där $C, D, E \in \mathbb{C}$ är godtyckliga konstanter.

Stöd för distributioner

2.23 Definition Låt $u \in \mathcal{D}'(I)$. *Stödet* för u är mängden av de punkter $a \in I$ sådana att det för varje $\varepsilon > 0$ finns en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ vars stöd ligger i $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ och som är sådan att $\langle u, \varphi\rangle \neq 0$.

2.24 Exempel Diracimpulsen δ har stödet $\{0\}$: om $a \neq 0$ så är $\langle \delta, \varphi\rangle = 0$ för varje $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vars stöd ligger i $]a-|a|/2, a+|a|/2[$, så a tillhör inte δ:s stöd. Men det gör 0, ty om $\varepsilon > 0$ så finns ett $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vars stöd ligger i $]-\varepsilon, \varepsilon[$ och som uppfyller $\varphi(0) \neq 0$.

2.25 Sats *Antag att stöden för $u \in \mathcal{D}'(I)$ och $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ inte har någon gemensam punkt. Då gäller att $\langle u, \varphi\rangle = 0$.*

Bevis Om $u = 0$ eller $\varphi = 0$ så är förstås $\langle u, \varphi\rangle = 0$. Annars, det vill säga om $u \neq 0$ och $\varphi \neq 0$, låter vi K vara stödet för φ och sätter

$$f(t) = \sup\bigl\{\varepsilon > 0;\ u = 0 \text{ på } I \cap]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\bigr\}, \quad t \in K.$$

För $t \in K$ är $f(t) > 0$ eftersom t inte tillhör u:s stöd, och $f(t) < \infty$ eftersom $u \neq 0$. Att f är kontinuerlig är rättframt att visa, och K är kompakt, så f har ett minsta värde på K, säg ε. Eftersom $f(t) > 0$ för alla $t \in K$ är $\varepsilon > 0$.

Sätt (se exempel 1.14) $\rho(t) = f_3(t; -\varepsilon/8, \varepsilon/8) - f_3(t; \varepsilon/8, \varepsilon/8)$ och $\rho_n(t) = \rho(t - n\varepsilon/4)$ för $t \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{Z}$. Stödet för ρ_n ligger i intervallet $[(n-1)\varepsilon/4, (n+1)\varepsilon/4]$, som har längd $\varepsilon/2$, och $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n(t) = 1$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Vi har därför att $\varphi = 1\varphi = \sum_n \rho_n\varphi$, där summan tas över de n för vilka $\rho_n\varphi$ inte är identiskt lika med noll. Summan är ändlig eftersom K är begränsad, och varje term har sitt stöd i ett intervall i vilket $u = 0$, vilket ger att $\langle u, \varphi\rangle = \sum_n \langle u, \rho_n\varphi\rangle = 0$. □

2.26 Distributioner med kompakt stöd Antag att $u \in \mathcal{D}'(I)$ och att u:s stöd K är kompakt. Då kan u:s verkan på testfunktioner på ett meningsfullt sätt utvidgas till en verkan på alla funktioner i $\mathcal{C}^\infty(I)$, på följande sätt.

Låt $\rho \in \mathcal{D}(I)$ vara sådan att $\rho = 1$ i en omgivning av ett intervall som innehåller K (se exempel 1.14 för hur ρ kan konstrueras). Om $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ så har vi att

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \rho\varphi + \varphi - \rho\varphi\rangle = \langle u, \rho\varphi\rangle + \langle u, (1-\rho)\varphi\rangle = \langle u, \rho\varphi\rangle,$$

eftersom sats 2.25 ger att $\langle u, (1-\rho)\varphi\rangle = 0$. Vidare gäller att $\rho\varphi \in \mathcal{D}(I)$ om $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$, så u kan utvidgas till $\mathcal{C}^\infty(I)$ genom att sätta

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \rho\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{C}^\infty(I).$$

Det följer att utvidgningen $u\colon \mathcal{C}^\infty(I) \to \mathbb{C}$ är linjär, och att $\langle u, \varphi\rangle = 0$ om $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I)$ är sådan att K och stödet för φ inte har någon gemensam punkt. Det är också rättframt att visa att utvidgningen är entydigt bestämd av dessa egenskaper.

Till exempel kan diracimpulsen δ utvidgas till att verka på alla funktioner i $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Stödet för δ är mängden $\{0\}$, så vi låter $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara sådan att $\rho = 1$ i en omgivning av punkten 0. Då får vi enligt ovan att δ:s utvidgning verkande på en funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ges av $\langle \delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \rho\varphi\rangle = \rho(0)\varphi(0) = \varphi(0)$.

Övningar

2A Bestäm distributionsderivatan av $(\cos t)\chi(t)$, på tre sätt:

(a) genom att använda definitionen i 2.1,

(b) genom att använda sats 2.5,

(c) genom att använda produktregeln (sats 2.10).

2B Notera att två godtyckliga funktioner $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ utan problem kan multipliceras med varandra (produkten fg definieras genom att sätta $(fg)(t) = f(t)g(t)$ för $t \in I$).

(a) Vad kan en godtycklig distribution $u \in \mathcal{D}'(I)$ multipliceras med?

(b) Vilka av följande produkter är definierade: $\chi\delta$, $t^{-1}\delta$, $\underline{t}^{-1}\delta$, $\underline{t}^{-1}\underline{t}^{-1}$, $|t|\chi$, $|t|\delta'$?

(c) Vi vet att $\underline{t}^{-1}t = 1$ och att $t\delta = 0$, men något måste ändå vara felaktigt i följande räkning: $\delta = 1\delta = \underline{t}^{-1}t\delta = \underline{t}^{-1}0 = 0$. Vad?

2C Förenkla följande distributioner:

(a) $(\sin t)\delta'$, (b) $t\delta''$, (c) $t^2\delta_3''$, (d) $\delta(2-t) + \delta(t/2-1)$,

(e) $\delta''(3t)$, (f) $\bar{\delta}$, (g) $(t^2+t)\underline{(t-1)}^{-1}$, (h) $\underline{(2t)}^{-1}$.

2D Bestäm alla lösningar $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationerna

(a) $u' + 2tu = \delta$, (b) $tu' + u = 2t$, (c) $tu' = 4\delta'$,

(d) $t^2u' = 2\underline{t}^{-1}$, (e) $(t^2+t)u = t + 2 + \delta$, (f) $(t^3 - 6t^2 + 9t)u = 9$.

2E En distribution u på $\mathbb{R}$ kallas *jämn* om $\check{u} = u$ och *udda* om $\check{u} = -u$ (se 2.11), precis som för funktioner. Visa att u' är udda om u är jämn, och att u' är jämn om u är udda.

∗2F Lös övning 1F på ett snabbt sätt genom att använda resultatet av övning 1D och det faktum att derivering är en kontinuerlig operation på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

∗2G Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ är sådan att $t^3u = 0$. Visa, utan att använda sats 2.19, att $u = C\delta'' + D\delta' + E\delta$ för några konstanter $C, D, E \in \mathbb{C}$.

∗2H Visa att om $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så gäller att

$$\langle \underline{t}^{-1}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|t| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt.$$

Man säger att $\langle \underline{t}^{-1}, \varphi \rangle$ är *principalvärdet* av integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)/t\, dt$.

∗∗2I Visa att $fu \in \mathcal{D}'(I)$ om $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ och $u \in \mathcal{D}'(I)$.

∗∗2J Sätt, för $n = 1, 2, \ldots,$

$$u_n(t) = \frac{1}{t + (i/n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Visa att $u_n \to \underline{t}^{-1} - i\pi\delta$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ då $n \to \infty$. (Sats A.18 kan vara användbar.)

Föreläsning 3

Faltning

Faltning är ett användbart verktyg i många sammanhang och dyker upp naturligt bland annat vid lösningen av differentialekvationer. När vi senare studerar olika transformer kommer vi se att transformen av en faltning av två funktioner i allmänhet är lika med produkten av funktionernas transformer.

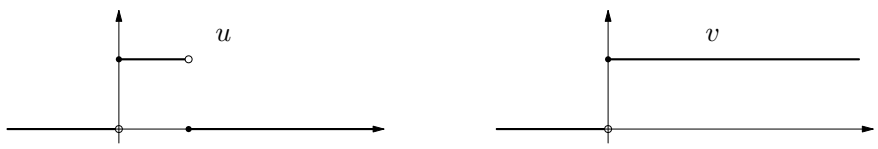
3.1 Definition Låt $u, v \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ (se 1.3). *Faltningen* av u och v, betecknad $u * v$, är den funktion som ges av

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\,dr,$$

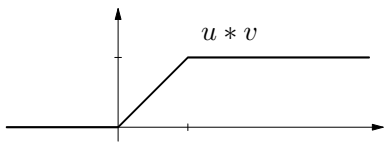
och vars definitionsmängd består av de $t \in \mathbb{R}$ för vilka integralen är absolutkonvergent.

Notera att $u(t-r) = u(-(r-t)) = \check{u}(r-t) = (\tau_t \check{u})(r)$ (se 2.11). Som funktion av r fås alltså $u(t-r)$ genom att först spegla u och sedan translatera speglingen med t.

3.2 Exempel Låt $u(t) = 1$ då $0 \le t < 1$ och $u(t) = 0$ annars, och låt $v(t) = 1$ då $t \ge 0$ och $v(t) = 0$ annars:



Faltningen $u * v$ av dessa enkla funktioner kan bestämmas utan några direkta beräkningar. Eftersom $u(t-r) = 1$ då $t-1 < r \le t$ och $u(t-r) = 0$ då $r \le t-1$ och då $r > t$ har vi, för $t \in \mathbb{R}$, att $(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\,dr = \int_{t-1}^{t} v(r)\,dr$, så faltningens värde i punkten t är medelvärdet av v:s värden i intervallet $[t-1, t]$:



I detta fall blir alltså faltningen $u * v$ ett så kallat *glidande medelvärde* av v. Allmänt gäller, om $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = 1$, att $u * v$ kan ses som ett viktat glidande medelvärde av v.

3.3 Bilinjäritet Om $u, v, w \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ och $c \in \mathbb{C}$ så ger integralens linjäritet att följande likheter gäller i de punkter där de ingående faltningarna är definierade:

$$(u+v) * w = u * w + v * w, \qquad u * (v+w) = u * v + u * w,$$

och

$$(cu) * v = c(u * v) = u * (cv).$$

Man säger att faltning är en *bilinjär* operation, och eftersom faltningen räknemässigt uppför sig som en produkt kallar man funktionerna u och v för faltningen $u * v$:s *faktorer*.

3.4 Kommutativitet och associativitet Om $u, v \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ och faltningen $u * v$ är definierad i en punkt $t \in \mathbb{R}$ så har vi att

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\,dr = \Big/ s = t - r \Big/ = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)v(t-s)\,ds = (v * u)(t).$$

Faltning är alltså en kommutativ operation: $u * v = v * u$.

För $u, v, w \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ gäller inte alltid att $(u * v) * w = u * (v * w)$. Sätt till exempel

$$u(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad v(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \le t \le 2\pi, \\ 0, & t < 0 \text{ eller } t > 2\pi, \end{cases} \qquad w(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Då är $((u * v) * w)(t) = 0$ och $(u * (v * w))(t) = 2\pi$ för alla $t \in \mathbb{R}$, och alla ingående faltningar är väldefinierade på hela $\mathbb{R}$. Under någorlunda allmänna villkor på u, v och w är dock faltning en associativ operation, det vill säga, $(u * v) * w = u * (v * w)$.

3.5 Kommutering med translationer Låt τ_a beteckna translation med a, som i 2.11. Om $u, v \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ så följer direkt av definitionen av faltning att

$$(\tau_a u) * v = \tau_a(u * v) = u * (\tau_a v).$$

Man säger att faltning *kommuterar med translationer*. Detta är en av faltningens mest grundläggande egenskaper.

Det finns många satser som väsentligen säger att om u och v har vissa egenskaper så existerar $u * v$ och har vissa egenskaper. Vi ger två användbara exempel nedan.

3.6 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $v \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ (se 1.4 och 1.6). Då är faltningen $u * v$ definierad på hela $\mathbb{R}$ och är en kontinuerlig och begränsad funktion.*

Om vi istället antar att $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ och att $v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ så gäller slutsatsen oförändrad eftersom $u * v = v * u$.

Bevis Faltningen $u * v$ är definierad på hela $\mathbb{R}$, eftersom integralen $\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\,dr$ är absolutkonvergent för alla $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)v(r)|\,dr \le \int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)|\,\|v\|_\infty\,dr = \|u\|_1 \|v\|_\infty < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Av denna uppskattning följer också att

$$|(u * v)(t)| \le \|u\|_1 \|v\|_\infty, \quad t \in \mathbb{R},$$

vilket ger att $u * v$ är en begränsad funktion. Att $u * v$ är kontinuerlig kommer att följa av att $\|\tau_h u - u\|_1 \to 0$ då $h \to 0$, så vi visar först att detta gäller.

Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ finns enligt sats A.17 en funktion $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är styckvis konstant, har kompakt stöd, och är sådan att $\|u - w\|_1 < \varepsilon/3$. Om N är antalet diskontinuitetspunkter för w så har vi för alla $h \in \mathbb{R}$ att

$$\|\tau_h u - u\|_1 \le \|\tau_h u - \tau_h w\|_1 + \|\tau_h w - w\|_1 + \|w - u\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} + N \cdot 2\|w\|_\infty |h| + \frac{\varepsilon}{3},$$

så $\|\tau_h u - u\|_1 < \varepsilon$ om $|h|$ är tillräckligt litet, vilket visar att $\|\tau_h u - u\|_1 \to 0$ då $h \to 0$.

För att visa att $u * v$ är kontinuerlig låter vi återigen $\varepsilon > 0$. För alla $t, h \in \mathbb{R}$ har vi att

$$\big|(u*v)(t+h) - (u*v)(t)\big| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \big(u(t+h-r) - u(t-r)\big) v(r)\, dr\right| \leq \Big/ s = t - r \Big/$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \big|u(s+h) - u(s)\big| \, \|v\|_\infty \, ds = \|\tau_{-h} u - u\|_1 \|v\|_\infty,$$

vilket enligt ovan medför att $|(u*v)(t+h) - (u*v)(t)| < \varepsilon$ om $|h|$ är tillräckligt litet. Detta visar att $u * v$ är en (likformigt) kontinuerlig funktion. □

3.7 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och att $u(t) = v(t) = 0$ då $t < 0$. Då gäller att faltningen $u * v$ väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ (se 1.3) och att $(u*v)(t) = 0$ då $t < 0$.*

Om också $w \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och $w(t) = 0$ då $t < 0$ så gäller att $(u*v)*w = u*(v*w)$, förutom i högst ändligt många punkter på varje begränsat intervall.

Bevis Om $t < 0$ så är $u(t-r)v(r) = 0$ för alla $r \in \mathbb{R}$, så $(u*v)(t) = 0$ då $t < 0$.

Kalla (tillfälligt) en punkt $t \in \mathbb{R}$ för en *kollisionspunkt* om någon undantagspunkt för funktionen $r \mapsto u(t-r)$, $r \in \mathbb{R}$, sammanfaller med någon undantagspunkt för v. Om $t > 0$ inte är en kollisionspunkt så är integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\, dr = \int_0^t u(t-r)v(r)\, dr$$

absolutkonvergent, eftersom $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och eftersom funktionen $u(t-r)$ är begränsad i en omgivning av varje undantagspunkt för v, och tvärtom. Faltningen $u * v$ är alltså definierad på hela $\mathbb{R}$ utom eventuellt i kollisionspunkterna, och dessa är högst ändligt många på varje begränsat intervall.

Låt $a > 0$ vara en punkt som inte är en kollisionspunkt. Vi visar nu att $u * v$ är kontinuerlig i a. Låt $\varepsilon > 0$ vara sådant att det inte finns någon kollisionspunkt i intervallet $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Sätt $u_0(r) = u(r)$ och $v_0(r) = v(r)$ då $r \leq a + \varepsilon$ och $u_0(t) = v_0(t) = 0$ då $r > a + \varepsilon$. Då gäller att $u_0, v_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $(u*v)(t) = (u_0 * v_0)(t)$ då $a - \varepsilon < t < a + \varepsilon$.

Sätt $v_\varepsilon(r) = v_0(r)$ om det finns en undantagspunkt b för v_0 sådan att $|r - b| < \varepsilon/4$ och sätt $v_\varepsilon(r) = 0$ annars. Sätt $u_\varepsilon(t) = u_0(t)$ om det finns en undantagspunkt b för v_0 sådan att $|t - (a-b)| < \varepsilon/2$ och sätt $u_\varepsilon(t) = 0$ annars. På intervallet $]a - \varepsilon/4, a + \varepsilon/4[$ har vi att $u * v = u_0 * v_0 = u_0 * (v_0 - v_\varepsilon) + u_0 * v_\varepsilon = u_0 * (v_0 - v_\varepsilon) + u_\varepsilon * v_\varepsilon$. Eftersom $u_0, v_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och $v_0 - v_\varepsilon, u_\varepsilon \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ följer av sats 3.6 att $u * v$ är kontinuerlig i a. Alltså har vi att faltningen $u * v$ väsentligen tillhör $\mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$.

För ett godtyckligt $a > 0$ har vi att

$$\int_0^a |(u*v)(t)|\, dt = \int_0^a \left|\int_0^t u(t-r)v(r)\, dr\right| dt \leq \int_0^a \int_0^t |u(t-r)v(r)|\, dr\, dt$$

$$= \int_0^a \int_r^a |u(t-r)|\,|v(r)|\, dt\, dr = \int_0^a \left(\int_0^{a-r} |u(t)|\, dt\right) |v(r)|\, dr$$

$$\leq \int_0^a |u(t)|\, dt \int_0^a |v(r)|\, dr < \infty,$$

vilket visar att $u * v$ väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom integranden är positiv.

Antag nu att $w \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och att $w(t) = 0$ då $t < 0$. Om en punkt $t \geq 0$ är sådan att $(|u| * |v|) * |w|$ är definierad i t, så är också $(u * v) * w$ och $u * (v * w)$ definierade i t, och vi har att

$$\begin{aligned}\big((u * v) * w\big)(t) &= \int_0^t (u * v)(t - r)w(r)\,dr = \int_0^t \bigg(\int_0^{t-r} u(s)v(t - r - s)\,ds\bigg)w(r)\,dr \\ &= \int_0^t u(s)\bigg(\int_0^{t-s} v(t - r - s)w(r)\,dr\bigg)\,ds = \int_0^t u(s)(v * w)(t - s)\,ds \\ &= \big(u * (v * w)\big)(t),\end{aligned}$$

där bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20.

Det följer att $(u * v) * w = u * (v * w)$, förutom i högst ändligt många punkter på varje begränsat intervall, eftersom faltningen $(|u| * |v|) * |w|$ enligt resultaten tidigare i detta bevis väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. □

Regularisering

3.8 Definition Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Om $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ har kompakt stöd och $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,dt = 1$ så kallar vi faltningen $u * \rho$ för en *regularisering* av u.

Anledningen till denna terminologi är att $u * \rho$ är oändligt deriverbar, vilket följer av sats 3.9 nedan, och att värdet av $u * \rho$ i en punkt $t \in \mathbb{R}$ är ett viktat medelvärde av de värden som u antar i punkter av formen $t - r$, där r tillhör stödet för ρ.

3.9 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Om $v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ för något k sådant att $1 \leq k \leq \infty$ och stödet för v är kompakt så gäller att $u * v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ och att*

$$(u * v)'(t) = (u * v')(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bevis Vi antar först att $v \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ och att v har kompakt stöd, och visar att detta medför att $u * v$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

Låt $a \in \mathbb{R}$, låt $b > 0$ vara sådant att $v(t) = 0$ då $|t| \geq b$, och låt u_0 vara den funktion som är lika med u på intervallet $]a - b - 1, a + b + 1[$ och lika med noll för övrigt. Vi har då att

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r)v(t - r)\,dr = \int_{a-b-1}^{a+b+1} u(r)v(t - r)\,dr, \quad |t - a| < 1,$$

så $u * v = u_0 * v$ på intervallet $]a - 1, a + 1[$. Eftersom $u_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och punkten $a \in \mathbb{R}$ var godtycklig följer av sats 3.6 att $u * v$ är definierad och kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

Antag nu att v dessutom tillhör $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ för något k sådant att $1 \leq k \leq \infty$. Av sats A.19 följer att $u * v$ kan deriveras under integraltecknet, så vi får att

$$(u * v)'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r)v'(t - r)\,dr = (u * v')(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Argumentet ovan för att $u * v$ är kontinuerlig ger om det tillämpas på u och v' att $u * v'$ är kontinuerlig, så $u * v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Om $k \geq 2$ så får vi, eftersom v' då tillhör $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, att $(u * v)'' = (u * v')' = u * v''$ och därmed att $u * v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Om $k \geq 3$ så ger upprepning av detta resonemang att $u * v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$. □

För många funktionsrum gäller att regularisering kan användas för att approximera funktioner i funktionsrummet med $\mathcal{C}^\infty$-funktioner. Till exempel har vi följande sats, som vi senare kommer att ha användning av.

3.10 Sats *Antag att $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, att ρ har kompakt stöd och att $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,dt = 1$, och sätt $\rho_n(t) = n\rho(nt)$ för $t \in \mathbb{R}$ och $n = 1, 2, \ldots$. Om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ så är $u * \rho_n$ en följd av regulariseringar av u och det gäller att*

(a) *$u * \rho_n \to u$ likformigt på $\mathbb{R}$ om $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är likformigt kontinuerlig, och att*

(b) *$u * \rho_n \to u$ i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ om $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*

Bevis Vi sätter $C = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(t)|\,dt$ och låter $b > 0$ vara sådant att $\rho(t) = 0$ då $|t| \geq b$. Definitionen av ρ_n ger, för alla $n \geq 1$, att $\rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, att $\rho_n(t) = 0$ då $|t| \geq b/n$, att $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t)\,dt = 1$ och att $\int_{-\infty}^{\infty} |\rho_n(t)|\,dt = C$. Om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ så är alltså $u * \rho_n$ en följd av regulariseringar av u och vi har att

$$\begin{aligned}
\big|(u * \rho_n)(t) - u(t)\big| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)\rho_n(r)\,dr - u(t) \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(r)\,dr \right| \\
&= \left| \int_{-b/n}^{b/n} \big(u(t-r) - u(t)\big)\rho_n(r)\,dr \right| \\
&\leq \int_{-b/n}^{b/n} \big|u(t-r) - u(t)\big| |\rho_n(r)|\,dr, \quad t \in \mathbb{R},\ n \geq 1,
\end{aligned}$$

vilket kommer till användning i bevisen av (a) och (b) nedan.

(a) Antag att $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är likformigt kontinuerlig och låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett $N \geq 1$ sådant att $|u(t+h) - u(t)| < \varepsilon/C$ då $t, h \in \mathbb{R}$ och $|h| < b/N$. För alla $n > N$ och $t \in \mathbb{R}$ har vi nu att

$$\big|(u * \rho_n)(t) - u(t)\big| \leq \int_{-b/n}^{b/n} \big|u(t-r) - u(t)\big| |\rho_n(r)|\,dr < \int_{-b/n}^{b/n} \frac{\varepsilon}{C} |\rho_n(r)|\,dr = \varepsilon,$$

vilket visar att $u * \rho_n \to u$ likformigt på $\mathbb{R}$.

(b) Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Då gäller att $u * \rho_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ för alla $n \geq 1$, eftersom

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(u * \rho_n)(t)|\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)\rho_n(r)\,dr \right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)| |\rho_n(r)|\,dr\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)|\,dt \right) |\rho_n(r)|\,dr = \|u\|_1 \|\rho_n\|_1 < \infty, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom integranden är positiv.

Låt nu $\varepsilon > 0$. Då finns ett $N \geq 1$ sådant att $\|\tau_h u - u\|_1 < \varepsilon/C$ då $|h| < b/N$ (se beviset för sats 3.6). För alla $n > N$ har vi därför att

$$\begin{aligned}
\|u * \rho_n - u\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \big|(u * \rho_n)(t) - u(t)\big|\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-b/n}^{b/n} \big|u(t-r) - u(t)\big| |\rho_n(r)|\,dr\,dt \\
&= \int_{-b/n}^{b/n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \big|u(t-r) - u(t)\big|\,dt \right) |\rho_n(r)|\,dr < \int_{-b/n}^{b/n} \frac{\varepsilon}{C} |\rho_n(r)|\,dr = \varepsilon,
\end{aligned}$$

vilket visar att $u * \rho_n \to u$ i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. $\square$

Faltning och distributioner

3.11 Definition För en distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definieras *faltningen* av u och φ, betecknad $u * \varphi$, som funktionen

$$(u * \varphi)(t) = \big\langle u(t-r), \varphi(r) \big\rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notera att detta överensstämmer med definition 3.1 om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Definitionen kan också skrivas $(u * \varphi)(t) = \langle u(r), \varphi(t-r) \rangle = \langle u, \tau_t \check{\varphi} \rangle$, och ett specialfall av detta är att $(u * \varphi)(0) = \langle u, \check{\varphi} \rangle$. Av definitionen följer att denna faltningsoperation är bilinjär och att den kommuterar med translationer.

3.12 Exempel Vi beräknar faltningen $\delta * \varphi$ av diracimpulsen δ och en testfunktion φ.

Vi har att

$$(\delta * \varphi)(t) = \big\langle \delta(r), \varphi(t-r) \big\rangle = \varphi(t-0) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

det vill säga, $\delta * \varphi = \varphi$. Diracimpulsen är alltså ett enhetselement för faltning.

Låt oss också beräkna faltningen $\delta' * \varphi$. Eftersom $\frac{\partial}{\partial r} \varphi(t-r) = -\varphi'(t-r)$ har vi att

$$(\delta' * \varphi)(t) = \big\langle \delta'(r), \varphi(t-r) \big\rangle = -\big\langle \delta(r), -\varphi'(t-r) \big\rangle = \varphi'(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

det vill säga, $\delta' * \varphi = \varphi'$.

3.13 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Då gäller att $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, och att*

$$(u * \varphi)' = u * \varphi'.$$

Bevis Vi visar först att $u * \varphi$ är deriverbar i en godtycklig punkt $a \in \mathbb{R}$, genom att undersöka gränsvärdet då $h \to 0$ av differenskvoten

$$\frac{(u * \varphi)(a+h) - (u * \varphi)(a)}{h} = \frac{\langle u(r), \varphi(a+h-r) \rangle - \langle u(r), \varphi(a-r) \rangle}{h}.$$

Maclaurinutveckling (se A.8) av funktionen $h \mapsto \varphi(a+h-r)$, där $r \in \mathbb{R}$ är godtyckligt, ger att

$$\varphi(a+h-r) = \varphi(a-r) + h\varphi'(a-r) + \frac{h^2}{2} \psi_h(r), \quad h, r \in \mathbb{R}, \tag{$*$}$$

där

$$\psi_h(r) = \int_0^1 2(1-s)\varphi''(a+hs-r)\, ds, \quad h, r \in \mathbb{R}.$$

Om $h \in \mathbb{R}$ fixeras så har ψ_h kompakt stöd, och av sats A.19 följer att ψ_h kan deriveras upprepade gånger under integraltecknet (med avseende på r), vilket ger att $\psi_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Uppskattning av integraluttrycken för ψ_h och dess derivator ger att $|\psi_h^{(k)}(r)| \leq D_k$ för alla $h, r \in \mathbb{R}$ och $k \in \mathbb{N}$, där $D_k = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k+2)}(t)|$.

Vi låter u verka på båda leden i $(*)$, som funktioner av r, och får att

$$\big\langle u(r), \varphi(a+h-r) \big\rangle = \big\langle u(r), \varphi(a-r) \big\rangle + h\big\langle u(r), \varphi'(a-r) \big\rangle + \frac{h^2}{2} \big\langle u(r), \psi_h(r) \big\rangle, \quad h \in \mathbb{R},$$

vilket ger oss följande uttryck för differenskvoten:

$$\frac{(u * \varphi)(a+h) - (u * \varphi)(a)}{h} = (u * \varphi')(a) + \frac{h}{2} \langle u, \psi_h \rangle, \quad h \neq 0. \tag{$**$}$$

Nu ska vi för första gången i denna framställning *använda* det kontinuitetsvillkor som distributioner uppfyller (se 1.15). Låt $b > 0$ vara sådant att $\varphi(t) = 0$ då $|t| > b$ och sätt $K = [a - (b+1), a + (b+1)]$. Om $|h| < 1$ så gäller att stödet för ψ_h ligger i K, så kontinuitetsvillkoret för u ger att det finns konstanter $C \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att

$$|\langle u, \psi_h \rangle| \leq C \sum_{k=0}^{N} \sup_{r \in K} |\psi_h^{(k)}(r)| \leq C \sum_{k=0}^{N} D_k, \quad |h| < 1.$$

Som funktion av h är alltså $\langle u, \psi_h \rangle$ begränsad då $|h| < 1$, vilket tillsammans med $(**)$ ger att

$$\frac{(u * \varphi)(a+h) - (u * \varphi)(a)}{h} \to (u * \varphi')(a), \quad h \to 0.$$

Eftersom punkten $a \in \mathbb{R}$ var godtycklig visar detta att funktionen $u * \varphi$ är deriverbar och att $(u * \varphi)' = u * \varphi'$. Detta resultat kan nu användas på funktionen $u * \varphi'$, eftersom $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, och vi får då att $u * \varphi'$ är deriverbar (så $u * \varphi$ är två gånger deriverbar) och att $(u * \varphi')' = u * \varphi''$. Upprepning av detta resonemang ger att $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. □

3.14 Faltning av distributioner Om $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ och minst en av u och v har kompakt stöd och vi låter faltningen $u * v$ verka på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, så får vi att

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (u * v)(t)\varphi(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(r) v(t-r)\, dr \right) \varphi(t)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(r) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \check{v}(r-t)\varphi(t)\, dt \right) dr \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(r)(\check{v} * \varphi)(r)\, dr.
\end{aligned}$$

För $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, där minst en av distributionerna u och v har kompakt stöd, definierar vi därför deras *faltning* $u * v$ genom

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u, \check{v} * \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Tack vare att minst en av u och v har kompakt stöd är definitionen meningsfull (se 2.26), och man kan visa (se till exempel [5]) att faltningen $u * v$ tillhör $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att denna faltningsoperation på distributioner är bilinjär och kommutativ och att den kommuterar med translationer.

3.15 Exempel Vi beräknar $u * \delta$ och $\delta * u$ för en distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (Faltning av distributioner *är* en kommutativ operation, så vi kommer att få att $u * \delta = \delta * u$.)

Verkan av $u * \delta$ på en godtycklig testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ges av

$$\langle u * \delta, \varphi \rangle = \langle u, \check{\delta} * \varphi \rangle = \langle u, \delta * \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle,$$

vilket ger att $u * \delta = u$. Vi har använt att $\delta * \varphi = \varphi$ (se exempel 3.12) och att $\check{\delta} = \delta$, vilket följer av att

$$\langle \check{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \check{\varphi} \rangle = \check{\varphi}(0) = \varphi(-0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Verkan av $\delta * u$ på en godtycklig testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ges av

$$\langle \delta * u, \varphi \rangle = \langle \delta, \check{u} * \varphi \rangle = (\check{u} * \varphi)(0) = \langle \check{u}, \check{\varphi} \rangle = \langle u, \check{\check{\varphi}} \rangle = \langle u, \varphi \rangle,$$

vilket ger att $\delta * u = u$.

LTI-system

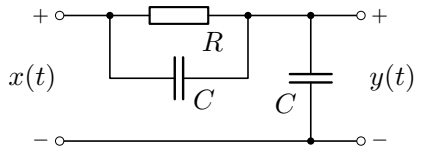
Med ett *system* menas i allmänhet något som omvandlar insignaler till utsignaler, till exempel en elektrisk krets. I en matematisk modell av ett system motsvaras signalerna ofta av funktioner, och systemet motsvaras då av en operator $S\colon X \to Y$, där X och Y är mängder av funktioner.

Många system kan approximativt och inom vissa gränser betraktas som linjära, och kan därför modelleras med en linjär operator S mellan linjära funktionsrum X och Y.

Ett system vars insignaler och utsignaler beror på tiden, och vars natur inte förändras över tiden, kallas *tidsinvariant*. Detta motsvaras i modellen, om funktionerna i X och Y är definierade på $\mathbb{R}$ (betraktad som tidsaxel), av att S är *translationsinvariant*, det vill säga att S kommuterar med translationer.

3.16 Definition Med ett *LTI-system* menar vi en linjär operator $S\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ som kommuterar med translationer, det vill säga, som är sådan att $\tau_a S = S\tau_a$ för alla $a \in \mathbb{R}$. Dessutom antar vi att S uppfyller följande (mycket milda) kontinuitetsvillkor: för varje följd x_n av funktioner i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sådan att $x_n \to 0$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ gäller att $Sx_n \to 0$ punktvis.

3.17 Exempel Betrakta följande filter, med insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$:



Genom kretsberäkningar fås att $2RCy' + y = RCx' + x$. Denna differentialekvation ger dock inte en fullständig beskrivning av filtret. Vi kommer att se nedan, i exempel 3.21 och exempel 3.23, att differentialekvationen ger upphov till hel familj av LTI-system, och att precis ett av dessa LTI-system ger en bra beskrivning av filtret ovan.

3.18 Sats *Antag att S är ett LTI-system. Då finns det en entydigt bestämd distribution $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, kallad systemets impulssvar, sådan att*

$$Sx = h * x, \quad x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Bevis Om det finns ett $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sådant att $Sx = h * x$ för alla $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så följer att

$$\langle h, x\rangle = (h * \check{x})(0) = (S\check{x})(0), \quad x \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

vilket visar att impulssvaret är entydigt bestämt om det existerar. Det visar också hur impulssvaret h måste definieras. Sätt alltså $\langle h, x\rangle = (S\check{x})(0)$ för alla $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Då är h linjär, och det kontinuitetsvillkor som S uppfyller medför att $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ enligt sats 1.16.

Om $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ger definitionen av h att

$$(Sx)(0) = (S\check{\check{x}})(0) = \langle h, \check{x}\rangle = (h * x)(0),$$

och av translationsinvariansen följer nu för alla $t \in \mathbb{R}$ att

$$(Sx)(t) = \tau_{-t}(Sx)(0) = S(\tau_{-t}x)(0) = (h * \tau_{-t}x)(0) = \tau_{-t}(h * x)(0) = (h * x)(t).$$

Alltså gäller att $Sx = h * x$ för alla $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. □

3.19 Diracimpulsen ger impulssvaret Låt S vara ett LTI-system och låt $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vara impulssvaret för S, så att $Sx = h * x$ för alla $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Operationen $x \mapsto h * x$ är väldefinierad också om x är en distribution på $\mathbb{R}$ med kompakt stöd (se 3.14), så S kan utvidgas till sådana insignaler genom att sätta $Sx = h * x$ för alla $x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vars stöd är kompakt.

Speciellt får vi att $S\delta = h * \delta = h$ (se exempel 3.15), det vill säga: om insignalen till ett LTI-system är diracimpulsen så blir utsignalen impulssvaret.

3.20 Sats *Låt L vara differentialoperatorn*

$$L = c_m D^m + \ldots + c_1 D + c_0,$$

där $m \geq 1$, $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ och D betecknar derivering, och låt y_f vara den lösning till den homogena ekvationen $Ly = 0$ som uppfyller följande begynnelsevillkor:

$$y_f(0) = 0,\ y_f'(0) = 0,\ \ldots,\ {y_f}^{(m-2)}(0) = 0,\ \textit{och}\ {y_f}^{(m-1)}(0) = c_m^{-1}.$$

Sätt $f(t) = y_f(t)\chi(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$ (χ är stegfunktionen, se 1.18). Då gäller att $Lf = \delta$.

En funktion f som uppfyller $Lf = \delta$ kallas för en *fundamentallösning* till L.

Bevis Derivatorna i distributionsmening av $f = y_f\chi$ är

$$\begin{aligned} f' &= y_f'\chi + y_f\chi' = y_f'\chi + y_f\delta = y_f'\chi + y_f(0)\delta = y_f'\chi, \\ f'' &= y_f''\chi + y_f'(0)\delta = y_f''\chi, \\ &\vdots \\ f^{(m-1)} &= {y_f}^{(m-1)}\chi + {y_f}^{(m-2)}(0)\delta = {y_f}^{(m-1)}\chi, \end{aligned}$$

och

$$f^{(m)} = {y_f}^{(m)}\chi + {y_f}^{(m-1)}(0)\delta = {y_f}^{(m)}\chi + c_m^{-1}\delta.$$

Detta ger att $Lf = (Ly_f)\chi + c_m c_m^{-1}\delta = \delta$, eftersom $Ly_f = 0$. □

3.21 Exempel Vi bestämmer alla de LTI-system som differentialekvationen för filtret i exempel 3.17 ger upphov till. För enkelhets skull antar vi att $RC = 1$.

Låt alltså S vara ett LTI-system sådant att om $y = Sx$ så gäller att $2y' + y = x' + x$. Detta ger att impulssvaret $h = S\delta$ för S uppfyller differentialekvationen

$$2h' + h = \delta' + \delta,$$

och vi bestämmer nu samtliga lösningar $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till denna ekvation.

Den allmänna lösningen h_h till motsvarande homogena ekvation $2h' + h = 0$ är, enligt sats 2.16, $h_h(t) = Ce^{-t/2}$, där $C \in \mathbb{C}$ är en godtycklig konstant.

För att hitta en partikulärlösning h_p använder vi först sats 3.20, med $L = 2D + 1$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $Lh = 0$ (det vill säga $2h' + h = 0$) är alltså $Ce^{-t/2}$, så den lösning h_f som uppfyller $h_f(0) = 2^{-1}$ är $h_f(t) = 2^{-1}e^{-t/2}$. Vi sätter

$$f(t) = h_f(t)\chi(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\chi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

och har då enligt sats 3.20 att $Lf = \delta$, det vill säga att $2f' + f = \delta$.

Med hjälp av funktionen f kan en partikulärlösning till högerledet $\delta' + \delta$ konstrueras. Vi har nämligen att

$$L(f' + f) = L\big((D+1)f\big) = (D+1)(Lf) = (D+1)\delta = \delta' + \delta,$$

så den sökta partikulärlösningen är

$$h_p = f' + f = \left(\frac{1}{2}e^{-t/2}\chi\right)' + \frac{1}{2}e^{-t/2}\chi = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}e^{-t/2}\chi.$$

Samtliga lösningar $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $2h' + h = \delta' + \delta$ ges därmed av

$$h = h_p + h_h = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}e^{-t/2}\chi + Ce^{-t/2},$$

där $C \in \mathbb{C}$ är en godtycklig konstant. Differentialekvationen $2y' + y = x' + x$ ger alltså upphov till en 1-parameterfamilj av LTI-system S sådana att differentialekvationen blir uppfylld om $y = Sx$.

3.22 Kausalitet Ett LTI-system S kallas *kausalt* om utsignalen Sx:s värden inte beror på ”framtida” värden hos insignalen x, eller mera precist: systemet S kallas kausalt om det för alla $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ och $a \in \mathbb{R}$ sådana att $x_1(t) = x_2(t)$ för alla $t < a$ gäller att $(Sx_1)(t) = (Sx_2)(t)$ för alla $t < a$.

Om h är impulssvaret för S så är det en rättfram följd av definitionerna och sats 2.25 att S är kausalt om och endast om $h = 0$ på intervallet $]-\infty, 0[$.

3.23 Exempel Bland de LTI-system vi fick fram i exempel 3.21 finns precis ett kausalt system, nämligen det system S som har impulssvaret

$$h = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}e^{-t/2}\chi,$$

ty om $h = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}e^{-t/2}\chi + Ce^{-t/2}$ så är $h = 0$ på $]-\infty, 0[$ om och endast om $C = 0$.

Sambandet mellan in- och utsignal för det kausala systemet S blir alltså

$$y = Sx = h * x = \left(\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}e^{-t/2}\chi\right) * x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(e^{-t/2}\chi) * x,$$

och mera explicit får vi följande formel för utsignalen y uttryckt i insignalen x:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}e^{-(t-r)/2}\chi(t-r)x(r)\,dr \\ &= \frac{1}{2}x(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{4}e^{-(t-r)/2}x(r)\,dr, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Det kausala systemet S är det LTI-system som bäst beskriver det filter vi utgick ifrån i exempel 3.17. Varje annat system i exempel 3.21 har egenskapen att det finns många insignaler $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ som ger utsignaler y sådana att $|y(t)| \to \infty$ då $t \to -\infty$.

Övningar

3A Beräkna faltningen av följande funktioner:

(a) $e^t\chi(t)$ och $t\chi(t)$, (b) $\chi(1-t)$ och $e^{-|t-2|}$.

3B Bestäm alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $y'' + 4y = \delta' - 2\delta$.

3C Låt $h > 0$ och sätt $\rho(t) = 1/2h$ då $|t| \leq h$ och $\rho(t) = 0$ då $|t| > h$. Notera att ρ har kompakt stöd och att $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,dt = 1$ (jämför med villkoren på ρ i definition 3.8). Beräkna faltningen $u * \rho$, där $u(t) = t\chi(t)$. Notera att grafen för $u * \rho$ ser ut som u:s graf med hörnet vid $t = 0$ avrundat, och att $u * \rho$ närmar sig u då $h \to 0$.

3D För ett LTI-system S gäller att $y'' - y = x$ då $y = Sx$.

(a) Bestäm alla impulssvar som systemet S kan ha.

(b) Kan systemet S vara kausalt? Ange i så fall det kausala systemets impulssvar och ge en explicit formel för y uttryckt i x för detta system.

(c) Kan impulssvaret för S vara en begränsad funktion? Ange i så fall detta impulssvar.

3E Visa följande påståenden:

(a) För alla $a \in \mathbb{R}$ och $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gäller att $\delta_a * \varphi = \tau_a\varphi$.

(b) Om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ är sådan att $u * \varphi = \varphi$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så gäller att $u = \delta$.

***3F** Bestäm impulssvaret för det *antikausala* (impulssvaret är lika med noll på $]0, \infty[$) LTI-system S som är sådant att $y'' - 2y' + y = x'''$ om $y = Sx$.

***3G** Låt $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och låt $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Visa att $(u * \varphi)' = u' * \varphi$.

***3H** Låt t_+^a beteckna den funktion som är lika med t^a då $t > 0$ och lika med 0 då $t \leq 0$. Visa att för $a, b > -1$ gäller att $t_+^a * t_+^b = C_{a,b}\, t_+^{a+b+1}$, där $C_{a,b}$ är en konstant. Beräkna även $C_{-1/2,-1/2}$.

****3I** Visa först att om $f, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och v har kompakt stöd så gäller att $(f * v)' = f' * v$. Låt nu L och f vara som i sats 3.20 och antag att $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ har kompakt stöd. Ange med hjälp av f en lösning $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till ekvationen $Lu = v$.

****3J** Låt S vara ett LTI-system och låt h vara dess impulssvar. Visa att S är kausalt om och endast om $h = 0$ på intervallet $]-\infty, 0[$.

****3K** Varje differentialekvation $c_m y^{(m)} + \ldots + c_0 y = d_n x^{(n)} + \ldots + d_0 x$, där $m, n \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_m, d_0, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$, $c_m \neq 0$ och $d_n \neq 0$, ger upphov till en familj av LTI-system, bestående av de LTI-system S för vilka differentialekvationen är uppfylld närhelst $y = Sx$. Ge ett exempel på ett LTI-system som inte är av denna typ.

Fourierserier

Att representera en periodisk funktion som summan av en serie av harmoniska svängningar är en fundamental och kraftfull metod för att analysera och lösa problem inom många teknik- och naturvetenskaper. Mera precist ordnas till en funktion $u(t)$ med period T en trigonometrisk serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int/T}, \text{ där } c_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-2\pi int/T}\,dt.$$

Serien kallas för u:s *fourierserie* och koefficienterna c_n kallas för u:s *fourierkoefficienter*, efter Joseph Fourier (1768–1830) som i början av 1800-talet löste värmeledningsproblem med denna metod.

Huvudproblemet i teorin för fourierserier är att avgöra vilka funktioner som, i någon lämplig mening, är lika med sin fourierserie. Detta problem har sedan början av 1800-talet varit en viktig drivkraft för utvecklingen av matematisk analys.

Föreläsning 4

Periodiska funktioner

4.1 Definition Låt $T > 0$. En funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sägs vara *T-periodisk*, eller sägs *ha period T*, om $u(t) = u(t-T)$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

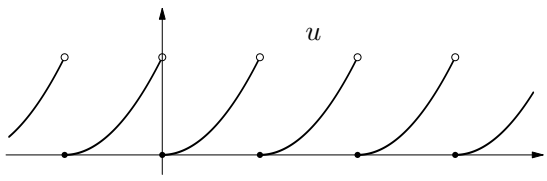
Om u är T-periodisk så följer att $u(t) = u(t-nT)$ för alla $t \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{Z}$, så u har också perioderna $2T$, $3T$, $4T$, $\ldots$. Varje kontinuerlig periodisk funktion, utom konstanta funktioner, har dock en *minsta* period.

Notera att många operationer på periodiska funktioner bevarar periodiciteten. Om u är T-periodisk så är till exempel $|u|$, u' (om u är deriverbar), $\tau_a u$, $\check{u}$ (se 2.11) och $\overline{u}$ T-periodiska, och om också v är T-periodisk så är $u+v$ och uv T-periodiska.

När T betecknar periodlängd låter vi genomgående $\Omega = 2\pi/T$ beteckna motsvarande vinkelfrekvens, kallad *grundvinkelfrekvensen*.

4.2 Exempel Låt funktionen u ha period 1 och ges av $u(t) = t^2$ då $0 \le t < 1$.

Detta kallas att definiera u genom *periodisk utvidgning*. Observera att u är fullständigt bestämd: om $1 \le t < 2$ så är $u(t) = u(t-1) = (t-1)^2$, eftersom $0 \le t-1 < 1$ då $1 \le t < 2$, och om $2 \le t < 3$ så är $u(t) = u(t-2) = (t-2)^2$, och så vidare:



4.3 Exempel Låt $T > 0$ och låt, som alltid, $\Omega = 2\pi/T$. De *harmoniska svängningarna*

$$\ldots,\ e^{-i3\Omega t},\ e^{-i2\Omega t},\ e^{-i\Omega t},\ 1,\ e^{i\Omega t},\ e^{i2\Omega t},\ e^{i3\Omega t},\ \ldots$$

$$1,\ \cos\Omega t,\ \cos 2\Omega t,\ \cos 3\Omega t,\ \ldots,\ \sin\Omega t,\ \sin 2\Omega t,\ \sin 3\Omega t,\ \ldots$$

har alla period T. Deras vinkelfrekvenser är 0, Ω, 2Ω, 3Ω, $\ldots$, det vill säga multipler av grundvinkelfrekvensen, och deras minsta perioder är T, $T/2$, $T/3$, $\ldots$, förutom den konstanta funktionen 1, som inte har någon minsta period.

Svängningarna är relaterade till varandra genom *Eulers formler*:

$$e^{in\Omega t} = \cos n\Omega t + i \sin n\Omega t,$$

$$\cos n\Omega t = \frac{e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}}{2}, \qquad \sin n\Omega t = \frac{e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}}{2i}.$$

4.4 Medelvärdet av en periodisk funktion Låt u vara en T-periodisk funktion som tillhör $\mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ (se 1.3). Förutsatt att integralerna nedan är konvergenta gäller att

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} u(t)\,dt &= \int_a^0 u(t)\,dt + \int_0^T u(t)\,dt + \int_T^{a+T} u(t)\,dt \\ &= -\int_0^a u(t)\,dt + \int_0^T u(t)\,dt + \int_0^a u(t+T)\,dt = \int_0^T u(t)\,dt, \quad a \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

eftersom $u(t+T) = u(t)$. Värdet av integralen *över en period*, det vill säga över ett intervall av längd T, beror alltså inte av var på reella axeln intervallet ligger.

Om integralen av u över en period är konvergent så definierar vi *medelvärdet* av u, betecknat $⨍_T u(t)\,dt$, genom

$$⨍_T u(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} u(t)\,dt,$$

där $a \in \mathbb{R}$ är godtyckligt.

4.5 Trigonometriska polynom och serier En linjärkombination P av T-periodiska harmoniska svängningar, till exempel

$$P(t) = 4 - (1+2i)\sin\Omega t - 3e^{-i4\Omega t} + \sqrt{2}\cos 4\Omega t,$$

kallas ett T-periodiskt *trigonometriskt polynom*.

Genom att använda Eulers formler kan ett trigonometriskt polynom alltid skrivas på så kallad *komplex form*:

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t},$$

för något $N \in \mathbb{N}$ och några $c_{-N}, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$, och även på så kallad *reell form*:

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där sambanden mellan koefficienterna i den reella och den komplexa formen ges av

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, && 0 \le n \le N, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}), && 1 \le n \le N. \end{aligned}$$

Den komplexa formen är oftast smidigare att arbeta med eftersom den bara har en följd av koefficienter istället för två och eftersom exponentialfunktionens räkneregler är enklare än räknereglerna för sinus och cosinus. Den reella formen har fördelen att P är reellvärd om och endast om $a_0, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ är reella.

Observera att linjärkombinationer av harmoniska svängningar som inte har någon gemensam period inte behöver vara trigonometriska polynom. Funktionen $\sin t + \sin \sqrt{2}\,t$, till exempel, är inte periodisk.

En T-periodisk *trigonometrisk serie*, på *komplex form* respektive *reell form*, är en funktionsserie (se A.13)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t},$$

respektive

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där koefficienterna a_n, b_n och c_n är relaterade på samma sätt som för trigonometriska polynom. Notera att den reella formens följd av delsummor,

$$\frac{a_0}{2},\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{1} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{2} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),\ \ldots,$$

är lika med den komplexa formens följd av så kallade *symmetriska delsummor*:

$$c_0,\ \sum_{n=-1}^{1} c_n e^{in\Omega t},\ \sum_{n=-2}^{2} c_n e^{in\Omega t},\ \ldots.$$

4.6 En formel för c_n En rättfram beräkning ger följande resultat, som är grundläggande i teorin för fourierserier: om $m, n \in \mathbb{Z}$ så gäller att

$$\fint_T e^{im\Omega t} e^{-in\Omega t}\, dt = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Nästa föreläsning kommer vi att tolka vänsterledet som skalärprodukten av funktionerna $e^{im\Omega t}$ och $e^{in\Omega t}$, så vi ser detta som en *ortogonalitetsrelation*.

Låt nu $P(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t}$ vara ett trigonometriskt polynom. För $n \in \mathbb{Z}$ får vi, med hjälp av ortogonalitetsrelationen, att

$$\fint_T P(t) e^{-in\Omega t}\, dt = \fint_T \Big(\sum_{m=-N}^{N} c_m e^{im\Omega t} \Big) e^{-in\Omega t}\, dt = \sum_{m=-N}^{N} c_m \fint_T e^{im\Omega t} e^{-in\Omega t}\, dt$$

$$= \sum_{m=-N}^{N} c_m \cdot \begin{Bmatrix} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{Bmatrix} = \begin{cases} c_n, & |n| \leq N, \\ 0, & |n| > N. \end{cases}$$

Vi har alltså följande formel för koefficienten c_n till det trigonometriska polynomet P:

$$c_n = \fint_T P(t) e^{-in\Omega t}\, dt, \quad -N \leq n \leq N.$$

Notera att c_0 helt enkelt är medelvärdet av P. Denna integralformel för c_n motiverar definitionen av fourierkoefficienter nedan.

Fourierkoefficienter och fourierserier

Vi definierar först ett rum av funktioner för vilka integralen i formeln för c_n (se 4.6) blir väldefinierad och absolutkonvergent.

4.7 Rummet $\mathcal{L}^1_T$ Låt $T > 0$. Vi låter $\mathcal{L}^1_T$ beteckna mängden av de funktioner $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ som är T-periodiska och sådana att

$$\int_0^T |u(t)|\,dt < \infty.$$

Det följer att $\mathcal{L}^1_T$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ (se 1.4).

För en funktion $u \in \mathcal{L}^1_T$ definieras $\mathcal{L}^1_T$-*normen* av u, betecknad $\|u\|_{1,T}$, genom

$$\|u\|_{1,T} = \fint_T |u(t)|\,dt.$$

Att $\|\ \|_{1,T}$ är en norm på $\mathcal{L}^1_T$ är en rättfram följd av definitionen. I rummet $\mathcal{L}^1_T$ definieras det naturliga konvergensbegreppet med hjälp av $\|\ \|_{1,T}$: om u och u_n, $n = 1, 2, \ldots$, tillhör $\mathcal{L}^1_T$ så sägs följden u_n *konvergera mot* u *i* $\mathcal{L}^1_T$ om $\|u_n - u\|_{1,T} \to 0$ då $n \to \infty$.

4.8 Definitioner För en funktion $u \in \mathcal{L}^1_T$ definieras u:s följd av *fourierkoefficienter*, betecknad $\hat{u}$ eller $\mathscr{F}_T u$, genom

$$\hat{u}(n) = (\mathscr{F}_T u)(n) = \fint_T u(t)e^{-in\Omega t}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

och den trigonometriska serien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{in\Omega t}$$

kallas för u:s *fourierserie*, på komplex form. Observera att det följer att ett T-periodiskt trigonometriskt polynom kan sägas vara lika med sin egen fourierserie (se 4.6).

Den reella formen av u:s fourierserie är

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t),$$

där

$$a_n = \hat{u}(n) + \hat{u}(-n) = 2\fint_T u(t)\cos n\Omega t\,dt, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n = i\big(\hat{u}(n) - \hat{u}(-n)\big) = 2\fint_T u(t)\sin n\Omega t\,dt, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Integralformlerna för a_n och b_n fås direkt från definitionen av $\hat{u}(n)$ och Eulers formler.

För $N \in \mathbb{N}$ låter vi $S_N u$ beteckna den *N:te symmetriska delsumman* till u:s fourierserie, det vill säga det trigonometriska polynomet

$$(S_N u)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n)e^{in\Omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t).$$

Fourierserien för u sägs vara *konvergent* i en punkt $a \in \mathbb{R}$ om gränsvärdet

$$\lim_{N\to\infty} (S_N u)(a)$$

existerar ändligt, och gränsvärdet kallas då *fourierseriens summa* i punkten a.

Varje funktion $u \in \mathcal{L}^1_T$ har alltså en fourierserie, men denna serie kan mycket väl vara divergent i vissa punkter. Det finns faktiskt till och med kontinuerliga funktioner vars fourierserier divergerar i oändligt många punkter per period, se till exempel [8].

4.9 Exempel Vi bestämmer fourierserien för den funktion u som har period 2 och som ges av $u(t) = 1$ då $0 \le t < 1$ och av $u(t) = 0$ då $1 \le t < 2$.

Eftersom $T = 2$ är $\Omega = 2\pi/T = \pi$, så u:s fourierkoefficienter ges av

$$\hat{u}(n) = \fint_T u(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 u(t)e^{-in\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-in\pi t}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 0\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Detta ger att $\hat{u}(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-i0\pi t}\,dt = \frac{1}{2}$, och för $n \neq 0$ får vi att

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}\right]_0^1 = \frac{1 - e^{-in\pi}}{2in\pi} = \frac{1-(-1)^n}{2in\pi}, \quad n \neq 0.$$

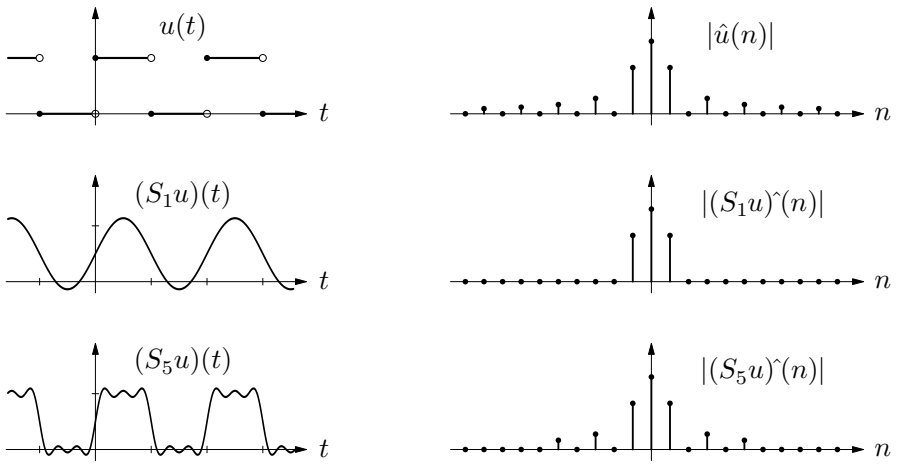
Fourierserien för u blir alltså

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{in\Omega t} = \frac{1}{2} + \sum_{n\neq 0} \frac{1-(-1)^n}{2in\pi}\, e^{in\pi t}.$$

Genom att använda formlerna i 4.8 som uttrycker a_n och b_n i termer av $\hat{u}(n)$, eller genom att använda Eulers formler, får vi att den reella formen av u:s fourierserie är

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi t = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t + \dots.$$

Följande figurer visar utseendet för u och för två delsummor till u:s fourierserie:



För de flesta punkter a på reella axeln är det svårt att utan ytterligare teori avgöra om fourierserien är konvergent i a. För $a = 0$ har vi dock att

$$(S_N u)(0) = \frac{1}{2} + \sum_{0\neq|n|\le N} \frac{1-(-1)^n}{2in\pi}\, e^{in\pi 0} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin(n\pi 0) = \frac{1}{2}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Så u:s fourierserie är konvergent i punkten 0, och fourierseriens summa i 0 är 1/2. Det kan alltså inträffa att fourierseriens summa i en punkt a inte är lika med $u(a)$. Notera även att den numeriska serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{in\pi 0}$ inte är konvergent i vanlig mening (se A.11).

Räkneregler för fourierkoefficienter

4.10 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1_T$ och, för (h) nedan, att u är kontinuerligt deriverbar. Då gäller följande räkneregler (där varje rad ger den n:te fourierkoefficienten för motsvarande funktion av t):*

(a)	$u(t) + v(t)$	$\hat{u}(n) + \hat{v}(n)$	
(b)	$cu(t)$	$c\hat{u}(n)$	$(c \in \mathbb{C})$
(c)	$\overline{u(t)}$	$\overline{\hat{u}(-n)}$	
(d)	$u(-t)$	$\hat{u}(-n)$	
(e)	$u(at)$ *(period T/a)*	$\hat{u}(n)$	$(a > 0)$
(f)	$u(t-a)$	$e^{-in\Omega a}\hat{u}(n)$	$(a \in \mathbb{R})$
(g)	$e^{im\Omega t}u(t)$	$\hat{u}(n-m)$	$(m \in \mathbb{Z})$
(h)	$u'(t)$	$in\Omega\hat{u}(n)$	

Notera att (a) och (b) medför att operationen $u \mapsto \hat{u}$ är linjär, från $\mathcal{L}^1_T$ till det linjära rummet av komplexvärda funktioner definierade på $\mathbb{Z}$. Notera även att (d) medför att operationen $u \mapsto \hat{u}$ är *paritetsbevarande*, det vill säga: om u är jämn så blir $\hat{u}$ jämn, och om u är udda så blir $\hat{u}$ udda.

Bevis Vi visar (d) och (h). Resten av bevisen följer samma mönster.
(d) Antag att $u \in \mathcal{L}^1_T$ och sätt $v(t) = u(-t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\hat{v}(n) &= \fint_T v(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(-t)e^{-in\Omega t}\,dt = \Big/ r = -t \Big/ \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{-T} u(r)e^{in\Omega r}(-dr) = \frac{1}{T}\int_{-T}^0 u(r)e^{-i(-n)\Omega r}\,dr \\
&= \hat{u}(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(h) Antag att u är en T-periodisk och kontinuerligt deriverbar funktion (av detta följer att $u \in \mathcal{L}^1_T$) och sätt $v(t) = u'(t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\hat{v}(n) &= \fint_T v(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u'(t)e^{-in\Omega t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\Big[u(t)e^{-in\Omega t}\Big]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)(-in\Omega)e^{-in\Omega t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\big(u(T)e^{-in2\pi} - u(0)\big) + in\Omega\,\frac{1}{T}\int_0^T u(t)e^{-in\Omega t}\,dt \\
&= in\Omega\hat{u}(n), \quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

eftersom $u(T) = u(0)$. □

4.11 Exempel Vi bestämmer en π-periodisk lösning y till ekvationen

$$y'(t) - 2y(t - \pi/2) = 20\cos 6t, \quad t \in \mathbb{R},$$

med hjälp av teorin för fourierserier.

Vi har att $T = \pi$, så $\Omega = 2\pi/T = 2$. Den n:te fourierkoefficienten för ekvationens vänsterled är, enligt sats 4.10,

$$in2\hat{y}(n) - 2e^{-in2(\pi/2)}\hat{y}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(Att y är deriverbar och uppfyller ekvationen medför att y är kontinuerligt deriverbar.)

Ekvationens högerled $20\cos 6t$ är ett π-periodiskt trigonometriskt polynom. Vi skriver det på komplex form: $10e^{i6t} + 10e^{-i6t}$, så att vi kan läsa av dess fourierkoefficienter genom att jämföra med ett allmänt π-periodiskt trigonometriskt polynom $\sum_n c_n e^{in2t}$. Vi ser att högerledets fourierkoefficienter är 10 om $n = \pm 3$, och 0 annars.

Vänsterledet och högerledet måste ha samma fourierkoefficienter, så vi får att

$$in2\hat{y}(n) - 2(-1)^n\hat{y}(n) = \begin{cases} 10, & n = \pm 3, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Eftersom $in2 - 2(-1)^n \neq 0$ då $n \in \mathbb{Z}$ är fourierkoefficienterna $\hat{y}(n)$ entydigt bestämda. De enda nollskilda koefficienterna är $\hat{y}(3) = 10/(6i+2)$ och $\hat{y}(-3) = 10/(-6i+2)$, så y:s fourierserie är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{y}(n)e^{in2t} = \frac{5}{1+3i}e^{i6t} + \frac{5}{1-3i}e^{-i6t} = \cos 6t + 3\sin 6t.$$

Om vi nu sätter $y(t) = \cos 6t + 3\sin 6t$ så är y en π-periodisk lösning till ekvationen, vilket kan kontrolleras genom insättning.

Punktvis konvergens

En central frågeställning i teorin för fourierserier är vilka villkor på en funktion som är nödvändiga respektive tillräckliga för att dess fourierserie ska vara konvergent i en given punkt. Detta är en mycket komplicerad fråga, men i många situationer ger sats 4.16 nedan all information vi behöver.

Vi har först två satser om allmänna egenskaper hos fourierkoefficienter.

4.12 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1_T$. Då gäller att*

$$|\hat{u}(n)| \leq \fint_T |u(t)|\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bevis Vi har att

$$|\hat{u}(n)| = \left|\fint_T u(t)e^{-in\Omega t}\,dt\right| \leq \fint_T \left|u(t)e^{-in\Omega t}\right|dt = \fint_T |u(t)|\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Uppskattningen i satsen ovan kan också skrivas $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_{1,T}$, och detta medför att den linjära operationen $u \mapsto \hat{u}$ är kontinuerlig, från det linjära rummet $\mathcal{L}^1_T$ till rummet av begränsade komplexvärda funktioner definierade på $\mathbb{Z}$, med likformig konvergens som konvergensbegrepp.

4.13 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1_T$. Då gäller att $\hat{u}(n) \to 0$ då $n \to \pm\infty$.* $\square$

Sats 4.13 är en direkt följd av nästa resultat, som kallas *Riemann–Lebesgues lemma* och som vi kommer att ha användning av flera gånger.

4.14 Riemann–Lebesgues lemma *Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Då gäller att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{i\omega t}\,dt \to 0, \quad \omega \to \pm\infty.$$

Observera att en direkt följd av lemmat och Eulers formler är att $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t\,dt \to 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos\omega t\,dt \to 0$ då $\omega \to \pm\infty$, om $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Bevis Låt $\varepsilon > 0$. Enligt sats A.17 finns en funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är styckvis konstant, har kompakt stöd, och är sådan att $\|u - v\|_1 < \varepsilon/2$. Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{i\omega t}\,dt$$

är en (ändlig) linjärkombination av integraler av typen $\int_a^b e^{i\omega t}\,dt$, där $-\infty < a < b < \infty$, och

$$\int_a^b e^{i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_a^b = \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega} \to 0, \quad \omega \to \pm\infty,$$

så det följer att

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{i\omega t}\,dt \to 0, \quad \omega \to \pm\infty.$$

Eftersom $\|u - v\|_1 < \varepsilon/2$ har vi att

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{i\omega t}\,dt\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \big(u(t) - v(t)\big)e^{i\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{i\omega t}\,dt\right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - v(t)|\,dt + \left|\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{i\omega t}\,dt\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{i\omega t}\,dt\right|, \quad \omega \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

vilket är mindre än ε om $|\omega|$ är tillräckligt stort. □

4.15 Generaliserade höger- och vänsterderivator Låt $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vara en godtycklig funktion. Om u har högergränsvärde i en punkt $a \in \mathbb{R}$ (se A.7), så sägs u ha *generaliserad högerderivata* i a om gränsvärdet

$$D^+u(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{u(a+h) - u(a+)}{h}$$

existerar ändligt. Analogt, om u har vänstergränsvärde i a så sägs u ha *generaliserad vänsterderivata* i a om gränsvärdet

$$D^-u(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{u(a+h) - u(a-)}{h}$$

existerar ändligt.

Observera att funktionsvärdet $u(a)$ saknar betydelse för existensen av $u(a+)$, $u(a-)$, $D^+u(a)$ och $D^-u(a)$. Detta skiljer $D^+u(a)$ och $D^-u(a)$ från den vanliga högerderivatan och vänsterderivatan till u i a, som definieras som gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

då $h \to 0+$ respektive $h \to 0-$.

Nu kan vi formulera och bevisa den sats vi kallar *satsen om punktvis konvergens*, som är ett huvudresultat i teorin för fourierserier.

4.16 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1_T$ och antag att u har generaliserad högerderivata och generaliserad vänsterderivata i en punkt $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{in\Omega a} = \frac{u(a+) + u(a-)}{2}.$$

Om satsens förutsättningar är uppfyllda så är med andra ord u:s fourierserie konvergent i punkten a, och fourierseriens summa i a är lika med medelvärdet av u:s höger- och vänstergränsvärde i a. Observera att om u dessutom är kontinuerlig i a så är fourierseriens summa i punkten a lika med $u(a)$, eftersom det då gäller att $u(a+) = u(a-) = u(a)$.

Bevis Vi börjar med följande omskrivningar:

$$\begin{aligned}(S_N u)(a) &= \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{in\Omega a} = \sum_{n=-N}^{N} \Big(\fint_T u(t) e^{-in\Omega t}\, dt \Big) e^{in\Omega a} \\ &= \fint_T u(t) \Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{in\Omega(a-t)} \Big)\, dt = \fint_T u(t) D_N(a-t)\, dt,\end{aligned}$$

där vi infört beteckningen D_N för funktionen $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\Omega t}$, den så kallade *dirichletkärnan*. Av definitionen följer att D_N är en jämn T-periodisk funktion, så vi har att

$$(S_N u)(a) = \fint_T u(t) D_N(t-a)\, dt = \fint_T u(a+t) D_N(t)\, dt.$$

Definitionen av D_N ger också att

$$\fint_T D_N(t)\, dt = 1,$$

eftersom enbart den konstanta termen ger något bidrag till integralen. Detta medför i sin tur, eftersom D_N är jämn, att

$$\frac{1}{T}\int_0^{T/2} D_N(t)\, dt = \frac{1}{2}, \quad \text{och} \quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} D_N(t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

Vidare har vi att $(e^{i\Omega t} - 1) D_N(t) = e^{i(N+1)\Omega t} - e^{-iN\Omega t}$, och om vi multiplicerar denna likhet med $e^{-i\Omega t/2}$ och använder Eulers formler får vi att

$$D_N(t) = \frac{\sin\big((2N+1)\Omega t/2\big)}{\sin(\Omega t/2)}, \quad t \neq nT,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Vi har också att $D_N(nT) = 2N+1$ för $n \in \mathbb{Z}$, genom insättning i definitionen av D_N, eller genom att ta gränsvärdet i formeln ovan.

Av det ovanstående får vi att $(S_N u)(a) - \big(u(a+) + u(a-)\big)/2$ är lika med

$$\frac{1}{T}\int_0^{T/2} \big(u(a+t) - u(a+)\big) D_N(t)\, dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} \big(u(a+t) - u(a-)\big) D_N(t)\, dt.$$

Vi definierar funktionen v genom

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{u(a+t)-u(a+)}{t} \cdot \dfrac{t}{\sin(\Omega t/2)}, & 0 < t < T/2, \\ \dfrac{u(a+t)-u(a-)}{t} \cdot \dfrac{t}{\sin(\Omega t/2)}, & -T/2 < t < 0, \\ 0, & \text{annars}, \end{cases}$$

och får till slut att

$$(S_N u)(a) - \frac{u(a+)+u(a-)}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v(t)\sin\bigl((2N+1)\Omega t/2\bigr)\,dt.$$

Eftersom u har generaliserad höger- och vänsterderivata i punkten a har v höger- och vänstergränsvärde i $t = 0$. Detta, tillsammans med att $u \in \mathcal{L}^1_T$, medför att $v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så det följer av Riemann–Lebesgues lemma (4.14) att den sista integralen ovan går mot noll då $N \to \infty$. □

4.17 Exempel Låt funktionen u ha period 2 och ges av $u(t) = 1$ då $0 \le t < 1$ och av $u(t) = 0$ då $1 \le t < 2$, som i exempel 4.9. Fourierserien för u är, enligt detta exempel,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{1-(-1)^n}{2in\pi} e^{in\pi t}.$$

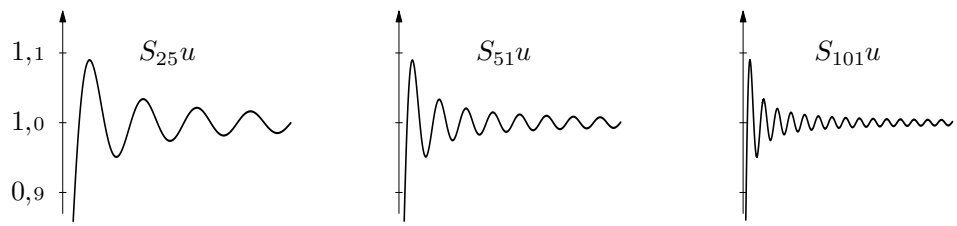
Vi använder nu satsen om punktvis konvergens (4.16) för att bestämma denna series uppförande.

Funktionen u har generaliserad höger- och vänsterderivata i varje punkt $t \in \mathbb{R}$, så satsen om punktvis konvergens ger att u:s fourierserie är konvergent i varje punkt t, och att fourierseriens summa (som har period 2) ges av

$$\begin{cases} 1/2, & t = 0 \text{ eller } t = 1, \\ 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < 2, \end{cases}$$

i intervallet $[0, 2[$. Vad detta innebär grafiskt ser vi genom att jämföra grafen för u, nedan till vänster, med grafen för fourierseriens summa, till höger:

Följande figurer ger en viss uppfattning om hur fourierseriens delsummor ser ut nära en språngdiskontinuitet. Det faktum att storleken av $S_N u$:s översläng närmar sig en viss andel av språngets höjd (ungefär 9%) då $N \to \infty$ brukar kallas för *Gibbs fenomen*.



Entydighet

Med entydighet i detta sammanhang menas frågan om i vilken utsträckning en funktion är bestämd av sina fourierkoefficienter. Två funktioner med samma fourierkoefficienter kan skilja sig åt i enstaka punkter: om $u(t) = 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$, och v är T-periodisk och sådan att $v(0) = 1$ och $v(t) = 0$ då $0 < t < T$, så är $\hat{u}(n) = \hat{v}(n) = 0$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Vi har dock följande starka entydighetssats.

4.18 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1_T$ har samma fourierkoefficienter. Då är $u(t) = v(t)$ i alla punkter $t \in \mathbb{R}$ där både u och v är kontinuerliga.* □

Sats 4.18 är en direkt följd av nästa sats, som också har andra viktiga följdsatser.

4.19 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1_T$ och antag att u har högergränsvärde och vänstergränsvärde i en punkt $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{u}(n) e^{in\Omega a} = \frac{u(a+) + u(a-)}{2}.$$

Summan i vänsterledet ovan betecknar vi $(\bar{S}_N u)(a)$. Notera att den är medelvärdet av de $N+1$ första symmetriska delsummorna till u:s fourierserie (i punkten a), det vill säga:

$$(\bar{S}_N u)(a) = \frac{(S_0 u)(a) + \ldots + (S_N u)(a)}{N+1} = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{u}(n) e^{in\Omega a}.$$

Bevis Vi börjar med följande omskrivningar:

$$(\bar{S}_N u)(a) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \hat{u}(n) e^{in\Omega a} = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) \left(\fint_T u(t) e^{-in\Omega t}\, dt\right) e^{in\Omega a}$$

$$= \fint_T u(t) \left(\sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N+1}\right) e^{in\Omega(a-t)} \right) dt = \fint_T u(t) F_N(a-t)\, dt,$$

där $F_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \big(1 - |n|/(N+1)\big) e^{in\Omega t}$ är den så kallade *fejérkärnan*. Av definitionen följer att F_N är en jämn T-periodisk funktion, så vi har att

$$(\bar{S}_N u)(a) = \fint_T u(t) F_N(t-a)\, dt = \fint_T u(a+t) F_N(t)\, dt.$$

Definitionen av F_N ger också, på samma sätt som för dirichletkärnan, att

$$\fint_T F_N(t)\, dt = 1, \quad \frac{1}{T}\int_0^{T/2} F_N(t)\, dt = \frac{1}{2}, \quad \text{och} \quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} F_N(t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

Vidare har vi att $\big(e^{i\Omega t} - 2 + e^{-i\Omega t}\big) F_N(t) = \big(e^{i(N+1)\Omega t} - 2 + e^{-i(N+1)\Omega t}\big)/(N+1)$, och efter förenkling får vi att

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\big((N+1)\Omega t/2\big)}{\sin(\Omega t/2)} \right)^2, \quad t \neq nT,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Vi har också att $F_N(nT) = N+1$ för $n \in \mathbb{Z}$. Så $F_N \geq 0$, och om $0 < \delta < T/2$ så konvergerar följden F_N likformigt mot noll på mängden $\{t;\ \delta \leq |t| \leq T/2\}$ då $N \to \infty$.

Av det ovanstående får vi att $(\bar{S}_N u)(a) - \big(u(a+) + u(a-)\big)/2$ är lika med

$$\frac{1}{T}\int_0^{T/2} \big(u(a+t) - u(a+)\big) F_N(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} \big(u(a+t) - u(a-)\big) F_N(t)\,dt,$$

och vi visar nu att detta går mot noll då $N \to \infty$.

Låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett δ sådant att $0 < \delta < T/2$ och sådant att $|u(a+t) - u(a+)| < \varepsilon/2$ då $0 < t < \delta$. Vi har att

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{T}\int_0^{T/2} \big(u(a+t) - u(a+)\big) F_N(t)\,dt\right| \\
&\qquad \le \frac{1}{T}\int_0^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} F_N(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_{\delta}^{T/2} |u(a+t) - u(a+)| F_N(t)\,dt \\
&\qquad \le \frac{\varepsilon}{4} + \big(\|u\|_{1,T} + |u(a+)|/2\big) \sup\big\{F_N(t);\ \delta \le t \le T/2\big\},
\end{aligned}$$

och detta är mindre än $\varepsilon/2$ om N är tillräckligt stort. Integralen mellan $-T/2$ och 0 kan uppskattas på motsvarande sätt. □

4.20 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1_T$ och antag att u har högergränsvärde och vänstergränsvärde i en punkt $a \in \mathbb{R}$. Om u:s fourierserie är konvergent i a så är fourierseriens summa i punkten a lika med $\big(u(a+) + u(a-)\big)/2$.*

Fourierseriens summa har alltså ”rätt” värde om fourierserien är konvergent.

Bevis Antag att $\lim_{N\to\infty}(S_N u)(a)$ existerar ändligt. Vi visar att detta medför att

$$\lim_{N\to\infty}(S_N u)(a) = \lim_{N\to\infty}(\bar{S}_N u)(a),$$

så att satsen följer av sats 4.19.

Sätt $s_N = (S_N u)(a)$ för $N \ge 0$, sätt $s = \lim_{N\to\infty} s_N$ och låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett M sådant att $|s_N - s| \le \varepsilon/2$ då $N > M$. Vi har nu för $N > M$ att

$$\begin{aligned}
\big|(\bar{S}_N u)(a) - s\big| &= \left|\frac{s_0 + \ldots + s_N}{N+1} - s\right| \\
&= \left|\frac{(s_0 - s) + \ldots + (s_M - s) + (s_{M+1} - s) + \ldots + (s_N - s)}{N+1}\right| \\
&\le \frac{\big|(s_0 - s) + \ldots + (s_M - s)\big|}{N+1} + \frac{(N-M)\varepsilon/2}{N+1},
\end{aligned}$$

och detta blir mindre än ε om N är tillräckligt stort. □

4.21 Sats *Antag att u är en T-periodisk och kontinuerlig funktion. För varje $\varepsilon > 0$ finns då ett T-periodiskt trigonometriskt polynom P sådant att*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t) - P(t)| < \varepsilon.$$

Bevis Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom u är kontinuerlig och periodisk är u likformigt kontinuerlig. Det följer då från beviset av sats 4.19 att vi kan välja $P = \bar{S}_N u$ för ett N som är tillräckligt stort, eftersom δ och N då kan väljas oberoende av $a \in \mathbb{R}$. □

Övningar

4A Verifiera ortogonalitetsrelationen i 4.6.

4B Bestäm fourierserien och rita grafen för fourierseriens summa för följande funktioner:

(a) u har period 1 och ges av $u(t) = -t$ då $-1 \le t < 0$,

(b) u har period 2π och ges av $u(t) = \sin t$ då $0 \le t < \pi$ och av $u(t) = 0$ då $\pi \le t < 2\pi$.

4C Bevisa några av räknereglerna i sats 4.10. Visa också att operationen $u \mapsto \hat{u}$ är paritetsbevarande (se stycket efter sats 4.10).

4D Bestäm en lösning $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ med period 2 till ekvationen $y'(t) + y(t-1) = \cos^2 \pi t$.

4E Bestäm först fourierserien på reell form för den funktion u som har period 1 och som ges av $u(t) = t(1-t)$ då $0 \le t < 1$.

(a) Motivera sedan att $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n t}{n^2} = t(1-t)$ då $0 \le t \le 1$.

(b) Beräkna $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dots$ genom att sätta $t = 0$ i likheten i (a).

(c) Beräkna $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} - \dots$.

4F Sätt $u(t) = t$ för $0 < t < \pi$ (så u är inte en periodisk funktion).

(a) Utvidga u i två steg, först till en jämn funktion på $]-\pi, \pi[$ och därefter till en 2π-periodisk funktion. Bestäm utvidgningens fourierserie på reell form (resultatet kallas u:s *cosinusserie*). Rita även grafen för fourierseriens summa.

(b) Samma som (a), men byt ”jämn” till ”udda”. (Resultatet kallas u:s *sinusserie*.)

***4G** Antag att $u \in \mathcal{L}^1_{4\pi}$ har fourierkoefficienterna $\hat{u}(0) = 0$ och $\hat{u}(n) = 1/n^2$ då $n \ne 0$. Bestäm fourierkoefficienterna för funktionen $v(t) = u(t) \sin t$.

***4H** Visa att $n\hat{u}(n) \to 0$ då $n \to \infty$ om u är en T-periodisk och kontinuerligt deriverbar funktion. Vad blir motsvarande slutsats om u tillhör $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ och är T-periodisk?

****4I** Bestäm fourierserien för den 2π-periodiska funktionen $u(t) = 3/(5 + 4\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

****4J** Låt funktionen u ha period 2π och ges av $u(t) = \sqrt{|t|}$ då $|t| \le \pi$. Då har u inte generaliserad höger- och vänsterderivata i $t = 0$, men visa att $(S_N u)(0)$ ändå går mot $u(0)$ då $N \to \infty$, genom att för u modifiera avslutningen av sats 4.16:s bevis.

****4K** Låt $u \in \mathcal{L}^1_T$ och antag att u är udda. Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{u}(n)}{n}$ är konvergent.

Föreläsning 5

Periodisk faltning

5.1 Definition Låt $u, v \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ och antag att u och v har period T. Den *periodiska faltningen* av u och v, betecknad $u *_T v$, är den funktion som ges av

$$(u *_T v)(t) = \fint_T u(t-r)v(r)\,dr,$$

och vars definitionsmängd består av de $t \in \mathbb{R}$ för vilka integralen är absolutkonvergent.

Den periodiska faltningen $u *_T v$ är T-periodisk, i den meningen att om $t \in \mathbb{R}$ så är $(u *_T v)(t)$ och $(u *_T v)(t-T)$ antingen definierade och lika, eller så är båda odefinierade. Vidare är periodisk faltning en bilinjär, kommutativ operation som kommuterar med translationer, precis som den vanliga faltningen definierad i 3.1.

5.2 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1_T$. Då gäller att $u *_T v$ väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_T$ (se 1.3), och att*

$$(u *_T v)\hat{}(n) = \hat{u}(n)\hat{v}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bevis Sätt $u_0(t) = u(t)$ då $t \geq 0$ och $u_0(t) = 0$ då $t < 0$, och sätt $v_0(t) = v(t)$ då $0 \leq t \leq T$ och $v_0(t) = 0$ då $t < 0$ eller $t > T$. Då har vi att $T(u *_T v)(t) = (u_0 * v_0)(t)$ för alla $t \geq T$. Eftersom $u_0 * v_0$ väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, enligt sats 3.7, följer att $u *_T v$ väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_T$. (Med samma metod kan man också visa att periodisk faltning är associativ i samma mening som faltningsoperationen i sats 3.7.)

Fourierkoefficienterna för $u *_T v$ är därför väldefinierade, och vi har att

$$\begin{aligned}
(u *_T v)\hat{}(n) &= \fint_T (u *_T v)(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \fint_T \left(\fint_T u(t-r)v(r)\,dr\right)e^{-in\Omega t}\,dt \\
&= \fint_T \fint_T u(t-r)e^{-in\Omega(t-r)}v(r)e^{-in\Omega r}\,dr\,dt \\
&= \fint_T \left(\fint_T u(t-r)e^{-in\Omega(t-r)}\,dt\right)v(r)e^{-in\Omega r}\,dr \\
&= \hat{u}(n)\hat{v}(n), \quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

där bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom $|u| *_T |v|$ väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_T$. □

5.3 Exempel Vi bestämmer en lösning $u \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ till integralekvationen

$$\int_{-\pi}^{\pi} r\,u(t-r)\,dr = \sin 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi har $T = 2\pi$, så $\Omega = 1$. Sätt $f(t) = t$ då $-\pi \leq t < \pi$ och utvidga f T-periodiskt. Då är vänsterledet i ekvationen lika med $2\pi(f *_T u)$, vars fourierkoefficienter enligt sats 5.2 är $2\pi\hat{f}(n)\hat{u}(n)$ för $n \in \mathbb{Z}$. Högerledet i ekvationen är $\sin 2t = \frac{1}{2i}e^{i2t} - \frac{1}{2i}e^{-i2t}$, så vi får att

$$2\pi\hat{f}(n)\hat{u}(n) = \begin{cases} \pm 1/2i, & n = \pm 2, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

En beräkning av f:s fourierkoefficienter ger att $\hat{f}(0) = 0$ och att $\hat{f}(n) = (-1)^{n-1}/in$ för $n \neq 0$. Alltså är fourierkoefficienterna $\hat{u}(n)$ entydigt bestämda för $n \neq 0$, medan $\hat{u}(0)$ kan väljas fritt. (Ekvationen hade varit olösbar om högerledets 0:te fourierkoefficient hade varit skild från noll.) Om vi väljer $\hat{u}(0) = 0$ så får vi att u:s fourierserie är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{int} = -\frac{1}{2\pi}e^{i2t} - \frac{1}{2\pi}e^{-i2t} = -\frac{1}{\pi}\cos 2t,$$

och om vi sätter $u(t) = -\frac{1}{\pi}\cos 2t$ så är u en lösning till integralekvationen, vilket kan kontrolleras genom insättning.

5.4 Absolutkonvergenta fourierserier Låt $u \in \mathcal{L}_T^1$ och antag att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)| < \infty.$$

Fourierserien för u kallas då *absolutkonvergent*. För varje $t \in \mathbb{R}$ följer att fourierserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{in\Omega t}$ är en absolutkonvergent numerisk serie, eftersom $|e^{in\Omega t}| = 1$. Alltså är summan av u:s fourierserie,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{in\Omega t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

en väldefinierad T-periodisk funktion, och det följer av Weierstrass majorantsats (A.14) att u:s fourierserie är likformigt konvergent och att s är kontinuerlig. Sats 4.20 ger att $s(t) = u(t)$ i alla punkter t där u är kontinuerlig. Eftersom u tillhör $\mathcal{L}_T^1$ är u styckvis kontinuerlig, så vi får att $s = u$ överallt utom i högst ändligt många punkter per period.

En funktion vars fourierserie är absolutkonvergent är alltså ”väsentligen kontinuerlig”, det vill säga, genom att ändra funktionens värden i högst ändligt många punkter per period kan funktionen göras kontinuerlig.

5.5 Sats *Låt u och v vara kontinuerliga och T-periodiska funktioner sådana att deras fourierserier är absolutkonvergenta. Då gäller att $\widehat{uv} = \hat{u} * \hat{v}$, det vill säga att*

$$\widehat{uv}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n-k)\hat{v}(k), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bevis Enligt 5.4 ovan får vi att $v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}(k)e^{ik\Omega t}$ för alla $t \in \mathbb{R}$ och att denna serie är likformigt konvergent. Detta ger att

$$\begin{aligned}
\widehat{uv}(n) &= \fint_T u(t)v(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \fint_T u(t)\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{v}(k)e^{ik\Omega t}\Big)e^{-in\Omega t}\,dt \\
&= \fint_T \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t)\hat{v}(k)e^{-i(n-k)\Omega t}\Big)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\fint_T u(t)e^{-i(n-k)\Omega t}\,dt\Big)\hat{v}(k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n-k)\hat{v}(k), \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Att det är tillåtet att integrera termvis i denna beräkning följer av sats A.9. □

Unitära rum

Vi utvecklar här teorin för allmänna unitära rum, med målet att i nästa avsnitt tillämpa resultaten på fourierserier.

5.6 Definitioner Låt V vara ett (komplext) linjärt rum. En funktion $\langle\ |\ \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ kallas en *skalärprodukt* på V om det gäller att

(a) $\langle u+v \,|\, w\rangle = \langle u \,|\, w\rangle + \langle v \,|\, w\rangle$ och $\langle u \,|\, v+w\rangle = \langle u \,|\, v\rangle + \langle u \,|\, w\rangle$,

(b) $\langle cu \,|\, v\rangle = c\langle u \,|\, v\rangle$ och $\langle u \,|\, cv\rangle = \overline{c}\langle u \,|\, v\rangle$,

(c) $\langle u \,|\, v\rangle = \overline{\langle v \,|\, u\rangle}$,

(d) $\langle u \,|\, u\rangle \geq 0$,

för alla $u, v, w \in V$ och $c \in \mathbb{C}$. (Vi kräver inte av en skalärprodukt att $\langle u \,|\, u\rangle = 0$ ska medföra att $u = 0$, vilket är vanligt i andra framställningar.)

Ett linjärt rum tillsammans med en skalärprodukt kallas för ett *unitärt rum*. Om V är ett unitärt rum med skalärprodukt $\langle\ |\ \rangle$ så definieras dess *norm* $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ genom

$$\|u\| = \sqrt{\langle u \,|\, u\rangle}, \quad u \in V.$$

Att detta verkligen är en norm på V (se definition A.2) visar vi i sats 5.8. Om $u, u_n \in V$, där $n = 1, 2, \ldots$, så sägs följden u_n *konvergera mot* u *i* V om $\|u_n - u\| \to 0$ då $n \to \infty$.

5.7 Exempel Det linjära rummet $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2);\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$, med skalärprodukten

$$\big\langle (z_1, z_2) \,\big|\, (w_1, w_2)\big\rangle = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2},$$

är ett tvådimensionellt unitärt rum, med normen $\|(z_1, z_2)\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$.

5.8 Sats *Antag att V är ett unitärt rum med skalärprodukt $\langle\ |\ \rangle$. Då är dess norm $\|\ \|$ en norm på V, och för alla $u, v \in V$ gäller att*

$$|\langle u \,|\, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \textit{(Cauchy–Schwarz olikhet).}$$

Bevis Definitionen av $\|\ \|$ medför att $\|u\| \geq 0$ och att $\|cu\| = |c|\,\|u\|$ för alla $u \in V$ och $c \in \mathbb{C}$. För att visa triangelolikheten för $\|\ \|$ visar vi först Cauchy–Schwarz olikhet.

För alla $u, v \in V$ och $c \in \mathbb{C}$ har vi olikheten

$$0 \leq \langle u - cv \,|\, u - cv\rangle = \|u\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\overline{c}\langle u \,|\, v\rangle + |c|^2\|v\|^2. \qquad (*)$$

Om $\|v\| = 0$ så måste $\langle u \,|\, v\rangle = 0$ (vilket gör att Cauchy–Schwarz olikhet blir uppfylld i detta fall), eftersom vi annars skulle kunna välja c så att $\|u\|^2 < 2\,\mathrm{Re}\,\overline{c}\langle u \,|\, v\rangle$ och få en motsägelse i $(*)$. Om $\|v\| > 0$ fås Cauchy–Schwarz olikhet genom att förenkla den olikhet som uppstår då c sätts till $\langle u \,|\, v\rangle / \|v\|^2$ i $(*)$.

Med hjälp av Cauchy–Schwarz olikhet får vi, för alla $u, v \in V$, att

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v \,|\, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u \,|\, v\rangle + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2|\langle u \,|\, v\rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2,
\end{aligned}$$

från vilket triangelolikheten följer. □

Observera: I resten av detta avsnitt (tre sidor) låter vi V beteckna ett unitärt rum med skalärprodukt $\langle\ |\ \rangle$ och norm $\|\ \|$.

5.9 Definitioner En vektor $u \in V$ sägs vara *normerad* om $\|u\| = 1$, och om $u, v \in V$ är sådana att $\langle u \,|\, v\rangle = 0$ så sägs vektorerna u och v vara *ortogonala.*

En delmängd M av V kallas en *ON-mängd* i V om vektorerna i M är normerade och parvis ortogonala, det vill säga, om det för alla $e, f \in M$ gäller att

$$\langle e \,|\, f\rangle = \begin{cases} 1, & e = f, \\ 0, & e \neq f. \end{cases}$$

5.10 "Pythagoras sats" *Antag att $u_1, \ldots, u_N \in V$ är parvis ortogonala. Då gäller att*

$$\|u_1 + \ldots + u_N\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_N\|^2.$$

Bevis Eftersom $\langle u_m \,|\, u_n\rangle = 0$ om $m \neq n$ och $1 \leq m, n \leq N$ har vi att

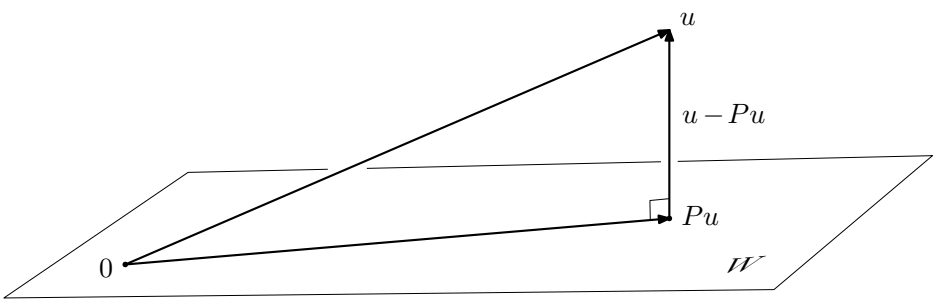
$$\begin{aligned} \|u_1 + \ldots + u_N\|^2 &= \langle u_1 + \ldots + u_N \,|\, u_1 + \ldots + u_N\rangle \\ &= \langle u_1 \,|\, u_1\rangle + \langle u_2 \,|\, u_2\rangle + \ldots + \langle u_N \,|\, u_N\rangle \\ &= \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_N\|^2. \end{aligned}$$

□

5.11 Ortogonal projektion Antag att vektorerna $e_1, \ldots, e_N \in V$ är normerade och parvis ortogonala, låt W vara det linjära höljet $[e_1, \ldots, e_N]$, det vill säga mängden av alla linjärkombinationer av $e_1, \ldots, e_N$, och låt $u \in V$. Då finns precis en vektor $Pu \in W$ sådan att $u - Pu$ är ortogonal mot alla vektorer i W, ty om man ansätter $Pu = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$ så medför $\langle u - Pu \,|\, e_n\rangle = 0$ att $c_n = \langle u \,|\, e_n\rangle$, och tvärtom. Denna vektor Pu kallas för den *ortogonala projektionen* av u på W och ges alltså av

$$Pu = \langle u \,|\, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle u \,|\, e_N\rangle e_N.$$

Av denna formel följer att $P\colon V \to V$ är en linjär avbildning, med värdemängd W.



Eftersom $u - Pu$ är ortogonal mot Pu ger Pythagoras sats att

$$\|u\|^2 = \|u - Pu + Pu\|^2 = \|u - Pu\|^2 + \|Pu\|^2,$$

och en viktig konsekvens av detta är att

$$\|Pu\| \leq \|u\|,$$

det vill säga att den ortogonala projektionen av en vektor inte är längre än vektorn själv.

Pythagoras sats ger också att $\|Pu\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle u \,|\, e_n\rangle|^2$, så olikheten $\|Pu\| \le \|u\|$ kan skrivas på formen $\sum_{n=1}^N |\langle u \,|\, e_n\rangle|^2 \le \|u\|^2$. Om M är en godtycklig ON-mängd i V så följer genom gränsövergång att

$$\sum_{e \in M} |\langle u \,|\, e\rangle|^2 \le \|u\|^2, \quad u \in V,$$

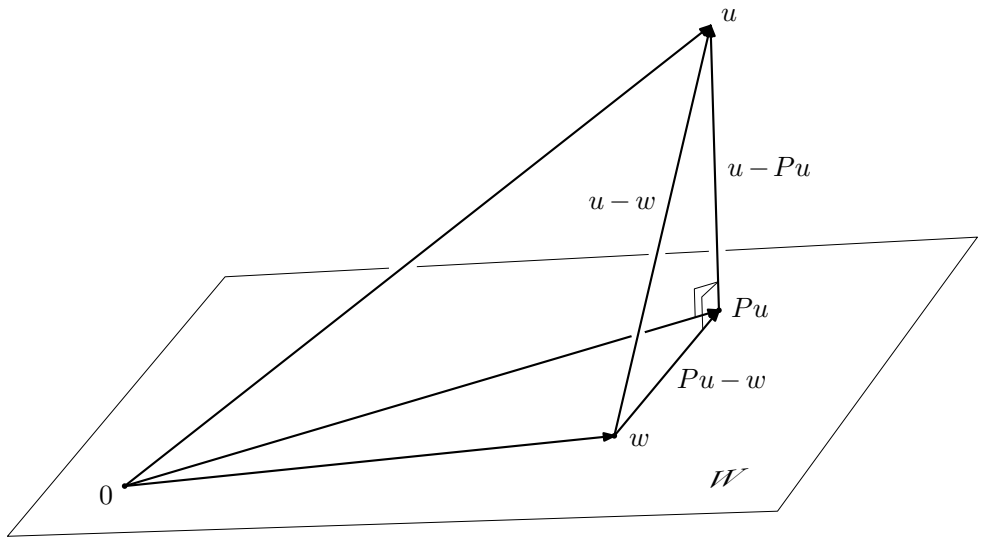
ett resultat som brukar kallas *Bessels olikhet*.

5.12 Sats *Antag att vektorerna $e_1, \ldots, e_N \in V$ är normerade och parvis ortogonala, sätt $W = [e_1, \ldots, e_N]$, låt $u \in V$ och låt Pu vara den ortogonala projektionen av u på W. Då gäller att*

$$\|u - Pu\| \le \|u - w\|, \quad w \in W,$$

med likhet om och endast om $w = Pu$.

Satsen visar att om vektorn u ska approximeras med en vektor i W så ges den bästa approximationen av Pu, i den meningen att normen av skillnaden minimeras.



Bevis Låt $w = \sum_{n=1}^N c_n e_n$ vara en godtycklig vektor i W. Eftersom $u - Pu$ är ortogonal mot alla vektorer i W har vi att

$$\begin{aligned}
\|u - w\|^2 &= \|u - Pu + Pu - w\|^2 \\
&= \|u - Pu\|^2 + \|Pu - w\|^2 \\
&= \|u - Pu\|^2 + \Big\| \sum_{n=1}^N \langle u \,|\, e_n\rangle e_n - \sum_{n=1}^N c_n e_n \Big\|^2 \\
&= \|u - Pu\|^2 + \sum_{n=1}^N \big|\langle u \,|\, e_n\rangle - c_n\big|^2,
\end{aligned}$$

där vi använt Pythagoras sats två gånger. Detta ger att $\|u - Pu\| \le \|u - w\|$, med likhet om och endast om $c_n = \langle u \,|\, e_n\rangle$ för $1 \le n \le N$, det vill säga om och endast om $w = Pu$. □

5.13 Definition En ON-mängd M i V kallas *fullständig* i V om det för varje $u \in V$ och varje $\varepsilon > 0$ finns ett $w \in [M]$ sådant att $\|u - w\| < \varepsilon$. (Att $w \in [M]$ betyder att w är en linjärkombination av vektorerna i M, det vill säga att $w = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$ för något $N \in \mathbb{N}$, några $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ och några $e_1, \dots, e_N \in M$.)

För unitära rum som inte har ändlig dimension är begreppet fullständig ON-mängd en slags generalisering av begreppet ON-bas.

5.14 Sats *Antag att vektorerna $e_1, e_2, e_3, \dots \in V$ är normerade och parvis ortogonala. Följande villkor är vart och ett ekvivalenta med att ON-mängden $M = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ är fullständig i V:*

(a) *för alla $u \in V$ gäller att $\lim_{N\to\infty} \left\| u - \sum_{n=1}^{N} \langle u \,|\, e_n \rangle e_n \right\| = 0$,*

(b) *för alla $u \in V$ gäller att $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u \,|\, e_n \rangle|^2$,*

(c) *för alla $u, v \in V$ gäller att $\langle u \,|\, v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u \,|\, e_n \rangle \overline{\langle v \,|\, e_n \rangle}$.*

Bevis Sätt $P_N u = \sum_{n=1}^{N} \langle u \,|\, e_n \rangle e_n$, för alla $u \in V$ och $N \geq 1$, så att $P_N u$ är den ortogonala projektionen av u på $[e_1, \dots, e_N]$.

Vi visar först att (a) är ekvivalent med att M är fullständig. Låt $u \in V$ och låt $\varepsilon > 0$. Om (a) gäller så finns ett N sådant att $\|u - P_N u\| < \varepsilon$. Eftersom $P_N u \in [M]$ visar detta att M är fullständig om (a) gäller. Omvänt, om M är fullständig så finns ett $w \in [M]$ sådant att $\|u - w\| < \varepsilon$. För något N gäller att $w \in [e_1, \dots, e_N]$ och av sats 5.12 får vi att $\|u - P_N u\| \leq \|u - w\| < \varepsilon$. Av sats 5.12 följer också att $\|u - P_N u\|$ är avtagande som funktion av N, vilket visar att (a) gäller om M är fullständig.

Att (a) och (b) är ekvivalenta följer av att, som i 5.11,

$$\|u\|^2 = \|u - P_N u\|^2 + \sum_{n=1}^{N} |\langle u \,|\, e_n \rangle|^2, \quad u \in V,$$

eftersom denna likhet medför att $\sum_{n=1}^{N} |\langle u \,|\, e_n \rangle|^2 \to \|u\|^2$ då $N \to \infty$ om och endast om $\|u - P_N u\| \to 0$ då $N \to \infty$.

För att visa att (b) är ekvivalent med (c) observerar vi först att (b) är specialfallet $u = v$ av (c). Å andra sidan kan en skalärprodukt alltid uttryckas med hjälp av den norm den ger upphov till:

$$4\langle u \,|\, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2, \quad u, v \in V.$$

Denna likhet, som bevisas genom att förenkla högerledet, kallas *polarisationsidentiteten*. Låt nu W vara rummet av komplexa talföljder $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. Då definierar

$$\left\langle (c_n)_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, (d_n)_{n=1}^{\infty} \right\rangle_W = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{d_n}$$

en skalärprodukt på W, och motsvarande norm är

$$\left\| (c_n)_{n=1}^{\infty} \right\|_W = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Om (b) gäller så har vi att $\|u\|^2 = \left\| (\langle u \,|\, e_n \rangle)_{n=1}^{\infty} \right\|_W^2$ för alla $u \in V$, och då följer via polarisationsidentiteten att (c) gäller. $\square$

Konvergens i medel och Parsevals formel

För att tillämpa de abstrakta resultaten i förra avsnittet på fourierserier definierar vi först ett unitärt rum bestående av periodiska funktioner.

5.15 Rummet $\mathcal{L}^2_T$. Låt $T > 0$. Vi låter $\mathcal{L}^2_T$ beteckna mängden av de funktioner $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ som är T-periodiska och sådana att

$$\int_0^T |u(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Mängden $\mathcal{L}^2_T$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$, ty om $u, v \in \mathcal{L}^2_T$ och $c \in \mathbb{C}$ så har vi för alla $t \in \mathbb{R}$ att

$$|u(t) + v(t)|^2 \le \big(|u(t)| + |v(t)|\big)^2 = |u(t)|^2 + 2|u(t)||v(t)| + |v(t)|^2 \le 2|u(t)|^2 + 2|v(t)|^2,$$

och att $|cu(t)|^2 = |c|^2|u(t)|^2$, vilket medför att $u + v, cu \in \mathcal{L}^2_T$. I räkningen har vi använt olikheten $2ab \le a^2 + b^2$, som är en direkt följd av att $(a - b)^2 \ge 0$ om $a, b \in \mathbb{R}$.

Vi definierar skalärprodukten $\langle \ | \ \rangle_{2,T}$ på $\mathcal{L}^2_T$ genom

$$\langle u \,|\, v \rangle_{2,T} = \fint_T u(t)\overline{v(t)} \, dt, \quad u, v \in \mathcal{L}^2_T.$$

Integralen är absolutkonvergent, eftersom $|u(t)\overline{v(t)}| = |u(t)||v(t)| \le (|u(t)|^2 + |v(t)|^2)/2$, så $\langle \ | \ \rangle_{2,T}$ är väldefinierad. Att $\langle \ | \ \rangle_{2,T}$ är en skalärprodukt på $\mathcal{L}^2_T$ (se 5.6) är en rättfram följd av dess definition.

Det linjära rummet $\mathcal{L}^2_T$ med skalärprodukten $\langle \ | \ \rangle_{2,T}$ är alltså ett unitärt rum, med norm

$$\|u\|_{2,T} = \sqrt{\langle u \,|\, u \rangle_{2,T}} = \left(\fint_T |u(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}, \quad u \in \mathcal{L}^2_T.$$

Det är också viktigt att notera att $\mathcal{L}^2_T$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{L}^1_T$. Detta följer av uppskattningen

$$\int_0^T |u(t)| \, dt \le \int_0^T \frac{1 + |u(t)|^2}{2} \, dt < \infty, \quad u \in \mathcal{L}^2_T,$$

och det medför bland annat att fourierkoefficienterna för funktioner i $\mathcal{L}^2_T$ är väldefinierade.

5.16 $\mathcal{L}^2_T$-tolkning av $\hat{u}(n)$ och $S_N u$. I rummet $\mathcal{L}^2_T$ är funktionerna $e^{in\Omega t}$, för $n \in \mathbb{Z}$, normerade och parvis ortogonala:

$$\big\langle e^{im\Omega t} \,\big|\, e^{in\Omega t} \big\rangle_{2,T} = \fint_T e^{im\Omega t} e^{-in\Omega t} \, dt = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \ne n. \end{cases}$$

(Att verifiera detta var övning 4A.) Alltså är $\{e^{in\Omega t};\, n \in \mathbb{Z}\}$ en ON-mängd i $\mathcal{L}^2_T$.

Låt nu $u \in \mathcal{L}^2_T$. Då har vi att

$$\hat{u}(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t} \, dt = \langle u \,|\, e^{in\Omega t} \rangle_{2,T}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

det vill säga, den n:te fourierkoefficienten för u är skalärprodukten av u och $e^{in\Omega t}$.

Låt $N \in \mathbb{N}$. För den N:te symmetriska delsumman $S_N u$ till u:s fourierserie har vi att

$$(S_N u)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{in\Omega t} = \sum_{n=-N}^{N} \langle u \,|\, e^{in\Omega t} \rangle_{2,T} \, e^{in\Omega t}.$$

Alltså är $S_N u$ den ortogonala projektionen av u på det linjära höljet $[e^{-iN\Omega t}, \ldots, e^{iN\Omega t}]$, som består av alla T-periodiska trigonometriska polynom som inte innehåller harmoniska svängningar med högre vinkelfrekvenser är $N\Omega$. Enligt sats 5.12 innebär detta att $S_N u$ är det trigonometriska polynom i $[e^{-iN\Omega t}, \ldots, e^{iN\Omega t}]$ som bäst approximerar u i $\mathcal{L}^2_T$-mening.

5.17 Exempel Hur ska konstanterna $c_{-1}, c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ väljas för att minimera integralen

$$\int_0^2 \left| t^2 - (c_{-1} e^{-i\pi t} + c_0 + c_1 e^{i\pi t}) \right|^2 dt\,?$$

Vi tolkar detta som ett minimeringsproblem i $\mathcal{L}^2_T$, där $T = 2$ (så att $\Omega = \pi$), genom att sätta $u(t) = t^2$ då $0 \le t < 2$ och utvidga u T-periodiskt. Då gäller att $u \in \mathcal{L}^2_T$ och att integralen som ska minimeras är lika med $2\|u - P\|^2_{2,T}$, där

$$P(t) = c_{-1} e^{-i\pi t} + c_0 + c_1 e^{i\pi t} \in [e^{-i1\Omega t}, e^{i0\Omega t}, e^{i1\Omega t}].$$

Enligt 5.16 ovan ska vi alltså välja $P = S_1 u$, det vill säga $c_{-1} = \hat{u}(-1)$, $c_0 = \hat{u}(0)$ och $c_1 = \hat{u}(1)$. En direkt beräkning ger att

$$\hat{u}(n) = \frac{1}{2} \int_0^2 t^2 e^{-in\pi t} \, dt = \begin{cases} \dfrac{4}{3}, & n = 0, \\ \dfrac{2}{n^2\pi^2} + \dfrac{2i}{n\pi}, & n \neq 0, \end{cases}$$

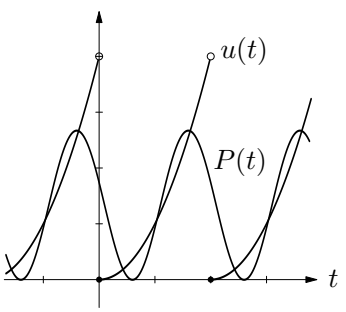
så svaret är att konstanterna ska väljas på följande sätt:

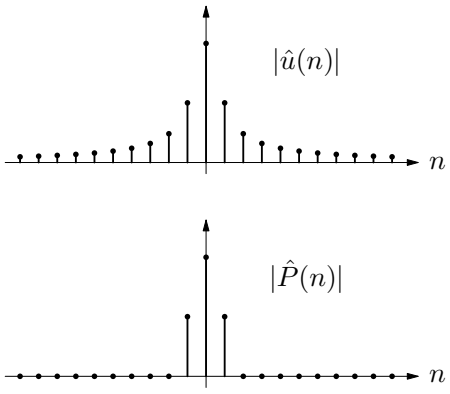
$$c_{-1} = \frac{2}{\pi^2} - \frac{2i}{\pi}, \quad c_0 = \frac{4}{3}, \quad c_1 = \frac{2}{\pi^2} + \frac{2i}{\pi}.$$

Vi har alltså att

$$P(t) = (S_1 u)(t) = \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{2i}{\pi} \right) e^{-i\pi t} + \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{\pi^2} + \frac{2i}{\pi} \right) e^{i\pi t} = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \cos \pi t - \frac{4}{\pi} \sin \pi t,$$

och följande figurer visar utseendet för u och P:





Följande sats är ett huvudresultat i teorin för fourierserier.

5.18 Sats *ON-mängden* $\{e^{in\Omega t};\, n \in \mathbb{Z}\}$ *är fullständig i* $\mathcal{L}^2_T$.

Bevis Låt $u \in \mathcal{L}^2_T$ och låt $\varepsilon > 0$. Vi ska visa att det finns en linjärkombination av funktionerna i mängden $\{e^{in\Omega t};\, n \in \mathbb{Z}\}$ vars avstånd till u, i $\mathcal{L}^2_T$-mening, är mindre än ε.

Låt v_δ, för $\delta > 0$, vara den funktion som för $t \in \mathbb{R}$ ges av $v_\delta(t) = u(t)$ utom om det finns en undantagspunkt a för u sådan att $|t - a| < \delta$, och av $v_\delta(t) = 0$ på dessa intervall. Sätt $v = v_\delta$ för ett $\delta > 0$ som är så litet att $\|u - v_\delta\|_{2,T} < \varepsilon/3$, och även så litet att inget intervall med längd 2δ innehåller mer än en undantagspunkt för u. Ett sådant δ finns eftersom $u \in \mathcal{L}^2_T$.

Låt w_η, för $0 < \eta < \delta$, vara den funktion som för $t \in \mathbb{R}$ ges av $w_\eta(t) = v(t)$ utom om det finns en undantagspunkt a för u sådan att $a - \delta < t < a - \eta$ eller $a + \eta < t < a + \delta$, och av funktioner av formen $ct + d$ på dessa intervall, där konstanterna $c, d \in \mathbb{C}$ på varje sådant intervall väljs så att w_η blir kontinuerlig. Sätt $w = w_\eta$ för ett $\eta < \delta$ som är så nära δ att $\|v - w_\eta\|_{2,T} < \varepsilon/3$.

Av sats 4.21 följer att det finns ett T-periodiskt trigonometriskt polynom P, det vill säga en linjärkombination av funktionerna i ON-mängden $\{e^{in\Omega t};\, n \in \mathbb{Z}\}$, sådant att $|w(t) - P(t)| < \varepsilon/3$ för alla $t \in \mathbb{R}$, vilket medför att $\|w - P\|_{2,T} < \varepsilon/3$. Alltså har vi att $\|u - P\|_{2,T} \le \|u - v\|_{2,T} + \|v - w\|_{2,T} + \|w - P\|_{2,T} < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. □

Nästa sats, som följer av sats 5.14 och sats 5.18, visar vad det mera konkret innebär att ON-mängden $\{e^{in\Omega t};\, n \in \mathbb{Z}\}$ är fullständig i $\mathcal{L}^2_T$.

5.19 Sats *Antag att* $u \in \mathcal{L}^2_T$. *Då konvergerar de symmetriska delsummorna* $S_N u$ *till* u*:s fourierserie mot* u *i* $\mathcal{L}^2_T$, *det vill säga,*

$$\|u - S_N u\|_{2,T} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Detta kallas ibland för att $S_N u$ *konvergerar mot* u *i medel.*

Om också $v \in \mathcal{L}^2_T$ *så gäller Parsevals formel:*

$$\fint_T u(t)\overline{v(t)}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)},$$

med specialfallet

$$\fint_T |u(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)|^2. \qquad \square$$

5.20 Exempel Vi ser vad Parsevals formel ger då den tillämpas på den funktion u som har period $T = 2$ och som ges av $u(t) = 1$ då $0 \le t < 1$ och av $u(t) = 0$ då $1 \le t < 2$, som i exempel 4.9.

Enligt detta exempel ges u:s fourierkoefficienter av

$$\hat{u}(n) = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0 \text{ jämnt}, \\ 1/in\pi, & n \text{ udda}, \end{cases}$$

så Parsevals formel, $⨍_T |u(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)|^2$, ger att

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |1|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 |0|^2\,dt = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \sum_{n \text{ udda}} \left|\frac{1}{in\pi}\right|^2,$$

det vill säga

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 2\sum_{n\geq 1 \text{ udda}} \frac{1}{n^2\pi^2},$$

vilket efter förenkling ger att

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots.$$

5.21 Exempel Låt funktionen u vara som i exempel 5.20 ovan. Vi uppskattar avståndet, i $\mathcal{L}_T^2$-mening, mellan u och de symmetriska delsummorna $S_N u$ till u:s fourierserie.

Notera att $(S_N u)\hat{}(n) = \hat{u}(n)$ då $|n| \leq N$ och att $(S_N u)\hat{}(n) = 0$ då $|n| > N$. Vi får därför med hjälp av Parsevals formel (5.19) att

$$\begin{aligned}\|u - S_N u\|_{2,T}^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|(u - S_N u)\hat{}(n)\right|^2 = \sum_{|n|>N} |\hat{u}(n)|^2 = \sum_{|n|>N \text{ udda}} \left|\frac{1}{in\pi}\right|^2 \\ &\leq 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \leq \frac{2}{\pi^2}\int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{\pi^2 N}, \quad N \geq 1,\end{aligned}$$

där vi vid första olikhetstecknet summerat över alla $n > N$ (och inte bara de udda) för att förenkla beräkningen. Vi har alltså att

$$\|u - S_N u\|_{2,T} \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{N}}, \quad N \geq 1.$$

Denna uppskattning ger att $S_N u \to u$ i $\mathcal{L}_T^2$ (vilket också följer av sats 5.19). På samma sätt får man att $\|u - S_N u\|_{2,T} \geq C/\sqrt{N}$ för någon konstant $C > 0$, så konvergensen är inte speciellt snabb.

Övningar

5A Bestäm en π-periodisk lösning u till ekvationen $\displaystyle\int_0^\pi e^r u(t-r)\,dr = \sin 6t,\ t \in \mathbb{R}$.

5B Låt V vara ett unitärt rum, låt $f_1, \ldots, f_N \in V$ vara parvis ortogonala och ha strikt positiva normer, och låt $u \in V$. Bestäm den ortogonala projektionen Pu av u på det linjära höljet $[f_1, \ldots, f_N]$ (se 5.11).

5C Bestäm fourierserien för den π-periodiska funktion u som ges av $u(t) = \sin t$ då $0 \le t < \pi$. Använd resultatet för att beräkna

$$\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots \quad \text{och} \quad \frac{1}{1^2 3^2} + \frac{1}{3^2 5^2} + \frac{1}{5^2 7^2} + \frac{1}{7^2 9^2} + \ldots.$$

5D Låt u vara den funktion med period 2 som ges av $u(t) = t^2$ då $|t| \le 1$.

(a) Hur ska konstanterna c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1 och c_2 väljas för att minimera integralen

$$\int_{-1}^{1} \left| u(t) - \left(c_{-2}e^{-i2\pi t} + c_{-1}e^{-i\pi t} + c_0 + c_1 e^{i\pi t} + c_2 e^{i2\pi t}\right)\right|^2 dt?$$

(b) Hur ska konstanterna a_0, a_1, b_1, a_2 och b_2 väljas för att minimera integralen

$$\int_{-1}^{1} \left| u(t) - \left(a_0 + a_1 \cos \pi t + b_1 \sin \pi t + a_2 \cos 2\pi t + b_2 \sin 2\pi t\right)\right|^2 dt?$$

5E Låt u vara den funktion som har period $T = 1$ och som ges av $u(t) = t(1-t)$ då $0 \le t < 1$, som i övning 4E. Uppskatta avståndet i $\mathcal{L}^2_T$-mening mellan u och $S_N u$.

***5F** Antag att $u \in \mathcal{L}^2_T$ har fourierserien $a_0/2 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$. Visa att

$$\fint_T |u(t)|^2\,dt = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$$

genom att utgå från Parsevals formel (5.19) och sambanden mellan $\hat{u}(n)$, a_n och b_n.

***5G** Visa att $\|u\|_{1,T} \le \|u\|_{2,T}$ om $u \in \mathcal{L}^2_T$.

****5H** Låt $u \in \mathcal{L}^2_T$ och låt F_N vara fejérkärnan i beviset av sats 4.19. Visa att

$$\|u - u *_T F_N\|_{2,T} \le \fint_T \|u - \tau_r u\|_{2,T} F_N(r)\,dr$$

genom att uppskatta $|\langle u - u *_T F_N \,|\, v\rangle|$ och sedan välja $v \in \mathcal{L}^2_T$ lämpligt. Använd detta för att visa att $\|u - u *_T F_N\|_{2,T} \to 0$ då $N \to \infty$.

****5I** Låt $V = \mathcal{C}([0,1])$ och sätt $\langle u \,|\, v\rangle = u(0)\overline{v(0)} + \int_0^1 u(t)\overline{v(t)}\,dt$ för $u, v \in V$, så att V blir ett unitärt rum. Låt W vara det linjära underrummet $W = \{w \in V;\ w(0) = 0\}$. Visa att om $u \in V$ är sådan att $\langle u \,|\, w\rangle = 0$ för alla $w \in W$, så är $u = 0$.

Låt nu $u(t) = 1$ för $0 \le t \le 1$. Visa att $\|u - w\| \ge 1$ för alla $w \in W$, och att u inte har någon ortogonal projektion på W.

Föreläsning 6

Periodiska distributioner

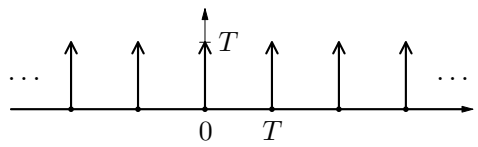
6.1 Rummet $\mathcal{D}'_T$ Låt $T > 0$. En distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sägs vara *T-periodisk*, eller sägs *ha period T*, om $u(t) = u(t-T)$, det vill säga om $u = \tau_T u$ (se 2.11).

Vi låter $\mathcal{D}'_T$ beteckna mängden av alla distributioner $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som har period T. Rättframma verifikationer ger att $\mathcal{D}'_T$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, och att om $u \in \mathcal{D}'_T$ så gäller att u', fu (om $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ är T-periodisk), $\tau_a u$, $\check{u}$ och $\overline{u}$ tillhör $\mathcal{D}'_T$.

6.2 Exempel En funktion $u \in \mathcal{L}^1_T$ (se definition 4.7) ger på vanligt sätt upphov till en distribution $u_{\mathcal{D}'} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (se sats 1.17), och $u_{\mathcal{D}'}$ har period T eftersom u har period T.

Som exempel på en T-periodisk distribution som inte ges av en funktion har vi *pulståget*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT},$$

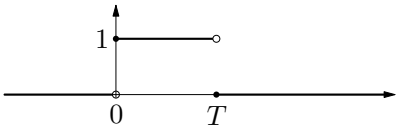


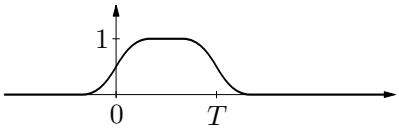
som kan ses som en T-periodisk motsvarighet till diracimpulsen. Pulståget verkan på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definieras genom $\left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\varphi(nT)$, där summan i högerledet innehåller högst ändligt många nollskilda termer eftersom φ har kompakt stöd. Det följer att pulståget tillhör $\mathcal{D}'_T$.

6.3 Medelvärdet av en periodisk distribution Givet en periodlängd $T > 0$ kallar vi en funktion $\rho\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ med kompakt stöd för en *etta över en period* om

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho(t+nT) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Till exempel är funktionen $\chi(t) - \chi(t-T)$ och $\mathcal{C}^\infty$-funktionen $f_3(t;0,T/3) - f_3(t;T,T/3)$ (se exempel 1.14) ettor över en period, med följande utseenden:





Låt $u \in \mathcal{D}'_T$. Om $\rho, \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är ettor över en period, så gäller att

$$\begin{aligned}
\langle u, \rho \rangle &= \Big\langle u(t), \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta(t+nT)\rho(t) \Big\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big\langle u(t), \eta(t+nT)\rho(t) \big\rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big\langle u(t+nT), \eta(t+nT)\rho(t) \big\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big\langle u(t), \eta(t)\rho(t-nT) \big\rangle \\
&= \Big\langle u(t), \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta(t)\rho(t-nT) \Big\rangle = \langle u, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

(Notera att högst ändligt många termer i summorna är nollskilda i denna beräkning.)

Värdet av u:s verkan på en etta över en period beror alltså inte på vilken etta över en period man väljer. Om u ges av en funktion i $\mathcal{L}^1_T$ och $\eta(t) = \chi(t) - \chi(t-T)$ (denna funktion η tillhör inte $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, men det behövs inte i detta fall) fås på liknande sätt att

$$\langle u, \rho\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\rho(t)\,dt = \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\eta(t)\,dt = \int_0^T u(t)\,dt.$$

Detta motiverar att vi för $u \in \mathcal{D}'_T$ definierar *medelvärdet* av u, betecknat $⨍_T u(t)\,dt$, genom

$$⨍_T u(t)\,dt = \frac{1}{T}\langle u, \rho\rangle,$$

där $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är en etta över en period.

Nästa sats visar att trigonometriska serier är konvergenta i distributionsmening under ganska milda villkor på koefficienterna.

6.4 Sats *Låt $c_n \in \mathbb{C}$, där $n \in \mathbb{Z}$, vara en följd som har högst polynomiell tillväxt, vilket betyder att det finns konstanter $C \geq 0$ och $k \in \mathbb{N}$ sådana att*

$$|c_n| \leq C|n|^k, \quad n \neq 0.$$

Låt vidare $T > 0$ och låt, som alltid, $\Omega = 2\pi/T$.

Då gäller att serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\langle e^{in\Omega t}, \varphi\rangle$ är absolutkonvergent för varje $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, och att verkan $\varphi \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\langle e^{in\Omega t}, \varphi\rangle$ definierar en T-periodisk distribution, betecknad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}.$$

Av satsen följer att $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t} \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ då $N \to \infty$, vilket medför att operationer som är linjära och kontinuerliga på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, till exempel derivering, kan utföras termvis på distributionen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$.

Notera dock att serien som definierar verkan av $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$ är absolutkonvergent, så att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$ kan betraktas som summan i distributionsmening av alla $c_n e^{in\Omega t}$, utan att någon speciell summationsordning behöver anges.

Bevis Låt $C \geq 0$ och $k \in \mathbb{N}$ vara konstanter sådana att $|c_n| \leq C|n|^k$ då $n \neq 0$. Om $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så fås genom $k+2$ partialintegrationer att

$$\langle e^{in\Omega t}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}\varphi(t)\,dt = (-1)^{k+2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\Omega t}}{(in\Omega)^{k+2}}\,\varphi^{(k+2)}(t)\,dt, \quad n \neq 0.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq 0} |c_n\langle e^{in\Omega t}, \varphi\rangle| &\leq \sum_{n\neq 0} C|n|^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n|^{k+2}\Omega^{k+2}}\,|\varphi^{(k+2)}(t)|\,dt \\ &= \frac{C}{\Omega^{k+2}}\Bigl(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|^2}\Bigr)\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k+2)}(t)|\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad (*)\end{aligned}$$

så serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\langle e^{in\Omega t}, \varphi\rangle$ är absolutkonvergent för varje $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Vi kan därför definiera $u\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ genom $\langle u, \varphi\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\langle e^{in\Omega t}, \varphi\rangle$, och det följer att u är linjär.

Låt nu $K \subseteq \mathbb{R}$ vara ett kompakt intervall. Om $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är en testfunktion vars stöd är innehållet i K så ger $(*)$ ovan att

$$|\langle u, \varphi\rangle| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e^{in\Omega t}, \varphi\rangle \right| \le |c_0|\,|\langle 1, \varphi\rangle| + D\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k+2)}(t)|\,dt$$

$$\le |c_0| L \sup_{t\in K} |\varphi(t)| + DL \sup_{t\in K} |\varphi^{(k+2)}(t)|,$$

där D är en konstant som kommer från $(*)$ och L är längden av intervallet K. Detta visar att u uppfyller kontinuitetsvillkoret i 1.15 och därmed att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Eftersom funktionen $e^{in\Omega t}$ har period T för varje $n \in \mathbb{Z}$, och τ_T (translation med T) är en linjär och kontinuerlig operation på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, har vi att

$$\tau_T u = \tau_T\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \tau_T(e^{in\Omega t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t} = u,$$

vilket visar att u är T-periodisk. □

Fourierserier för periodiska distributioner

6.5 Definition För en distribution $u \in \mathcal{D}'_T$ definieras u:s följd av *fourierkoefficienter*, betecknad $\hat{u}$ eller $\mathscr{F}_T u$, genom

$$\hat{u}(n) = (\mathscr{F}_T u)(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

och den trigonometriska serien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}$$

kallas för u:s *fourierserie*, på komplex form, precis som för funktioner i $\mathcal{L}^1_T$. Den N:te symmetriska delsumman $S_N u$ till u:s fourierserie och den reella formen av u:s fourierserie definieras också på precis samma sätt som för funktioner i $\mathcal{L}^1_T$ (se 4.8).

6.6 Exempel Vi beräknar fourierkoefficienterna för det T-periodiska pulståget

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT}.$$

Låt $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara en etta över en period. Vi får att

$$\hat{u}(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\langle u e^{-in\Omega t}, \rho\rangle = \frac{1}{T}\langle u, e^{-in\Omega t}\rho\rangle$$

$$= \frac{1}{T}\Big\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} T\delta_{mT}, e^{-in\Omega t}\rho\Big\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-in\Omega mT}\rho(mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(mT)$$

$$= 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Notera att fourierkoefficienterna $\hat{u}(n)$ för pulståget inte går mot noll då $n \to \pm\infty$, vilket de skulle ha gjort enligt sats 4.13 om pulståget hade getts av en funktion i $\mathcal{L}^1_T$.

6.7 Exempel Antag att $c_n \in \mathbb{C}$, där $n \in \mathbb{Z}$, är en följd som har högst polynomiell tillväxt (se sats 6.4). Vi beräknar fourierkoefficienterna för den T-periodiska trigonometriska serien

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}.$$

Låt $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara en etta över en period. Vi får att

$$\begin{aligned}
\hat{u}(n) &= \fint_T u(t) e^{-in\Omega t}\, dt = \frac{1}{T}\langle u e^{-in\Omega t}, \rho\rangle = \frac{1}{T}\langle u, e^{-in\Omega t}\rho\rangle \\
&= \frac{1}{T}\Big\langle \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\Omega t}, e^{-in\Omega t}\rho\Big\rangle = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \langle e^{im\Omega t}, e^{-in\Omega t}\rho\rangle \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \fint_T e^{i(m-n)\Omega t}\, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \cdot \begin{Bmatrix} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{Bmatrix} \\
&= c_n, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Som väntat är alltså $\hat{u}(n) = c_n$ för alla $n \in \mathbb{Z}$.

6.8 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'_T$. Då har u:s följd av fourierkoefficienter högst polynomiell tillväxt (se sats 6.4), och*

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}.$$

Observera hur okomplicerad teorin för fourierserier blir när den utvidgats till periodiska distributioner: fourierserien för en periodisk distribution u är konvergent i distributionsmening, utan några extra villkor på u, och dess summa är u.

Bevis Låt $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara en etta över en period och låt K vara ett kompakt intervall som innehåller ρ:s stöd. Eftersom $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ finns konstanter $C \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att olikheten

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C \sum_{k=0}^{N} \sup_{t\in K} |\varphi^{(k)}(t)|$$

gäller för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vars stöd ligger i K. Sätt nu $e_n(t) = e^{in\Omega t}$ för $t \in \mathbb{R}$ och $n \in \mathbb{Z}$. Med hjälp av olikheten ovan får vi att

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(n)| &= \left|\fint_T u(t) e_{-n}(t)\, dt\right| = \frac{1}{T}|\langle u e_{-n}, \rho\rangle| = \frac{1}{T}|\langle u, e_{-n}\rho\rangle| \\
&\leq \frac{C}{T}\sum_{k=0}^{N} \sup_{t\in K}\big|(e_{-n}\rho)^{(k)}(t)\big| = \frac{C}{T}\sum_{k=0}^{N} \sup_{t\in K}\left|\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-in\Omega)^l e_{-n}(t)\rho^{(k-l)}(t)\right| \\
&\leq \frac{C}{T}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}|n|^l\Omega^l \sup_{t\in K}|\rho^{(k-l)}(t)|, \quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

vilket visar att följden $\hat{u}(n)$ har högst polynomiell tillväxt.

Verkan av en godtycklig distribution $v \in \mathcal{D}'_T$ på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ kan uttryckas med hjälp av φ:s så kallade *periodisering*

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t - nT), \quad t \in \mathbb{R},$$

som är en T-periodisk och oändligt deriverbar funktion, på följande sätt:

$$\begin{aligned}
\langle v, \varphi \rangle &= \Big\langle v(t), \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho(t + nT)\varphi(t) \Big\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle v(t), \rho(t + nT)\varphi(t) \rangle \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle v(t + nT), \rho(t + nT)\varphi(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle v(t), \rho(t)\varphi(t - nT) \rangle \\
&= \Big\langle v(t), \rho(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t - nT) \Big\rangle = \langle v, \rho\Phi \rangle.
\end{aligned}$$

Vidare, för en godtycklig T-periodisk funktion $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ får vi genom upprepade partialintegrationer att

$$\begin{aligned}
|\hat{\Phi}(n)| &= \left| \fint_T \Phi(t) e^{-in\Omega t}\, dt \right| = \frac{1}{|n|^l \Omega^l} \left| \fint_T \Phi^{(l)}(t) e^{-in\Omega t}\, dt \right| \\
&\le \frac{1}{|n|^l \Omega^l} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\Phi^{(l)}(t)|, \quad l \in \mathbb{N},\ n \neq 0.
\end{aligned}$$

Av Weierstrass majorantsats (A.14) följer därför för varje $k \in \mathbb{N}$ att funktionsföljden

$$(S_N\Phi)^{(k)} = \sum_{n=-N}^{N} (in\Omega)^k \hat{\Phi}(n) e^{in\Omega t}, \quad N = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

är absolut och likformigt konvergent. Eftersom $(S_N\Phi)(t) \to \Phi(t)$ då $N \to \infty$ för alla $t \in \mathbb{R}$ enligt satsen om punktvis konvergens (4.16), ger upprepad användning av sats A.10 att $(S_N\Phi)^{(k)} \to \Phi^{(k)}$ likformigt för varje $k \in \mathbb{N}$. Det följer att $\rho S_N\Phi \to \rho\Phi$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Låt nu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ och låt Φ vara φ:s periodisering. Av det ovanstående får vi att

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle &= \langle u, \rho\Phi \rangle = \lim_{N \to \infty} \langle u, \rho S_N\Phi \rangle \\
&= \lim_{N \to \infty} \Big\langle u, \rho \sum_{n=-N}^{N} \hat{\Phi}(n) e^{in\Omega t} \Big\rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \langle u, \rho e^{in\Omega t} \rangle \hat{\Phi}(n) \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} T\hat{u}(-n)\hat{\Phi}(n) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(-n) \langle \Phi e^{-in\Omega t}, \rho \rangle \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) \langle e^{in\Omega t}, \rho\Phi \rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) \langle e^{in\Omega t}, \varphi \rangle \\
&= \Big\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}, \varphi \Big\rangle,
\end{aligned}$$

vilket avslutar beviset. $\square$

6.9 Exempel Det T-periodiska pulståget

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT}$$

har enligt exempel 6.6 fourierkoefficienterna $\hat{u}(n) = 1$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Sats 6.8 ger därför att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}.$$

Denna relation kommer vi att ha nytta av nedan.

6.10 Sats *Räknereglerna för fourierkoefficienter, sats 4.10* (a)–(h), *gäller om* $u, v \in \mathcal{D}'_T$.

Bevis Vi visar (h), det vill säga att om $u \in \mathcal{D}'_T$ så ges den n:te fourierkoefficienten för derivatan u' av $in\Omega\hat{u}(n)$. Resten av bevisen följer samma mönster.

Låt $u \in \mathcal{D}'_T$. Vi har enligt sats 6.8 att

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)e^{in\Omega t}.$$

Derivering av denna likhet ger att

$$u' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)in\Omega e^{in\Omega t},$$

där serien kan deriveras term för term eftersom derivering är en linjär och kontinuerlig operation på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alltså är $(u')\hat{}(n) = in\Omega\hat{u}(n)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ (enligt exempel 6.7). $\square$

6.11 Periodisk faltning Om funktionerna $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ är T-periodiska och vi låter den periodiska faltningen $u *_T v$ verka på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, så får vi att

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (u *_T v)(t)\varphi(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\fint_T u(r)v(t-r)\,dr \right)\varphi(t)\,dt \\ &= \fint_T u(r)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \check{v}(r-t)\varphi(t)\,dt \right) dr \\ &= \fint_T u(r)(\check{v} * \varphi)(r)\,dr.\end{aligned}$$

För $u, v \in \mathcal{D}'_T$ definierar vi därför deras *periodiska faltning* $u *_T v$ genom

$$\langle u *_T v, \varphi \rangle = \fint_T u(t)(\check{v} * \varphi)(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Man kan visa (se till exempel [14]) att $u *_T v$ tillhör $\mathcal{D}'_T$ och att denna faltningsoperation är bilinjär, kommutativ och associativ och att den kommuterar med translationer. Det gäller också att

$$(u *_T v)\hat{}(n) = \hat{u}(n)\hat{v}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Enligt exempel 6.6 är alla fourierkoefficienter för pulståget $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T\delta_{nT}$ lika med 1, så detta pulståg är ett enhetselement för periodisk faltning.

Summering av vissa serier

6.12 Exempel Vi bestämmer gränsvärdet

$$G = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{3n+1}.$$

Gränsvärdets utseende påminner om satsen om punktvis konvergens (4.16), så vi sätter

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3n+1} e^{int}.$$

Sats 6.4 ger att $u \in \mathcal{D}'_T$, där $T = 2\pi$. För att bestämma u observerar vi att

$$-3iu' + u = -3i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in}{3n+1} e^{int} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3n+1} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta_{2\pi n},$$

där vi använt exempel 6.9. Detta ger att $-3iu' + u = 2\pi\delta$ på intervallet $]-2\pi, 2\pi[$, vilket är en ekvation vi kan lösa med hjälp av sats 3.20. Resultatet är att

$$u = \frac{2\pi i}{3} e^{-it/3}\chi + Ce^{-it/3} \text{ på intervallet }]-2\pi, 2\pi[,$$

för något $C \in \mathbb{C}$. Vi ser nu att distributionen u ges av, eller "är", en funktion i $\mathcal{L}^1_T$. Att u har period 2π bestämmer konstanten C: om $0 < t < 2\pi$ har vi att $u(t) = u(t - 2\pi)$, så

$$\frac{2\pi i}{3} e^{-it/3} + Ce^{-it/3} = Ce^{-i(t-2\pi)/3}, \quad 0 < t < 2\pi,$$

vilket ger att $C = \frac{2\pi i}{3}/(e^{2\pi i/3} - 1)$. Alltså har vi att

$$u = \frac{2\pi i}{3} e^{-it/3}\Big(\chi + \frac{1}{e^{2\pi i/3} - 1}\Big) \text{ på intervallet }]-2\pi, 2\pi[.$$

Eftersom u har generaliserad höger- och vänsterderivata i $t = 0$ ger satsen om punktvis konvergens (4.16) att

$$G = \frac{u(0+) + u(0-)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi i}{3}\Big(1 + \frac{1}{e^{2\pi i/3} - 1}\Big) + \frac{2\pi i}{3}\frac{1}{e^{2\pi i/3} - 1}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

6.13 Exempel Vi bestämmer summan, i distributionsmening, av den trigonometriska serien

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} e^{int}.$$

Vi observerar att u har period $T = 2\pi$ och att u ges av en geometrisk serie, som dock är divergent för varje $t \in \mathbb{R}$, eftersom beloppet av kvoten e^{it} inte är mindre än 1. Om vi trots detta räknar som vanligt så får vi att

$$\text{"} \sum_{n=1}^{\infty} e^{int} = \frac{e^{it}}{1 - e^{it}} = \frac{d}{dt} i \operatorname{Log}(1 - e^{it}), \text{"}$$

där meningen av det första likhetstecknet är högst oklar, medan det andra likhetstecknet gäller utom då $t/2\pi$ är ett heltal. ("Log" betecknar principalgrenen av den komplexa logaritmfunktionen, definierad i $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ och sådan att $\operatorname{Log} 1 = 0$.)

Sätt $v(t) = i\,\mathrm{Log}(1-e^{it})$ då $t \neq 2\pi n$ och $v(2\pi n) = 0$, där $n \in \mathbb{Z}$. Då gäller att $v \in \mathcal{L}^1_T$, och v:s fourierkoefficienter är

$$\begin{aligned}\hat{v}(n) &= \fint_T v(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i\,\mathrm{Log}(1-e^{it})e^{-int}\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} i\,\mathrm{Log}(1-e^{it})e^{-int}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{C_\varepsilon} i\,\mathrm{Log}(1-z)z^{-n}\frac{dz}{iz} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

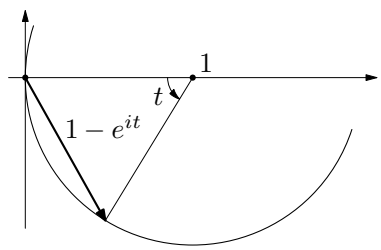
där kurvan C_ε ges av $z = e^{it}$ när t går från ε till $2\pi - \varepsilon$. Eftersom beloppet av $\mathrm{Log}(1-z)$ växer högst logaritmiskt då $z \to 1$ fås att

$$\hat{v}(n) = \frac{1}{2\pi}2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z^{n+1}} = i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^{n+1}}\Big(-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\dots\Big) = \begin{cases}1/in, & n \geq 1,\\ 0, & n \leq 0.\end{cases}$$

Enligt sats 6.8 har vi nu att $v = \sum_{n=1}^\infty e^{int}/in$ i distributionsmening, vilket medför att $v' = \sum_{n=1}^\infty e^{int}$, eftersom derivering är en linjär och kontinuerlig operation på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Vi har alltså att den trigonometriska serien $\sum_{n=1}^\infty e^{int}$ är distributionsderivatan av funktionen v, men vi vill ha ett mera explicit uttryck för denna derivata.

Om $0 < t < 2\pi$ kan man ur figuren avläsa att

$$\begin{aligned}v(t) &= i\,\mathrm{Log}(1-e^{it}) \\ &= -\operatorname{Arg}(1-e^{it}) + i\ln|1-e^{it}| \\ &= \frac{\pi-t}{2} + i\ln\Big|2\sin\frac{t}{2}\Big|, \quad 0 < t < 2\pi.\end{aligned}$$



Eftersom v är 2π-periodisk ger sats 2.5 att

$$\sum_{n=1}^\infty e^{int} = v' = -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^\infty \pi\delta_{2\pi n} + i\Big(\ln\Big|2\sin\frac{t}{2}\Big|\Big)'.$$

Derivatan av $\ln|2\sin(t/2)|$ är $\cot(t/2)/2$ då $t \neq 2\pi n$ (där $n \in \mathbb{Z}$), och rättframma räkningar (jämför med övning 2H) ger att distributionsderivatan av $\ln|2\sin(t/2)|$ är det så kallade *principalvärdet* av $\cot(t/2)/2$, betecknat $\mathrm{PV}(\cot(t/2)/2)$, vars verkan på en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ges av

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{D_\varepsilon}\Big(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\Big)\varphi(t)\,dt,$$

där $D_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^\infty]2\pi n - \varepsilon, 2\pi n + \varepsilon[$. Vi har alltså till slut att

$$\sum_{n=1}^\infty e^{int} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^\infty \pi\delta_{2\pi n} + i\,\mathrm{PV}\Big(\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\Big).$$

Övningar

6A Beräkna medelvärdet av den 2-periodiska distributionen

$$2\cos^2 \pi t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3\delta_{2n+1}.$$

6B Låt u vara den funktion som ges av $u(t) = -t$ då $-1 \le t < 0$ och som har period 1.

(a) Bestäm distributionsderivatan u' av u, till exempel genom att använda sats 2.5.

(b) Bestäm fourierkoefficienterna för u' med hjälp av resultatet i (a) och exempel 6.6.

(c) Fourierserien för u är $\frac{1}{2} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i n t}$, enligt övning 4B (a). Derivera denna serie. Stämmer resultatet överens med resultatet i (b)?

6C Genomför några delar av beviset för sats 6.10.

6D Bestäm summorna av serierna $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ och $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

∗6E Antag att $u \in \mathcal{D}'_{2\pi}$ är udda och sådan att $(\sin t)u = 1$. Bestäm u:s fourierserie.

∗6F Bestäm summan av den trigonometriska serien $\displaystyle\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} e^{int}$.

∗∗6G Visa att om $u \in \mathcal{D}'_T$ så gäller att $⨍_T u'(t)\,dt = 0$.

∗∗6H Låt $u \in \mathcal{D}'_T$ och antag att u' ges av en funktion i $\mathcal{L}^2_T$. Visa att u:s fourierserie är absolutkonvergent.

∗∗6I Låt $c_n \in \mathbb{C}$, där $n \in \mathbb{Z}$, vara en följd som *inte* har högst polynomiell tillväxt. Visa att det finns en testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sådan att serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e^{int}, \varphi\rangle$ är divergent.

Fouriertransformen

Även funktioner som inte är periodiska kan, genom teorin för *fouriertransformen*, uttryckas med hjälp av harmoniska svängningar. Fouriertransformen infördes av Joseph Fourier i början av 1800-talet och är av fundamental betydelse inom många områden.

De grundläggande formlerna kan motiveras på följande sätt. Antag att $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ har kompakt stöd och att $T > 0$ är sådant att $u(t) = 0$ då $|t| \geq T/2$. Då gäller enligt teorin för fourierserier att

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}, \quad |t| \leq T/2, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-in\Omega t}\,dt \quad \text{och} \quad \Omega = 2\pi/T.$$

Om vi sätter $(\mathscr{F}u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt$ så kan detta skrivas som

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathscr{F}u)(n\Omega)e^{in\Omega t}\Omega, \quad |t| \leq T/2.$$

Låter vi nu $T \to \infty$, det vill säga $\Omega \to 0+$, så är det inte orimligt att summan övergår i en integral, och i så fall får vi att

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F}u)(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

vilket framställer u som en integral över harmoniska svängningar av *alla* vinkelfrekvenser, med en komplexvärd "amplituddensitet" $\mathscr{F}u$ som kallas u:s *fouriertransform*.

Föreläsning 7

Fouriertransform av integrerbara funktioner

7.1 Definition Låt $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Vi definierar u:s *fouriertransform*, betecknad $\hat{u}$ eller $\mathscr{F}u$, som den funktion som ges av

$$\hat{u}(\omega) = (\mathscr{F}u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

I andra framställningar förekommer ett antal varianter av denna definition, till exempel med en faktor $1/\sqrt{2\pi}$ framför integralen. Många formler får i dessa fall ett annat utseende, men teorin påverkas inte på något väsentligt sätt.

Notera att fouriertransformen $\hat{u}(\omega)$ av en funktion $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är motsvarigheten till fourierkoefficienterna för en periodisk funktion, och att den generaliserade integralen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

motsvarar en periodisk funktions fourierserie, enligt inledningen ovan.

7.2 Exempel Vi beräknar fouriertransformen av funktionen

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Notera att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Definition 7.1 ger att

$$\begin{aligned} \hat{u}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(1+i\omega)t}\, dt = \left[-\frac{1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+i\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

där vi använt att $e^{-(1+i\omega)t} \to 0$ då $t \to \infty$, vilket följer av att $\left|e^{-(1+i\omega)t}\right| = e^{-t}$.

7.3 Exempel Vi beräknar med residykalkyl fouriertransformen av funktionen

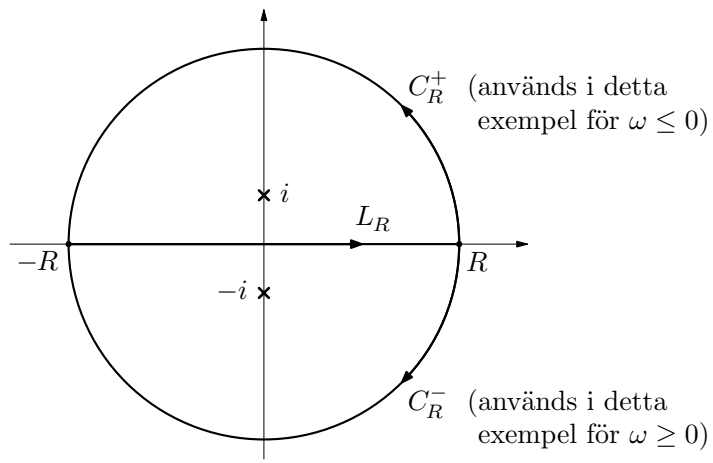
$$u(t) = \frac{1}{t^2+1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi har att

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2+1}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2+1}\, dt = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1}\, dz, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

där L_R är sträckan $z = t$ då t går från $-R$ till R.

För att kunna använda residysatsen inför vi kurvorna C_R^+ och C_R^-, som är de delar av cirkeln $|z| = R$ som ligger i halvplanen $\operatorname{Im} z \geq 0$ respektive $\operatorname{Im} z \leq 0$ och som är orienterade från L_R:s slutpunkt till L_R:s startpunkt:



En viktig observation är nu att värdet på ω bestämmer vilken av C_R^+ och C_R^- som ska användas för att bilda en sluten kontur tillsammans med L_R, eftersom

$$|e^{-i\omega z}| = \left|e^{-i\omega(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)}\right| = \left|e^{-i\omega \operatorname{Re} z + \omega \operatorname{Im} z}\right| = e^{\omega \operatorname{Im} z}.$$

Om $\omega \geq 0$ så har vi att $|e^{-i\omega z}|$ är begränsat av 1 på C_R^-, eftersom $\operatorname{Im} z \leq 0$ på C_R^-, men att $|e^{-i\omega z}|$ kan bli så stort som $e^{\omega R}$ på C_R^+. Detta ger att konturen $L_R + C_R^-$ ska användas då $\omega \geq 0$. På motsvarande sätt fås att konturen $L_R + C_R^+$ ska användas då $\omega \leq 0$.

Låt $\omega \geq 0$. Integranden har enkelpoler i $z = \pm i$, och konturen $L_R + C_R^-$ har negativ omloppsriktning, så om $R > 1$ ger residysatsen (se till exempel [2] eller [12]) att

$$\int_{L_R + C_R^-} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1}\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-i} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1} = -2\pi i \left.\frac{e^{-i\omega z}}{2z}\right|_{z=-i} = \pi e^{-\omega}.$$

Integralen över C_R^- går mot 0 då $R \to \infty$ (och $\omega \geq 0$):

$$\left|\int_{C_R^-} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1}\,dz\right| \leq \int_{C_R^-} \left|\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1}\right| |dz| \leq \frac{1}{R^2-1}\pi R \to 0, \quad R \to \infty.$$

Sammantaget ger detta att $\hat{u}(\omega) = \pi e^{-\omega}$ då $\omega \geq 0$.

Om $\omega \leq 0$ så får man på samma sätt att $\hat{u}(\omega) = \pi e^{\omega}$ genom att integrera över $L_R + C_R^+$. Slutresultatet är alltså att $\hat{u}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ för alla $\omega \in \mathbb{R}$.

Räkneregler för fouriertransformen

Nästa sats ger några användbara räkneregler för fouriertransformen. Jämför gärna med räknereglerna för fourierkoefficienter i sats 4.10.

7.4 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och för (h) nedan att u är kontinuerligt deriverbar och att derivatan $u'(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, och för (i) nedan att funktionen $tu(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Då gäller följande räkneregler:*

(a)	$u(t) + v(t)$	$\hat{u}(\omega) + \hat{v}(\omega)$	
(b)	$cu(t)$	$c\hat{u}(\omega)$	$(c \in \mathbb{C})$
(c)	$\overline{u(t)}$	$\overline{\hat{u}(-\omega)}$	
(d)	$u(-t)$	$\hat{u}(-\omega)$	
(e)	$u(at)$	$\hat{u}(\omega/a)/a$	$(a > 0)$
(f)	$u(t-a)$	$e^{-ia\omega}\hat{u}(\omega)$	$(a \in \mathbb{R})$
(g)	$e^{iat}u(t)$	$\hat{u}(\omega - a)$	$(a \in \mathbb{R})$
(h)	$u'(t)$	$i\omega\hat{u}(\omega)$	
(i)	$tu(t)$	$i\hat{u}'(\omega)$	

Som efter sats 4.10 noterar vi att (a) och (b) medför att fouriertransformen är linjär, från rummet $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ till det linjära rummet av komplexvärda funktioner definierade på $\mathbb{R}$, och att (d) medför att fouriertransformen är paritetsbevarande.

Bevis Vi visar först (e). Låt $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, låt $a > 0$ och sätt $v(t) = u(at)$ för $t \in \mathbb{R}$. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\hat{v}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(at)e^{-i\omega t}\,dt = \Big/ r = at \Big/ \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(r)e^{-i\omega(r/a)}\,\frac{1}{a}\,dr = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} u(r)e^{-i(\omega/a)r}\,dr \\
&= \frac{1}{a}\hat{u}(\omega/a), \quad \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Bevisen för (a)–(g) följer samma mönster.

För att visa (h) antar vi att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är kontinuerligt deriverbar och att $u' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Då följer att

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(r)\,dr \to u(0) + \int_0^\infty u'(r)\,dr, \quad t \to \infty,$$

det vill säga att u har ett gränsvärde då $t \to \infty$. Eftersom $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ måste gränsvärdet vara 0, och på samma sätt kan man visa att $u(t) \to 0$ då $t \to -\infty$. Vi får nu att

$$\begin{aligned}
(u')\hat{}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \Big[u(t)e^{-i\omega t}\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}(-i\omega)\,dt \\
&= 0 - 0 + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= i\omega\hat{u}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

För att visa (i) antar vi att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är sådan att funktionen $tu(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Denna förutsättning medför, enligt sats A.19, att $\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt$ är deriverbar och att derivatan fås genom att derivera under integraltecknet, det vill säga:

$$\hat{u}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}(-it)\,dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Detta ger att fouriertransformen av funktionen $tu(t)$ är $i\hat{u}'(\omega)$. □

7.5 Exempel Vi använder räknereglerna i sats 7.4 för att bestämma fouriertransformen av funktionen

$$u(t) = \frac{e^{i3t}}{4t^2 + 4t + 2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Först gör vi en kvadratkomplettering,

$$u(t) = \frac{e^{i3t}}{4t^2 + 4t + 2} = \frac{e^{i3t}}{(2t+1)^2 + 1},$$

så att vi tydligare ser strukturen hos u. Utgående från fouriertransformen av $1/(t^2+1)$, som vi till exempel får ur tabell eller räknar fram som i exempel 7.3, tar vi oss sedan fram till funktionen u genom att successivt använda räknereglerna (f), (e) och (g) i sats 7.4:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2+1} &\xrightarrow{\mathscr{F}} && \pi e^{-|\omega|}, \\
\frac{1}{(t+1)^2+1} & && e^{i\omega}\pi e^{-|\omega|} = \pi e^{i\omega - |\omega|}, \\
\frac{1}{(2t+1)^2+1} & && \frac{1}{2}\pi e^{i\omega/2 - |\omega/2|} = \frac{\pi}{2} e^{(i\omega - |\omega|)/2}, \\
\frac{e^{i3t}}{(2t+1)^2+1} & && \frac{\pi}{2} e^{(i(\omega-3) - |\omega-3|)/2}.
\end{aligned}$$

Fouriertransformen av u är alltså lika med den sista funktionen i högerkolumnen.

7.6 Exempel Låt $u(t) = e^{-t^2/2}$ för $t \in \mathbb{R}$. Vi bestämmer u:s fouriertransform.

Då $t \to \pm\infty$ avtar u så snabbt att både u själv och funktionen $tu(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Vi har också att $u'(t) = -te^{-t^2/2}$, så derivatan av u är kontinuerlig och tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, och u uppfyller differentialekvationen

$$u'(t) + tu(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alla förutsättningar för att fouriertransformera vänsterledet av differentialekvationen är uppfyllda (se sats 7.4) och transformen av högerledet är förstås noll, så vi har att

$$i\omega\hat{u}(\omega) + i\hat{u}'(\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Vi får att $\hat{u}(\omega) = \hat{u}(0)e^{-\omega^2/2}$ genom att lösa denna differentialekvation, till exempel med hjälp av integrerande faktor. Konstanten $\hat{u}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{-i0t}\,dt$ är positiv och dess värde kan bestämmas genom följande trick:

$$\hat{u}(0)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2/2}\,dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(r^2+t^2)/2}\,dr\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2}\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi,$$

där ρ, θ är polära koordinater i rt-planet. Alltså har vi att $\hat{u}(\omega) = \sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

7.7 Exempel Vi bestämmer en lösning y till differentialekvationen

$$y'(t) + y(t) = 2e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

genom att fouriertransformera ekvationen.

Vi antar att y är kontinuerligt deriverbar och att $y, y' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så att vi kan använda sats 7.4 för att fouriertransformera vänsterledet. Högerledets fouriertransform får vi till exempel ur tabell, och tillsammans ger detta att

$$i\omega\hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega) = \frac{4}{1+\omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Vi löser ut $\hat{y}(\omega)$ och gör en partialbråksuppdelning:

$$\hat{y}(\omega) = \frac{4}{(1+\omega^2)(1+i\omega)} = \frac{4}{(1-i\omega)(1+i\omega)^2} = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} + \frac{2}{(1+i\omega)^2}.$$

Ur tabell får vi att $1/(1-i\omega)$ är fouriertransformen av $e^t\chi(-t)$ och att $1/(1+i\omega)$ är fouriertransformen av $e^{-t}\chi(t)$. Funktionen $2/(1+i\omega)^2$ finns inte i tabellen, men vi kan använda räkneregel (i) i sats 7.4 på följande sätt:

$$\begin{aligned} e^{-t}\chi(t) \quad &\xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \frac{1}{1+i\omega}, \\ te^{-t}\chi(t) \quad & \qquad\quad i\frac{d}{d\omega}\Big(\frac{1}{1+i\omega}\Big) = \frac{1}{(1+i\omega)^2}. \end{aligned}$$

Vi sätter nu $y(t) = e^t\chi(-t) + e^{-t}\chi(t) + 2te^{-t}\chi(t)$ då $t \neq 0$, och $y(0)$ väljs så att y blir kontinuerlig, det vill säga,

$$y(t) = \begin{cases} (1+2t)e^{-t}, & t \geq 0, \\ e^t, & t \leq 0. \end{cases}$$

Då är y en funktion vars fouriertransform löser den transformerade differentialekvationen, och att y löser den ursprungliga differentialekvationen kan kontrolleras genom insättning.

Egenskaper hos fouriertransformen

Följande sats om fouriertransformens grundläggande egenskaper motsvarar sats 4.12 och sats 4.13 om egenskaper hos fourierkoefficienter.

7.8 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Då är u:s fouriertransform $\hat{u}$ en likformigt kontinuerlig funktion sådan att*

$$|\hat{u}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\,dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

och sådan att $\hat{u}(\omega) \to 0$ då $\omega \to \pm\infty$.

Vi har alltså att $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$ då $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Det följer, eftersom fouriertransformen är linjär, att fouriertransformen är en kontinuerlig avbildning från $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ till $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Bevis Vi har att

$$|\hat{u}(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)e^{-i\omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\,dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

och eftersom $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ följer direkt av Riemann–Lebesgues lemma (4.14) att $\hat{u}(\omega) \to 0$ då $\omega \to \pm\infty$.

Vi visar nu att $\hat{u}$ är likformigt kontinuerlig. Låt $\varepsilon > 0$ och låt $\omega \in \mathbb{R}$. Vi har att

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(\omega+\eta) - \hat{u}(\omega)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i(\omega+\eta)t}\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt\right| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}(e^{-i\eta t} - 1)\,dt\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)||e^{-i\eta t} - 1|\,dt, \quad \eta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

För att komma vidare behöver vi vissa uppskattningar av $|e^{-i\eta t} - 1|$. Triangelolikheten ger att

$$|e^{-i\eta t} - 1| \leq |e^{-i\eta t}| + |1| = 2, \quad \eta, t \in \mathbb{R},$$

och vi har också att

$$|e^{-i\eta t} - 1| = \left|\int_0^1 (-i\eta t)e^{-i\eta t r}\,dr\right| \leq \int_0^1 |-i\eta t e^{-i\eta t r}|\,dr = |\eta t|, \quad \eta, t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ finns ett $R \geq 0$ sådant att $\int_{|t|>R} |u(t)|\,dt < \varepsilon/4$, och vi får nu att

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(\omega+\eta) - \hat{u}(\omega)| &\leq \int_{|t|>R} |u(t)||e^{-i\eta t} - 1|\,dt + \int_{-R}^{R} |u(t)||e^{-i\eta t} - 1|\,dt \\
&\leq \int_{|t|>R} |u(t)|2\,dt + \int_{-R}^{R} |u(t)||\eta t|\,dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + |\eta| \int_{-R}^{R} |u(t)|R\,dt, \quad \eta \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

vilket är oberoende av ω och mindre än ε om $|\eta|$ är tillräckligt litet. □

Två allmänna principer är att ju mera reguljär en funktion är, desto snabbare avtar dess fouriertransform i oändligheten, och att ju snabbare en funktion avtar i oändligheten, desto mera reguljär är dess fouriertransform. Följande två satser är konkreta exempel på dessa allmänna principer om regularitet och avtagande.

7.9 Sats *Antag att $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ och att $u, u', \dots, u^{(k)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ för något $k \in \mathbb{N}$. Då finns en konstant $C \geq 0$ sådan att*

$$|\hat{u}(\omega)| \leq \frac{C}{|\omega|^k}, \quad \omega \neq 0.$$

Bevis Genom upprepad användning av sats 7.4 (h) fås att $u^{(k)}$ har fouriertransformen $(i\omega)^k \hat{u}(\omega)$, som enligt sats 7.8 är en begränsad funktion. Det finns alltså en konstant C sådan att $|(i\omega)^k \hat{u}(\omega)| \leq C$ för alla $\omega \in \mathbb{R}$, så $|\hat{u}(\omega)| \leq C/|\omega|^k$ då $\omega \neq 0$. □

7.10 Sats *Antag att funktionerna $u(t)$, $tu(t)$, …, $t^k u(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ för något $k \in \mathbb{N}$. Då gäller att $\hat{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.*

Bevis Om $k = 0$ ger sats 7.8 att $\hat{u}$ är kontinuerlig. Om $k = 1$ ger sats 7.4 (i) att $\hat{u}$ är deriverbar och att $\hat{u}'$ är fouriertransformen av funktionen $-itu(t)$, vilket enligt sats 7.8 medför att $\hat{u}'$ är kontinuerlig och därmed att $\hat{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Om $k > 1$ följer att $\hat{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ genom att resonemanget upprepas. □

Fouriers inversionsformel

Nästa sats, som ger tillräckliga villkor för att Fouriers inversionsformel ska gälla, är ett huvudresultat i teorin för fouriertransformen och är en direkt motsvarighet till satsen om punktvis konvergens (4.16) för fourierserier.

7.11 Sats (Fouriers inversionsformel) *Låt $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och antag att u har generaliserad högerderivata och generaliserad vänsterderivata i en punkt $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega) e^{i\omega a} \, d\omega = \frac{u(a+) + u(a-)}{2}.$$

Beviset för sats 7.11 följer på nästa sida, efter att vi har undersökt vad satsens resultat innebär för den *inversa fouriertransformen*, eller *inverstransformen*, som vi inför nedan.

Notera att vänsterledet i formeln ovan är lika med $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{i\omega a} \, d\omega$ om $\hat{u} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. För en funktion $U \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ definierar vi därför dess *inverstransform* $\mathscr{F}^{-1}U$ genom

$$(\mathscr{F}^{-1}U)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $(\mathscr{F}^{-1}U)(t) = \frac{1}{2\pi}(\mathscr{F}U)(-t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$ har inverstransformen $\mathscr{F}^{-1}$ väsentligen samma egenskaper som fouriertransformen $\mathscr{F}$.

Av sats 7.11 följer att $\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}u) = u$ (vilket också kan skrivas som $\hat{\hat{u}} = 2\pi \check{u}$) om vissa förutsättningar är uppfyllda, till exempel om $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är deriverbar och $\mathscr{F}u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Detta medför i sin tur att $\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}U) = U$ under vissa förutsättningar, till exempel om $U \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är deriverbar och $\mathscr{F}^{-1}U \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, eftersom vi då har att

$$\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}U) = \mathscr{F}\big(\tfrac{1}{2\pi}(\mathscr{F}U)\check{}\big) = \tfrac{1}{2\pi}(\mathscr{F}(\mathscr{F}U))\check{} = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}U) = U.$$

Bevis för sats 7.11 Låt $R > 0$. Som i beviset av satsen om punktvis konvergens (4.16) börjar vi med några omskrivningar:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\hat{u}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-i\omega t}\,dt\Big)e^{i\omega a}\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}u(t)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}e^{i\omega(a-t)}\,d\omega\Big)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}u(t)\,D_R(a-t)\,dt,$$

där bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, och D_R betecknar dirichletkärnan på reella axeln, det vill säga den funktion som ges av

$$D_R(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}e^{i\omega t}\,d\omega = \Big[\frac{e^{i\omega t}}{2\pi i t}\Big]_{-R}^{R} = \frac{\sin Rt}{\pi t}, \quad t \neq 0,$$

och $D_R(0) = R/\pi$. Eftersom D_R är en jämn funktion får vi att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\hat{u}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = \int_{0}^{\infty}u(a+t)\,D_R(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0}u(a+t)\,D_R(t)\,dt, \qquad (*)$$

och vi utreder nu vad som händer då $R \to \infty$.

Den första integralen i högerledet av $(*)$ är lika med

$$\int_0^1 u(a+)\frac{\sin Rt}{\pi t}\,dt + \int_0^1\big(u(a+t)-u(a+)\big)\frac{\sin Rt}{\pi t}\,dt + \int_1^{\infty}u(a+t)\frac{\sin Rt}{\pi t}\,dt.$$

Eftersom $\int_0^R(\sin t)/t\,dt \to \pi/2$ då $R \to \infty$, vilket man kan visa med hjälp av residykalkyl (se till exempel [2] eller [12]), får vi att

$$\int_0^1 u(a+)\frac{\sin Rt}{\pi t}\,dt = \frac{u(a+)}{\pi}\int_0^R\frac{\sin t}{t}\,dt \to \frac{u(a+)}{2}, \quad R \to \infty.$$

Vidare, eftersom $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och u har generaliserad högerderivata i a har vi att funktionen som ges av $(u(a+t)-u(a+))/t$ då $0 < t < 1$ och av 0 då $t \leq 0$ eller $t \geq 1$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, vilket enligt Riemann–Lebesgues lemma (4.14) medför att

$$\int_0^1\big(u(a+t)-u(a+)\big)\frac{\sin Rt}{\pi t}\,dt \to 0, \quad R \to \infty.$$

Dessutom ger Riemann–Lebesgues lemma att

$$\int_1^{\infty}u(a+t)\frac{\sin Rt}{\pi t}\,dt \to 0, \quad R \to \infty,$$

eftersom funktionen som ges av $u(a+t)/t$ då $t > 1$ och av 0 då $t \leq 1$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Sammantaget ger detta att

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\infty}u(a+t)\,D_R(t)\,dt = \frac{u(a+)}{2}.$$

Genom att behandla den andra integralen i högerledet av $(*)$ på samma sätt får vi att

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{0}u(a+t)\,D_R(t)\,dt = \frac{u(a-)}{2},$$

och därmed är satsen bevisad. □

7.12 Exempel Vi bestämmer en funktion $y(t)$ som har fouriertransform

$$Y(\omega) = \frac{4}{(1-i\omega)(1+i\omega)^2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

med hjälp av Fouriers inversionsformel (7.11). Jämför gärna med exempel 7.7.

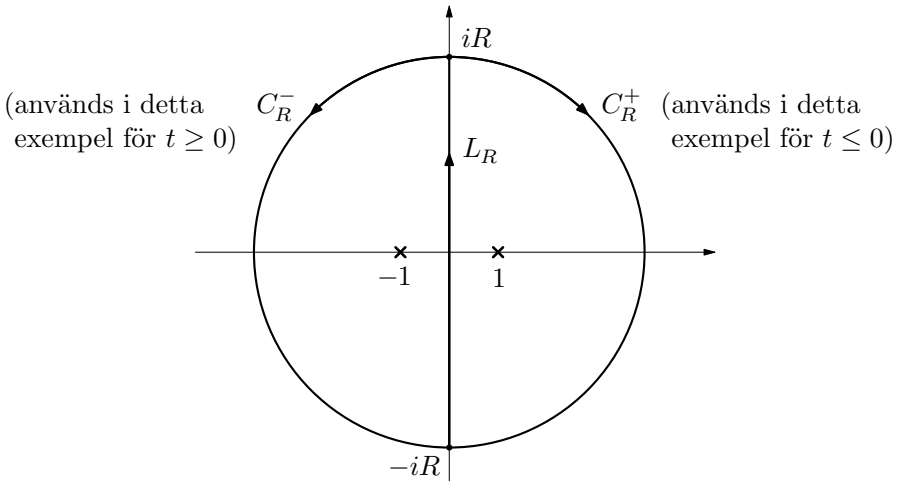
Vi sätter

$$y(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} Y(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{4e^{i\omega t}}{(1-i\omega)(1+i\omega)^2}\,d\omega, \quad t \in \mathbb{R},$$

och uttrycker integralen som en komplex kurvintegral i s-planet, där $s = \sigma + i\omega$ är en komplex variabel. Låt L_R vara sträckan $s = i\omega$ då ω går från $-R$ till R. Då är $ds = i\,d\omega$, så vi får att

$$y(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{4e^{st}}{(1-s)(1+s)^2}\,ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Låt kurvorna C_R^+ och C_R^- vara de delar av cirkeln $|s| = R$ som ligger i halvplanen $\operatorname{Re} s \geq 0$ respektive $\operatorname{Re} s \leq 0$ och som är orienterade från L_R:s slutpunkt till L_R:s startpunkt:



Värdet på t bestämmer vilken av kurvorna C_R^+ och C_R^- som ska användas för att bilda en sluten kontur tillsammans med L_R, eftersom

$$|e^{st}| = \left|e^{(\sigma+i\omega)t}\right| = e^{\sigma t}.$$

Om $t \geq 0$ så har vi att $|e^{st}| \leq 1$ på C_R^-, men att $|e^{st}|$ kan bli så stort som e^{Rt} på C_R^+. Alltså väljer vi C_R^- då $t \geq 0$, och av motsvarande skäl C_R^+ då $t \leq 0$. Som i exempel 7.3 ger nu residysatsen och uppskattningar av integralerna längs C_R^+ och C_R^- att

$$y(t) = \begin{cases} \operatorname*{Res}_{s=-1} \dfrac{4e^{st}}{(1-s)(1+s)^2} = \dfrac{1}{1!}\dfrac{d}{ds}\Big(\dfrac{4e^{st}}{1-s}\Big)\Big|_{s=-1} = (1+2t)e^{-t}, & t \geq 0, \\ -\operatorname*{Res}_{s=1} \dfrac{4e^{st}}{(1-s)(1+s)^2} = -\dfrac{4e^{st}}{(-1)(1+s)^2}\Big|_{s=1} = e^{t}, & t \leq 0. \end{cases}$$

Att vi verkligen har att $\hat{y} = Y$ följer av sats 7.11 eftersom $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, Y är deriverbar, och $y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Entydighet

Följande entydighetssats visar att en funktion som tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ väsentligen är bestämd av sin fouriertransform (jämför med sats 4.18).

7.13 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ har samma fouriertransform. Då är $u(t) = v(t)$ i alla punkter $t \in \mathbb{R}$ där både u och v är kontinuerliga.* □

Sats 7.13 är en direkt följd av nästa sats:

7.14 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och antag att u har högergränsvärde och vänstergränsvärde i en punkt $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\omega|}{R}\right)\hat{u}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = \frac{u(a+)+u(a-)}{2}.$$

Notera att integralen i vänsterledet kan ses som ett medelvärde av de integraler som förekommer i inversionsformeln (jämför med situationen i sats 4.19):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\omega|}{R}\right)\hat{u}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = \frac{1}{R}\int_{0}^{R}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r}\hat{u}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega\right)dr.$$

Bevis Vi beskriver bara mycket kortfattat detta bevis eftersom det förhåller sig till beviset av Fouriers inversionsformel (7.11) som beviset av sats 4.19 förhåller sig till beviset av satsen om punktvis konvergens (4.16).

Låt $R > 0$. Omskrivningar ger att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\omega|}{R}\right)\hat{u}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)F_R(a-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(a+t)F_R(t)\,dt,$$

där

$$F_R(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\omega|}{R}\right)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1-\cos Rt}{\pi R t^2} = \frac{R}{2\pi}\left(\frac{\sin Rt/2}{Rt/2}\right)^2, \quad t \neq 0.$$

Funktionen F_R är positiv och jämn, och residykalkyl ger att $\int_{-\infty}^{\infty} F_R(t)\,dt = 1$ för alla R. Dessutom gäller det för varje $\delta > 0$ att $\sup\{F_R(t);\, |t| > \delta\} \to 0$ då $R \to \infty$ och att $\int_{|t|>\delta} F_R(t)\,dt \to 0$ då $R \to \infty$. Detta medför att

$$\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\infty} u(a+t)F_R(t)\,dt = \frac{u(a+)}{2} \quad \text{och att} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{-\infty}^{0} u(a+t)F_R(t)\,dt = \frac{u(a-)}{2}. \qquad \square$$

7.15 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och antag att u har högergränsvärde och vänstergränsvärde i en punkt $a \in \mathbb{R}$. Då gäller att*

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\hat{u}(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = \frac{u(a+)+u(a-)}{2},$$

förutsatt att gränsvärdet i vänsterledet existerar ändligt. □

Om inversionsformeln ger ett värde så är det alltså ”rätt” värde. Sats 7.15 kan visas följa från sats 7.14 på samma sätt som vi visade att sats 4.20 följer från sats 4.19.

Övningar

7A Låt $u(t) = e^{-3|t|}$ för $t \in \mathbb{R}$. Beräkna fouriertransformen av u genom att använda definition 7.1.

7B Använd Fouriers inversionsformel (7.11) för att inverstransformera funktionen

$$\frac{3e^{-i\omega}}{\omega^2 - i\omega + 2}.$$

7C Låt u vara den funktion som ges av $u(t) = t$ då $|t| < 1$ och av $u(t) = 0$ då $|t| \geq 1$. Bestäm (utan några beräkningar) för varje $t \in \mathbb{R}$ gränsvärdet

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

7D Bestäm fouriertransformen av följande funktioner:

(a) $\dfrac{2}{t^2 + 6t + 13}$, (b) $\dfrac{\sin t}{1 + 9t^2}$, (c) $\dfrac{t}{(1 + t^2)^2}$, (d) $\dfrac{1}{(4 + t^2)^2}$.

7E Bevisa några av räknereglerna i sats 7.4.

7F Bestäm en lösning till differentialekvationen $y''(t) - 4y(t) = -6e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

7G Bestäm funktioner som har följande fouriertransformer:

(a) $e^{-\omega^2}$, (b) $\dfrac{1}{5 + 3i\omega}$, (c) $\omega e^{-\omega^2}$, (d) $\dfrac{\sin 3\omega}{\omega e^{i2\omega}}$.

∗**7H** Bestäm en lösning till differentialekvationen $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

∗**7I** Bestäm en lösning till differentialekvationen $y''(t) + ty'(t) + y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, som uppfyller villkoret $y(1) = 1$.

∗∗**7J** Låt $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara en etta över en period (se 6.3). Beräkna $\hat{\rho}(n\Omega)$ för $n \in \mathbb{Z}$, där $\Omega = 2\pi/T$ och T är periodlängden.

∗∗**7K** Antag att funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är deriverbar (i klassisk mening) och har kompakt stöd. Medför detta att $\hat{u} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$?

Föreläsning 8

Faltning och fouriertransform

8.1 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att minst en av u och v är begränsad. Då gäller att faltningen $u * v$ är en kontinuerlig och begränsad funktion som tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, och att*

$$(u * v)\hat{}(\omega) = \hat{u}(\omega)\hat{v}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Om också $w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och minst en av faktorerna i varje ingående faltning är begränsad så gäller att $(u * v) * w = u * (v * w)$.

Bevis Sats 3.6 ger att faltningen $u * v$ är en kontinuerlig och begränsad funktion på $\mathbb{R}$. Att $u * v$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ följer, eftersom $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, av att

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |(u * v)(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\, dr \right| dt \le \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)||v(r)|\, dr\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)|\, dt \right) |v(r)|\, dr = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v(r)|\, dr \right),\end{aligned}$$

där bytet av integrationsordning är tillåtet eftersom integranden är positiv (se sats A.20). Räkningen visar också att $\|u * v\|_1 \le \|u\|_1 \|v\|_1$.

Eftersom $u * v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är fouriertransformen av $u * v$ väldefinierad och ges av

$$\begin{aligned}(u * v)\hat{}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u * v)(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\, dr \right) e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r) e^{-i\omega(t-r)} v(r) e^{-i\omega r}\, dr\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r) e^{-i\omega(t-r)}\, dt \right) v(r) e^{-i\omega r}\, dr \\ &= \hat{u}(\omega)\hat{v}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

där bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom $|u| * |v| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Om också $w \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och minst en av faktorerna i varje ingående faltning är begränsad så gäller att $(|u| * |v|) * |w| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, vilket tillsammans med sats A.20 ger att bytet av integrationsordning är tillåtet i följande beräkning:

$$\begin{aligned}\big((u * v) * w\big)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u * v)(t-r) w(r)\, dr = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(s) v(t-r-s)\, ds \right) w(r)\, dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t-r-s) w(r)\, dr \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} u(s) (v * w)(t-s)\, ds \\ &= \big(u * (v * w)\big)(t), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Alltså gäller att $(u * v) * w = u * (v * w)$. □

8.2 Anmärkning Om $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och varken u eller v är begränsad så kan det inträffa att faltningen $u * v$ inte väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (se 1.3), vilket kan ses som en brist hos vårt rum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Denna brist finns inte hos det fullständiga rummet $L^1(\mathbb{R})$ (se 1.11): faltningen av två funktioner i $L^1(\mathbb{R})$ är alltid väldefinierad och tillhör $L^1(\mathbb{R})$.

8.3 Exempel Låt, för $a > 0$, funktionen f_a ges av

$$f_a(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2 + a^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi beräknar faltningen $f_a * f_b$, där $a, b > 0$.

Notera att f_a är begränsad och tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Ur tabell (till exempel) får vi att

$$\widehat{f_a}(\omega) = e^{-a|\omega|}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Sats 8.1 ger nu att $f_a * f_b$ har fouriertransformen

$$\widehat{f_a}(\omega)\widehat{f_b}(\omega) = e^{-a|\omega|}e^{-b|\omega|} = e^{-(a+b)|\omega|},$$

vars inverstransform är f_{a+b}. Alltså har vi att $f_a * f_b = f_{a+b}$.

Funktionen f_a är för övrigt täthetsfunktion för en så kallad *cauchyfördelad* stokastisk variabel (med parameter a). Inom sannolikhetsteorin visar man att täthetsfunktionen för summan av två oberoende stokastiska variabler är faltningen av deras täthetsfunktioner. I detta sammanhang visar alltså formeln $f_a * f_b = f_{a+b}$ att summan av två oberoende cauchyfördelade stokastiska variabler också är cauchyfördelad. Fouriertransformen av en stokastisk variabels täthetsfunktion kallas inom sannolikhetsteorin ofta för variabelns *karakteristiska funktion*.

8.4 Exempel Vi bestämmer en lösning u till integralekvationen

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)e^{-r^2/2}\,dr = e^{-t^2/4}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi observerar att vänsterledet är faltningen $u * f$, där funktionen f ges av

$$f(t) = e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funktionen f är begränsad och tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så vi antar att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ eftersom faltningen då är väldefinierad och vi kan använda sats 8.1.

Vi fouriertransformerar nu båda leden i integralekvationen. Fouriertransformen av f och av högerledet får vi till exempel ur tabell och för vänsterledet använder vi sats 8.1. Vi får att

$$\hat{u}(\omega)\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2/2} = \sqrt{4\pi}\,e^{-\omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

vilket ger att $\hat{u}(\omega) = \sqrt{2}\,e^{-\omega^2/2}$. Vi sätter till slut u lika med inverstransformen av $\hat{u}$, som vi till exempel får ur tabell:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Att detta är en lösning till integralekvationen kan kontrolleras genom direkt insättning.

Parsevals formel

8.5 Rummet $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ Vi låter $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ beteckna mängden av de funktioner $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ som är sådana att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Mängden $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$, vilket följer på samma sätt som för rummet $\mathcal{L}^2_T$ (se 5.15).

Vi definierar skalärprodukten $\langle \ | \ \rangle_2$ på $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ genom

$$\langle u \,|\, v \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)} \, dt, \quad u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

Integralen är absolutkonvergent (se 5.15), så $\langle \ | \ \rangle_2$ är väldefinierad. Att $\langle \ | \ \rangle_2$ uppfyller kraven på en skalärprodukt (se 5.6) är en rättfram följd av dess definition.

Det linjära rummet $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ med skalärprodukten $\langle \ | \ \rangle_2$ är alltså ett unitärt rum (se 5.6), med norm

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u \,|\, u \rangle_2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}, \quad u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

Observera dock att $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *inte* är ett underrum av $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Funktionen $1/\sqrt{t^2+1}$, till exempel, tillhör $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ men inte $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. En följd av detta är att definition 7.1 inte kan användas för att definiera fouriertransformen av vissa funktioner i $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Den allmänna teorin om bästa approximation i unitära rum, som vi tidigare använt för rummet $\mathcal{L}^2_T$, gäller förstås också för rummet $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Vi avstår dock från några konkreta exempel, eftersom det inte finns någon lika kanoniskt given följd av ändligdimensionella underrum i $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ som den följd i $\mathcal{L}^2_T$ som ges av $[e^{-iN\Omega t}, \ldots, e^{iN\Omega t}]$, $N = 0, 1, 2, \ldots$.

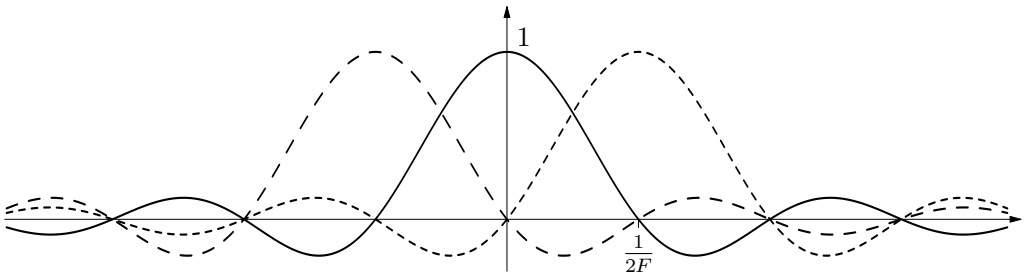
Vi tar istället upp det så kallade *samplingsteoremet*:

8.6 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är kontinuerlig och att det finns en konstant $F > 0$ sådan att $\hat{u}(\omega) = 0$ då $|\omega| > 2\pi F$. Då gäller att*

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n/2F) \frac{\sin(2\pi F t - n\pi)}{2\pi F t - n\pi}, \quad t \in \mathbb{R},$$

där $\sin(2\pi F t - n\pi)/(2\pi F t - n\pi)$ ska tolkas som 1 då $2\pi F t - n\pi = 0$.

En tolkning av satsen är att en signal u som inte innehåller frekvenser högre än F kan återskapas fullständigt om den samplas med den dubbla frekvensen $2F$. Följande figur visar utseendet för funktionerna $\sin(2\pi F t - n\pi)/(2\pi F t - n\pi)$, där $n = 0$ och ± 1:



Bevis för sats 8.6 Eftersom u är kontinuerlig och $\hat{u}(\omega) = 0$ då $|\omega| > 2\pi F$ följer av sats 7.15 att

$$u(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi F}^{2\pi F} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi F}\int_{-2\pi F}^{2\pi F} 2F\hat{u}(-\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = \langle U\,|\,V_t\rangle_{2,T}, \quad t\in\mathbb{R}, \qquad (*)$$

där $T = 4\pi F$ och U och V_t är de T-periodiska funktioner som ges av $U(\omega) = 2F\hat{u}(-\omega)$ respektive $V_t(\omega) = e^{i\omega t}$ då $-T/2 \le \omega < T/2$. Parsevals formel för fourierserier (5.19) ger därför att

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathscr{F}_T U)(n)\overline{(\mathscr{F}_T V_t)(n)}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Ur $(*)$ ovan får vi att fourierkoefficienterna för U är

$$(\mathscr{F}_T U)(n) = \frac{1}{4\pi F}\int_{-2\pi F}^{2\pi F} 2F\hat{u}(-\omega)e^{-in(2\pi/4\pi F)\omega}\,d\omega = u(n/2F), \quad n\in\mathbb{Z},$$

och en direkt beräkning av fourierkoefficienterna för V_t ger att

$$(\mathscr{F}_T V_t)(n) = \frac{1}{4\pi F}\int_{-2\pi F}^{2\pi F} e^{i\omega t}e^{-in(2\pi/4\pi F)\omega}\,d\omega = \frac{\sin(2\pi Ft - n\pi)}{2\pi Ft - n\pi}, \quad n\in\mathbb{Z},$$

där $\sin(2\pi Ft - n\pi)/(2\pi Ft - n\pi)$ ska tolkas som 1 då $2\pi Ft - n\pi = 0$. Sammantaget ger detta att

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n/2F)\overline{\left(\frac{\sin(2\pi Ft - n\pi)}{2\pi Ft - n\pi}\right)}, \quad t\in\mathbb{R},$$

vilket avslutar beviset eftersom det som konjugeras är reellvärt. □

Vi går nu vidare till Parsevals formel för rummet $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, ofta kallad *Plancherels formel.*

8.7 Parsevals formel *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Då gäller att $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\,d\omega,$$

och speciellt att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2\,d\omega.$$

Bevis Vi antar först att $u, v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ och att u och v har kompakt stöd. Sats 7.9 ger att det då finns en konstant C sådan att $|\hat{v}(\omega)| \le C/|\omega|^2$ för $\omega \ne 0$, och $\hat{v}$ är kontinuerlig enligt sats 7.8, så $\hat{v} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Med hjälp av Fouriers inversionsformel (7.11) får vi att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{v(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\right)}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt\right)\overline{\hat{v}(\omega)}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\,d\omega,$$

där bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom u och $\hat{v}$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alltså gäller Parsevals formel om $u, v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ och u och v har kompakt stöd.

Vi visar nu att om u är en godtycklig funktion i $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ så gäller att $\hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ och att $2\pi\|u\|_2^2 = \|\hat{u}\|_2^2$. Det allmänna fallet av Parsevals formel följer från detta specialfall genom polarisationsidentiteten (se beviset för sats 5.14).

Antag alltså att u är en godtycklig funktion i $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, och låt $u_1, u_2, \ldots,$ vara en följd av funktioner sådan att varje funktion u_n tillhör $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ och har kompakt stöd, och sådan att $\|u_n - u\|_1 \to 0$ och $\|u_n - u\|_2 \to 0$ då $n \to \infty$. En sådan följd kan till exempel konstrueras på följande sätt: eftersom $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är det inga problem att modifiera sats A.17 så att vi för varje $n \geq 1$ får en funktion $v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är styckvis konstant, har kompakt stöd, och är sådan att $\|u - v_n\|_1 < 1/n$ och $\|u - v_n\|_2 < 1/n$. Med hjälp av sats 3.10 (b) får vi sedan att det finns en regularisering u_n av v_n sådan att $\|v_n - u_n\|_1 < 1/n$ och $\|v_n - u_n\|_2 < 1/n$ (eftersom $\|v_n - u_n\|_2^2 \leq \|v_n - u_n\|_\infty \|v_n - u_n\|_1$).

För $r > 0$ sätter vi $\rho_r(\omega) = 1$ då $|\omega| \leq r$ och $\rho_r(\omega) = 0$ då $|\omega| > r$.

Eftersom $\|\widehat{u_n} - \hat{u}\|_\infty \leq \|u_n - u\|_1$, enligt sats 7.8, har vi att $\widehat{u_n} \to \hat{u}$ likformigt på $\mathbb{R}$. Detta medför, om $r > 0$ är fixt, att $\|\rho_r(\widehat{u_n} - \hat{u})\|_2 \to 0$ då $n \to \infty$, enligt sats A.9.

Eftersom $|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leq \|u_n - u\|_2$ (av den omvända triangelolikheten) har vi att $\|u_n\|_2 \to \|u\|_2$ då $n \to \infty$. Det finns därför en konstant C sådan att $\sqrt{2\pi}\,\|u_n\|_2 \leq C$ för alla $n \geq 1$. Parsevals formel gäller för u_n, så $\|\widehat{u_n}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|u_n\|_2 \leq C$ för alla $n \geq 1$, och vi får att

$$\begin{aligned}
\|\rho_r \hat{u}\|_2 &\leq \|\rho_r(\hat{u} - \widehat{u_n})\|_2 + \|\rho_r \widehat{u_n}\|_2 \\
&\leq \|\rho_r(\widehat{u_n} - \hat{u})\|_2 + \|\widehat{u_n}\|_2 \\
&\leq \|\rho_r(\widehat{u_n} - \hat{u})\|_2 + C, \quad r > 0,\ n \geq 1.
\end{aligned}$$

För ett godtyckligt fixt $r > 0$ låter vi $n \to \infty$ i denna olikhet och får att $\|\rho_r \hat{u}\|_2 \leq C$. $\mathcal{L}^2$-normen av $\rho_r \hat{u}$ är alltså begränsad av en konstant som inte beror på r, vilket medför att $\hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Låt nu $\varepsilon > 0$. Eftersom Parsevals formel gäller för $u_n - u_m$ har vi att

$$\begin{aligned}
\|(1 - \rho_r)\widehat{u_n}\|_2 &\leq \|(1 - \rho_r)(\widehat{u_n} - \widehat{u_m})\|_2 + \|(1 - \rho_r)\widehat{u_m}\|_2 \\
&\leq \|\widehat{u_n} - \widehat{u_m}\|_2 + \|(1 - \rho_r)\widehat{u_m}\|_2 \\
&= \sqrt{2\pi}\,\|u_n - u_m\|_2 + \|(1 - \rho_r)\widehat{u_m}\|_2, \quad r > 0,\ m, n \geq 1. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Eftersom $\|u_n - u\|_2 \to 0$ då $n \to \infty$ kan vi välja m så stort att $\sqrt{2\pi}\,\|u_n - u\|_2 < \varepsilon/5$ då $n \geq m$. Vi kan sedan välja r så stort att $\|(1 - \rho_r)\widehat{u_m}\|_2 < \varepsilon/5$ och $\|(1 - \rho_r)\hat{u}\|_2 < \varepsilon/5$, eftersom $\widehat{u_m}$ och $\hat{u}$ tillhör $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Eftersom $\|u_n - u_m\|_2 \leq \|u_n - u\|_2 + \|u - u_m\|_2$ ger $(*)$ nu att $\|(1 - \rho_r)\widehat{u_n}\|_2 < 3\varepsilon/5$ för alla $n \geq m$ och det följer att

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u_n} - \hat{u}\|_2 &\leq \|\widehat{u_n} - \rho_r \widehat{u_n}\|_2 + \|\rho_r \widehat{u_n} - \rho_r \hat{u}\|_2 + \|\rho_r \hat{u} - \hat{u}\|_2 \\
&< \frac{3\varepsilon}{5} + \|\rho_r(\widehat{u_n} - \hat{u})\|_2 + \frac{\varepsilon}{5}, \quad n \geq m.
\end{aligned}$$

Sista ledet är mindre än ε om n är tillräckligt stort, så $\|\widehat{u_n} - \hat{u}\|_2 \to 0$ då $n \to \infty$, och av detta följer att $\|\widehat{u_n}\|_2 \to \|\hat{u}\|_2$ då $n \to \infty$.

Till slut får vi nu att

$$2\pi\|u\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} 2\pi\|u_n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{u_n}\|_2^2 = \|\hat{u}\|_2^2,$$

och därmed är beviset klart. $\square$

8.8 Exempel Vi ser vad Parsevals formel ger då den tillämpas på funktionen

$$u(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Notera att $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Enligt tabell, eller en kort räkning, har vi att u:s fouriertransform är

$$\hat{u}(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

där $\frac{\sin\omega}{\omega}$ ska tolkas som 1 då $\omega = 0$. Parsevals formel, $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2\,d\omega$, ger nu att

$$\int_{-1}^{1} |1|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2\sin\omega}{\omega}\right|^2 d\omega.$$

Eftersom vänsterledets värde är 2 får vi resultatet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega = \pi.$$

8.9 Exempel Antag att u är en kontinuerligt deriverbar funktion som tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och som är sådan att derivatan u' tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Vi visar att det då för alla $R > 0$ gäller att

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \right| \le \frac{\|u'\|_2}{\sqrt{\pi R}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Låt $R > 0$. Fouriers inversionsformel (7.11) ger att

$$\begin{aligned} u(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega &= \lim_{S\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-S}^{S} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \\ &= \lim_{S\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{R\le|\omega|\le S} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

För att uppskatta den sista integralen använder vi Cauchy–Schwarz olikhet (se sats 5.8) och Parsevals formel (8.7), och att $i\omega\hat{u}(\omega) = (u')\hat{}(\omega)$ för alla $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{R\le|\omega|\le S} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} e^{i\omega t}/i\omega, & R \le |\omega| \le S \\ 0, & \text{annars} \end{Bmatrix} i\omega\hat{u}(\omega)\,d\omega\right| \\ &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} 1/\omega^2, & R \le |\omega| \le S \\ 0, & \text{annars} \end{Bmatrix} d\omega\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |(u')\hat{}(\omega)|^2\,d\omega\right)^{1/2} \\ &= \left(2\int_{R}^{S} \frac{1}{\omega^2}\,d\omega\right)^{1/2} \left(2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |u'(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\ &= 2\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{S}\right)^{1/2} \|u'\|_2, \quad S > R,\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Eftersom denna uppskattning gäller för alla $S > R$ får vi att

$$\left| u(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \right| \le \frac{1}{2\pi}2\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{R}\right)^{1/2} \|u'\|_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

vilket är vad vi ville visa.

Ett svängningsproblem

Vi ska nu använda teorin för fouriertransformen för att lösa följande system av ekvationer, som beskriver svängningar hos en oändligt lång elastisk tråd:

$$\begin{cases} u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, & x, t \in \mathbb{R}, & \text{(DE)} \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, & \text{(B1)} \\ u'_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. & \text{(B2)} \end{cases}$$

Här är c en positiv konstant och f och g är givna funktioner. Den sökta funktionen $u(x,t)$ beskriver trådens avvikelse från sitt jämviktsläge vid positionen x och tidpunkten t.

Den partiella differentialekvationen (DE) är den endimensionella *vågekvationen*, som är en modell för vågutbredning i en dimension. Konstanten c är hastigheten med vilken vågor utbreder sig längs tråden, som vi ska se. Trådens initiala tillstånd beskrivs av de två begynnelsevillkoren (B1) och (B2): vid positionen x och tidpunkten $t = 0$ ges trådens avvikelse från sitt jämviktsläge av $f(x)$ och dess hastighet av $g(x)$.

Vårt svängningsproblem är alltså att uttrycka $u(x,t)$ med hjälp av c, $f(x)$ och $g(x)$.

8.10 Lösning av svängningsproblemet Metoden vi använder för att lösa problemet är att fouriertransformera (DE), (B1) och (B2), lösa det transformerade problemet och sedan inverstransformera dess lösning.

Vi kommer att räkna helt formellt och vi börjar med att sätta

$$U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x}\, dx, \quad \omega, t \in \mathbb{R},$$

vilket är u:s fouriertransform med avseende på variabeln x. Vi härleder nu det system av ekvationer som funktionen $U(\omega, t)$ uppfyller.

Transformen (det vill säga fouriertransformen med avseende på variabeln x) av vänsterledet av (DE) är

$$\int_{-\infty}^{\infty} u''_{tt}(x,t) e^{-i\omega x}\, dx = U''_{tt}(\omega, t),$$

där vi antagit att funktionen $U(\omega, t)$ kan deriveras två gånger med avseende på t under integraltecknet.

Högerledet av (DE) har transformen

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^2 u''_{xx}(x,t) e^{-i\omega x}\, dx = (-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} c^2 u(x,t) e^{-i\omega x} (-i\omega)^2\, dx = -\omega^2 c^2 U(\omega, t),$$

där vi partialintegrerat två gånger och antagit att de utintegrerade delarna är lika med noll (vilket fysikaliskt sett inte är något orimligt antagande).

Vidare ges transformerna av vänsterleden av (B1) och (B2) av

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-i\omega x}\, dx = U(\omega, 0),$$

respektive

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'_t(x,0) e^{-i\omega x}\, dx = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x}\, dx = U'_t(\omega, 0).$$

Vi har alltså att det transformerade problemet är

$$\begin{cases} U''_{tt} = -\omega^2 c^2 U, & \omega, t \in \mathbb{R}, \\ U(\omega, 0) = F(\omega), & \omega \in \mathbb{R}, \\ U'_t(\omega, 0) = G(\omega), & \omega \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

där F och G är transformerna av f respektive g.

Ekvationen $U''_{tt} = -\omega^2 c^2 U$ är en ordinär differentialekvation i variabeln t, där vi kan se ω som en parameter. Den allmänna lösningen (då $\omega \neq 0$) är

$$U(\omega, t) = A(\omega) \cos \omega ct + B(\omega) \sin \omega ct,$$

där funktionerna $A(\omega)$ och $B(\omega)$ kan bestämmas med hjälp av att $U(\omega, 0) = F(\omega)$ och att $U'_t(\omega, 0) = G(\omega)$. Resultatet är att

$$U(\omega, t) = F(\omega) \cos \omega ct + \frac{G(\omega)}{\omega c} \sin \omega ct = \frac{1}{2}\big(e^{i\omega ct} + e^{-i\omega ct}\big) F(\omega) + \frac{\sin \omega ct}{\omega c} G(\omega),$$

vilket vi nu ska inverstransformera.

För $t > 0$ är funktionen $(\sin \omega ct)/\omega c$ enligt tabell fouriertransformen (med avseende på x) av funktionen

$$h(x) = \frac{1}{2c} \begin{Bmatrix} 1, & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{Bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

så enligt sats 7.4 (g) och sats 8.1 har vi att

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\big(f(x + ct) + f(x - ct)\big) + \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi) g(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Fallet $t < 0$ behandlas på motsvarande sätt, och sammanfattningsvis får vi:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x - ct}^{x + ct} g(\xi)\, d\xi, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Detta resultat kallas *d'Alemberts formel*. Eftersom vi ovan räknat helt formellt är frågan nu om en funktion $u(x, t)$ given av denna formel är en lösning till svängningsproblemet. Hellre än att försöka rättfärdiga de formella räkningarna kan detta undersökas genom direkt insättning. Om man till exempel antar att $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ och $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ så får man att funktionen $u(x, t)$ given av d'Alemberts formel uppfyller ekvationerna (DE), (B1) och (B2) och alltså verkligen är en lösning till vårt svängningsproblem.

Övningar

8A Bestäm en lösning u till integralekvationen $u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-r|} u(r)\, dr = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

8B Låt $u(t) = 2 - |t|$ då $|t| \le 2$ och $u(t) = 0$ då $|t| > 2$. Bestäm fouriertransformen av u och använd resultatet för att beräkna värdena på integralerna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2}\, d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \omega}{\omega^4}\, d\omega \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 \omega}{\omega^3}\, d\omega.$$

8C Bestäm genom formella räkningar (som i 8.10) en lösning till värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u_t' = u_{xx}'', & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

där funktionen $f(x)$ är given.

8D Bestäm en lösning u till integralekvationen $\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-r)} u(r)\, dr = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

8E Låt $u(t) = \chi(t+1) - \chi(t-1)$ för $t \in \mathbb{R}$ och sätt $u_n = u * u * \ldots * u$ (n faktorer). Bestäm värdet av integralen $\int_{-\infty}^{\infty} u_n(t)\, dt$.

∗8F Bestäm en lösning u till ekvationen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|r|} u(t-r)\, dr = e^{-|t|} + |t| e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

∗8G Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är kontinuerliga och sådana att $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Detta medför att $\hat{\hat{u}} = 2\pi \check{u}$ och att $\hat{\hat{v}} = 2\pi \check{v}$ (sats 7.15), vilket ger att u och v är begränsade, och det följer nu att $uv \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Visa att $\hat{u} * \hat{v} = 2\pi \widehat{uv}$.

∗8H Bestäm en funktion $u(t)$ som har fouriertransform $\hat{u}(\omega) = 8i(\sin^3 \omega)/\omega^2$.

∗∗8I Kontrollera genom insättning att funktionen $u(x,t)$ given av d'Alemberts formel

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

där $c > 0$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ och $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, är en lösning till svängningsproblemet

$$\begin{cases} u_{tt}'' = c^2 u_{xx}'', & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t'(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

∗∗8J Låt $T > 0$ och sätt $\Omega = 2\pi/T$. Bevisa *Poissons summationsformel*:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\varphi(nT), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Föreläsning 9

Fouriertransform och distributioner

Definitionen av fouriertransform i 7.1 kräver att funktionen som transformeras ligger i rummet $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, vilket är ett alltför starkt krav i många tillämpningar. Man vill kunna använda transformmetoder också när impulser av olika slag eller funktioner som inte är integrerbara är inblandade. Vi ska därför, med följande sats som utgångspunkt, utvidga definitionen av fouriertransform så att detta blir möjligt.

9.1 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Då gäller att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\hat{\varphi}(t)\,dt.$$

Bevis Eftersom $u, \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ger sats 7.8 att $\hat{u}$ och $\hat{\varphi}$ är kontinuerliga och begränsade, så produkterna $\hat{u}\varphi$ och $u\hat{\varphi}$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Vi får att

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i\omega t}\,dt\right)\varphi(\omega)\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\hat{\varphi}(t)\,dt,\end{aligned}$$

där bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom $u, \varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. □

Fouriertransformen $\hat{u}$ av en distribution u bör alltså enligt sats 9.1 definieras genom formeln $\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle$. Ett viktigt faktum är nu att rummet $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ av testfunktioner *inte* är slutet under fouriertransform, det vill säga: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ medför *inte* att $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Det följer att högerledet $\langle u, \hat{\varphi}\rangle$ i formeln inte är väldefinierat för alla $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, så fouriertransformen kan inte definieras som en operation på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Detta motiverar att vi inför rummet av schwartztestfunktioner nedan, som *är* slutet under fouriertransform. Fouriertransformen kan sedan definieras som en operation på motsvarande, så kallade *tempererade*, distributioner.

Tempererade distributioner

9.2 Rummet $\mathcal{S}$ av schwartztestfunktioner Vi kallar en funktion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sådan att

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k \varphi^{(l)}(t)| < \infty, \quad k, l \in \mathbb{N},$$

för en *schwartztestfunktion* (eller en funktion i *schwartzklassen*). Man säger att φ och alla dess derivator är *snabbt avtagande*. Till exempel är funktionen $\varphi(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, en schwartztestfunktion.

Vi låter $\mathcal{S}$ beteckna mängden av alla schwartztestfunktioner. Det följer att $\mathcal{S}$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, och att funktionerna $t\varphi(t)$ och $\varphi'(t)$ tillhör $\mathcal{S}$ om $\varphi \in \mathcal{S}$. Man säger att rummet $\mathcal{S}$ är *slutet* under multiplikation med t och under derivering.

Det konvergensbegrepp som på ett naturligt sätt hör ihop med rummet $\mathcal{S}$ definieras på följande sätt: om $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, så sägs följden φ_n *konvergera mot* φ *i* $\mathcal{S}$ om det för alla $k, l \in \mathbb{N}$ gäller att

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k(\varphi_n - \varphi)^{(l)}(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

De linjära avbildningarna $\varphi \mapsto t\varphi$ och $\varphi \mapsto \varphi'$ på $\mathcal{S}$ blir med detta konvergensbegrepp kontinuerliga, det vill säga, om $\varphi_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd sådan att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{S}$ så följer att $t\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{S}$ och att $\varphi_n' \to 0$ i $\mathcal{S}$.

Testfunktioner i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ är oändligt deriverbara och har kompakt stöd, så $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ är ett linjärt underrum av $\mathcal{S}$, och av definitionerna följer att om $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd sådan att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (se 1.13) så gäller att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{S}$. Man säger att $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}$ är en *kontinuerlig inklusion*.

9.3 Sats *Antag att $\varphi \in \mathcal{S}$. Då finns en följd φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, av testfunktioner i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sådan att $\varphi_n \to \varphi$ i $\mathcal{S}$. (Man säger att $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ är tätt i $\mathcal{S}$.)*

Bevis Låt $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara sådan att $\rho(t) = 1$ då $|t| \le 1$ och sådan att $0 \le \rho \le 1$, sätt $\rho_n(t) = \rho(t/n)$ för $t \in \mathbb{R}$ och $n = 1, 2, \ldots$, och sätt $\varphi_n = \rho_n\varphi$ för $n = 1, 2, \ldots$. Då gäller att $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ för $n = 1, 2, \ldots$.

Låt $k, l \in \mathbb{N}$. Eftersom $(\varphi_n - \varphi)(t) = (\rho_n(t) - 1)\varphi(t)$ ger upprepad derivering att

$$t^k(\varphi_n - \varphi)^{(l)}(t) = (\rho_n(t) - 1)t^k\varphi^{(l)}(t) + \sum_{m=1}^{l} \binom{l}{m} \frac{1}{n^m} \rho^{(m)}(t/n)t^k\varphi^{(l-m)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $\rho_n(t) = 1$ då $|t| \le n$ och $0 \le \rho_n \le 1$ har vi att

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \big|(\rho_n(t) - 1)t^k\varphi^{(l)}(t)\big| \le \sup_{|t|\ge n} |t^k\varphi^{(l)}(t)| \le \frac{1}{n} \sup_{|t|\ge n} |t^{k+1}\varphi^{(l)}(t)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

och för $m = 1, \ldots, l$ finns konstanter $C_m \ge 0$ sådana att $|\rho^{(m)}(t/n)t^k\varphi^{(l-m)}(t)| \le C_m$ för $t \in \mathbb{R}$ och $n \ge 1$. Det följer att $\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k(\varphi_n - \varphi)^{(l)}(t)| \to 0$ då $n \to \infty$, det vill säga att $\varphi_n \to \varphi$ i $\mathcal{S}$. □

9.4 Rummet $\mathcal{S}'$ av tempererade distributioner En *tempererad distribution* är en linjär funktion $u\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ som uppfyller följande kontinuitetsvillkor: det finns konstanter $C \ge 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att

$$|u(\varphi)| \le C \sum_{0\le k,l\le N} \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k\varphi^{(l)}(t)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Man kan visa, med samma teknik som i beviset av sats 1.16, att detta kontinuitetsvillkor för en linjär funktion $u\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ är ekvivalent med att $u(\varphi_n) \to 0$ då $n \to \infty$ för varje följd $\varphi_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, sådan att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{S}$. En tempererad distribution är alltså en kontinuerlig linjär funktional på rummet $\mathcal{S}$ av schwartztestfunktioner.

Mängden av alla tempererade distributioner betecknas $\mathcal{S}'$. För $u \in \mathcal{S}'$ och $\varphi \in \mathcal{S}$ betecknar vi värdet $u(\varphi)$ med $\langle u, \varphi\rangle$, och för $u, v \in \mathcal{S}'$ och $c \in \mathbb{C}$ definieras $u + v$ och cu genom $\langle u + v, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle + \langle v, \varphi\rangle$ och $\langle cu, \varphi\rangle = c\langle u, \varphi\rangle$, för $\varphi \in \mathcal{S}$. Det följer att $u + v$ och cu är tempererade distributioner, och att $\mathcal{S}'$, med dessa operationer, är ett linjärt rum.

Konvergens i rummet $\mathcal{S}'$ definieras på följande sätt: om $u, u_n \in \mathcal{S}'$, $n = 1, 2, \ldots$, så sägs följden u_n *konvergera mot* u *i* $\mathcal{S}'$ om $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{S}$.

9.5 $\mathcal{S}'$ som underrum av $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ Låt $u \in \mathcal{S}'$. Eftersom $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}$ och inklusionen är kontinuerlig kan vi definiera en distribution $u^{\mathcal{D}'} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ genom

$$\langle u^{\mathcal{D}'}, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Vi har alltså en naturlig avbildning $u \mapsto u^{\mathcal{D}'}$, som är linjär, från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Eftersom $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ är tätt i $\mathcal{S}$ (se sats 9.3) är u entydigt bestämd av $u^{\mathcal{D}'}$, ty om $\varphi \in \mathcal{S}$ så finns en följd φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sådan att $\varphi_n \to \varphi$ i $\mathcal{S}$, vilket ger att

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u, \varphi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u^{\mathcal{D}'}, \varphi_n \rangle.$$

Av det ovanstående följer att vi kan se $\mathcal{S}'$ som ett linjärt underrum av $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, närmare bestämt som värderummet för den linjära avbildningen $u \mapsto u^{\mathcal{D}'}$ från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Så med en *tempererad distribution* menar vi i fortsättningen antingen ett element i $\mathcal{S}'$, eller ett element i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som kan utvidgas till en kontinuerlig verkan på schwartztestfunktioner, det vill säga, som är lika med $u^{\mathcal{D}'}$ för något $u \in \mathcal{S}'$.

9.6 Definition och sats Antag att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Om den distribution $u_{\mathcal{D}'} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som ges av u är tempererad (se 1.17 och 9.5) så låter vi $u_{\mathcal{S}'} \in \mathcal{S}'$ beteckna dess utvidgning till en kontinuerlig verkan på schwartztestfunktioner, och säger att *u ger upphov till en tempererad distribution*. (Vi kommer dock ofta att, som för $u_{\mathcal{D}'}$, beteckna $u_{\mathcal{S}'}$ med u.)

Om det finns ett $k \in \mathbb{N}$ sådant att $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|/(1+|t|^k)\,dt < \infty$ så gäller att $u_{\mathcal{D}'}$ är tempererad och att $u_{\mathcal{S}'}$ ges av

$$\langle u_{\mathcal{S}'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Bevis Antag att $k \in \mathbb{N}$ är sådant att $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|/(1+|t|^k)\,dt = C < \infty$. Vi har då att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)\varphi(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(t)|}{1+|t|^k} \big|(1+|t|^k)\varphi(t)\big|\,dt \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(t)|}{1+|t|^k}\,dt\right) \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|(1+|t|^k)\varphi(t)\big|$$
$$\le C\big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^k\varphi(t)|\big), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

vilket visar att integralen $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)\,dt$ är absolutkonvergent för alla $\varphi \in \mathcal{S}$ och att verkan $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi(t)\,dt$, som överensstämmer med $u_{\mathcal{D}'}$ då $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, uppfyller det kontinuitetsvillkor som krävs av en tempererad distribution (se 9.4). □

9.7 Följdsats *Om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ har högst polynomiell tillväxt, eller om $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, eller om $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, så ger u upphov till en tempererad distribution.*

Bevis Villkoret i sats 9.6 är uppfyllt i vart och ett av fallen: om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ har högst polynomiell tillväxt, det vill säga om det finns konstanter $C \ge 0$ och $k \in \mathbb{N}$ sådana att

$$|u(t)| \le C(1+|t|^k), \quad t \in \mathbb{R},$$

så har vi att $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|/(1+|t|^{k+2})\,dt < \infty$. Vidare, om $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ så är $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\,dt < \infty$ per definition, och om $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ så har vi att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(t)|}{1+|t|}\,dt \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|t|)^2}\,dt\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,\|u\|_2 < \infty,$$

där vi använt Cauchy–Schwarz olikhet (se sats 5.8). □

9.8 Exempel Sätt $u(t) = e^t$ för $t \in \mathbb{R}$. Vi visar, genom ett motsägelsebevis, att u *inte* ger upphov till en tempererad distribution.

Låt först $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara en testfunktion vars stöd ligger i intervallet $[1, 2]$ och som är sådan att $\varphi \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = 1$. Sätt $\varphi_n(t) = \varphi(t/n)/n$ för $t \in \mathbb{R}$ och $n = 1, 2, \ldots$, och antag nu att $u_{\mathcal{D}'}$ är tempererad. Då uppfyller $u_{\mathcal{D}'}$ kontinuitetsvillkoret i 9.4 för alla testfunktioner i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, så det finns konstanter $C \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att

$$|\langle u_{\mathcal{D}'}, \varphi_n \rangle| \leq C \sum_{0 \leq k, l \leq N} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k \varphi_n^{(l)}(t)|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{$*$}$$

Detta ger dock en motsägelse, ty vänsterledet i $(*)$ växer exponentiellt i n, eftersom

$$|\langle u_{\mathcal{D}'}, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^t \varphi_n(t)\, dt \right| = \int_n^{2n} e^t \varphi_n(t)\, dt \geq e^n \int_n^{2n} \varphi_n(t)\, dt = e^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

och högerledet i $(*)$ växer inte fortare än ett polynom i n, eftersom

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k \varphi_n^{(l)}(t)| = \sup_{n \leq t \leq 2n} \left| t^k \varphi^{(l)}(t/n)/n^{l+1} \right| \leq (2n)^k n^{-l-1} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi^{(l)}(t)|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

där $0 \leq k, l \leq N$. Alltså är inte $u_{\mathcal{D}'}$ tempererad.

På samma sätt kan man visa, om $0 \neq a \in \mathbb{R}$, att funktionen e^{at} inte ger upphov till en tempererad distribution.

Huruvida en funktion $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ ger upphov till en tempererad distribution har alltså något att göra med ”hur fort u växer i oändligheten” (se dock övning 9I).

9.9 Diracimpulsen Som bekant definieras diracimpulsen $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ av $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Vi utvidgar diracimpulsen till schwartztestfunktioner genom att sätta

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Eftersom $|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$ för alla $\varphi \in \mathcal{S}$ följer av definitionen i 9.4 att diracimpulsen är en tempererad distribution.

9.10 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ har kompakt stöd. Då är u en tempererad distribution.*

Bevis Vi utvidgar u till schwartztestfunktioner genom att som i 2.26 sätta

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \rho\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

där $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är sådan att $\rho = 1$ i en omgivning av ett intervall som innehåller u:s stöd.

Låt K vara ett kompakt intervall som innehåller stödet för ρ. Vi får, bland annat med hjälp av kontinuitetsvillkoret för u (se 1.15), att det finns konstanter $C, D \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att

$$\begin{aligned} |\langle u, \varphi \rangle| = |\langle u, \rho\varphi \rangle| &\leq C \sum_{k=0}^{N} \sup_{t \in K} |(\rho\varphi)^{(k)}(t)| \leq C \sum_{k=0}^{N} \sup_{t \in K} \left| \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \rho^{(k-l)}(t) \varphi^{(l)}(t) \right| \\ &\leq C \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \sup_{t \in K} |\rho^{(k-l)}(t)| \sup_{t \in K} |\varphi^{(l)}(t)| \leq D \sum_{l=0}^{N} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi^{(l)}(t)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

vilket visar att u är en tempererad distribution. □

9.11 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'_T$ (se 6.1). Då är u en tempererad distribution.*

Bevis Vi har att $\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \rho\Phi\rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, där $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är en etta över en period och Φ är periodiseringen av φ, det vill säga, $\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t - nT)$ för $t \in \mathbb{R}$ (se beviset för sats 6.8). Vi visar nu att avbildningen $\varphi \mapsto \rho\Phi$ är linjär och kontinuerlig från $\mathcal{S}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, vilket medför att u är tempererad.

Låt $\varphi \in \mathcal{S}$. Definitionen i 9.2 ger att det finns en konstant C sådan att $|\varphi(t)| \le C/t^2$ då $t \neq 0$. Om K är ett kompakt intervall så följer att det finns en konstant D sådan att $|\varphi(t - nT)| \le D/n^2$ då $t \in K$ och $|n|$ är tillräckligt stort. Weierstrass majorantsats (A.14) ger nu att funktionsserien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(t - nT)$ är likformigt konvergent på varje kompakt intervall, så seriens summa Φ (periodiseringen av φ) är en väldefinierad funktion på $\mathbb{R}$.

På samma sätt får vi att funktionsserierna $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^{(l)}(t - nT)$, där $0 < l \in \mathbb{N}$, är likformigt konvergenta på varje kompakt intervall. Av sats A.10 följer att $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ och att $\Phi^{(l)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^{(l)}(t - nT)$. Så $\varphi \mapsto \rho\Phi$ är en avbildning från $\mathcal{S}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, och det följer från definitionen av Φ att $\varphi \mapsto \rho\Phi$ är linjär. För alla $l \in \mathbb{N}$ har vi nu att

$$\begin{aligned}
|\Phi^{(l)}(t)| &\le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi^{(l)}(t - nT)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (t - nT)^2} \big|(1 + (t - nT)^2)\varphi^{(l)}(t - nT)\big| \\
&\le \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (t - nT)^2} \right) \sup_{n \in \mathbb{Z}} \big|(1 + (t - nT)^2)\varphi^{(l)}(t - nT)\big| \\
&\le \left(2 + \frac{\pi}{T}\right) \big(\sup_{r \in \mathbb{R}} |\varphi^{(l)}(r)| + \sup_{r \in \mathbb{R}} |r^2 \varphi^{(l)}(r)|\big), \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Med hjälp av dessa uppskattningar följer att $\varphi \mapsto \rho\Phi$ är kontinuerlig från $\mathcal{S}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. □

9.12 Operationer på tempererade distributioner Vi har tidigare (se föreläsning 2) definierat vissa operationer på distributioner, nämligen derivering i 2.1, multiplikation med funktioner i 2.8, affina variabelbyten i 2.11 och konjugering i 2.13.

För distributioner i $\mathcal{S}'$ definieras dessa operationer genom precis samma formler som där (men med $\varphi \in \mathcal{S}$), och det följer att operationerna $u \mapsto u'$, $u \mapsto u(at + b)$ och $u \mapsto \overline{u}$ är linjära (konjugering är konjugatlinjär) och kontinuerliga på $\mathcal{S}'$. Vissa ytterligare krav måste dock ställas på en funktion f, förutom att $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, för att $u \mapsto fu$ ska ge en väldefinierad operation på $\mathcal{S}'$.

Med en *multiplikator på* $\mathcal{S}'$ menar vi en funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ sådan att varje derivata av f har högst polynomiell tillväxt, det vill säga, sådan att det för varje $l \in \mathbb{N}$ finns konstanter $C_l \ge 0$ och $k_l \in \mathbb{N}$ sådana att

$$|f^{(l)}(t)| \le C_l(1 + |t|^{k_l}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Om f uppfyller dessa villkor så är $\varphi \mapsto f\varphi$ en linjär och kontinuerlig avbildning på $\mathcal{S}$, vilket medför att $fu \in \mathcal{S}'$ om $u \in \mathcal{S}'$. Det följer att $u \mapsto fu$ är en linjär och kontinuerlig operation på $\mathcal{S}'$ om f är en multiplikator på $\mathcal{S}'$.

Notera att vi som en följd av det ovanstående får att om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ är tempererad så är u', fu (där f är en multiplikator på $\mathcal{S}'$), $u(at + b)$ och $\overline{u}$ också tempererade.

9.13 Exempel Vi visar att distributionen $\underline{t}^{-1}$ (se 2.20) är tempererad.

Vi har per definition att $\underline{t}^{-1} = (u_{\mathcal{D}'})'$, där funktionen u ges av $u(t) = \ln|t|$ då $t \neq 0$. Eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|/(1 + |t|^2)\, dt < \infty$ ger sats 9.6 att $u_{\mathcal{D}'}$ är en tempererad distribution, vilket enligt 9.12 medför att $(u_{\mathcal{D}'})'$ är tempererad. Alltså är $\underline{t}^{-1}$ tempererad.

Fouriertransform av tempererade distributioner

Det är resultaten i följande sats som är det huvudsakliga skälet till att vi intresserar oss för rummet $\mathcal{S}$ av schwartztestfunktioner.

9.14 Sats *Fouriertransformen $\mathscr{F}$ avbildar $\mathcal{S}$ på $\mathcal{S}$, och avbildningen $\mathscr{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ är linjär, inverterbar och kontinuerlig.*

Bevis Om $\varphi \in \mathcal{S}$ så har vi att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\big|(1+t^2)\varphi(t)\big|\,dt \le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) \sup_{t\in\mathbb{R}} \big|(1+t^2)\varphi(t)\big|$$
$$\le \pi\big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^2\varphi(t)|\big).$$

Av denna uppskattning följer att $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så fouriertransformen är väldefinierad på rummet $\mathcal{S}$ av schwartztestfunktioner. Uppskattningen ger också att $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ är en kontinuerlig inklusion.

Låt nu $\varphi \in \mathcal{S}$. Eftersom rummet $\mathcal{S}$ är slutet under multiplikation med t har vi att funktionen $t^k\varphi(t)$ tillhör $\mathcal{S}$, och därmed $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, för alla $k \in \mathbb{N}$. Detta ger att $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ enligt sats 7.10. Rummet $\mathcal{S}$ är också slutet under derivering, så för alla $k, l \in \mathbb{N}$ har vi att funktionen $i^{-k-l}(t^l\varphi)^{(k)}(t)$ tillhör $\mathcal{S}$, och därmed $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dess fouriertransform är funktionen $\omega^k\hat{\varphi}^{(l)}(\omega)$, som enligt sats 7.8 är begränsad. Detta visar att $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Fouriertransformen $\mathscr{F}$ är alltså en linjär avbildning från $\mathcal{S}$ till $\mathcal{S}$. Om $\varphi \in \mathcal{S}$ och vi definierar $\psi \in \mathcal{S}$ genom $\psi(\omega) = \hat{\varphi}(-\omega)/2\pi$, $\omega \in \mathbb{R}$, så ger Fouriers inversionsformel (7.11) att $\varphi = \hat{\psi}$. Detta medför att $\mathscr{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ är en inverterbar avbildning, det vill säga att den är både injektiv (vilket betyder att om $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ är sådana att $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$ så är $\varphi = \psi$) och surjektiv (vilket betyder att det för varje $\varphi \in \mathcal{S}$ finns ett $\psi \in \mathcal{S}$ sådant att $\varphi = \hat{\psi}$).

För att visa att $\mathscr{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ är kontinuerlig låter vi $\varphi_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2, \ldots$, vara en följd sådan att $\varphi_n \to 0$ i $\mathcal{S}$. För alla $k, l \in \mathbb{N}$ följer av det ovanstående och sats 7.8 att den sammansatta avbildningen

$$\varphi \in \mathcal{S} \longmapsto i^{-k-l}(t^l\varphi)^{(k)}(t) \in \mathcal{S} \longmapsto i^{-k-l}(t^l\varphi)^{(k)}(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \xmapsto{\mathscr{F}} \omega^k\hat{\varphi}^{(l)}(\omega) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$$

är kontinuerlig, så $\sup_{\omega\in\mathbb{R}} |\omega^k\widehat{\varphi_n}^{(l)}(\omega)| \to 0$ då $n \to \infty$. Detta visar att $\widehat{\varphi_n} \to 0$ i $\mathcal{S}$ och därmed att $\mathscr{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ är kontinuerlig. □

Vi kan nu ge en definition av fouriertransformen för tempererade distributioner.

9.15 Definition För en tempererad distribution $u \in \mathcal{S}'$ definieras u:s *fouriertransform*, betecknad $\hat{u}$ eller $\mathscr{F}u$, som den tempererade distribution som ges av

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Att $\hat{u}$ verkligen tillhör $\mathcal{S}'$ visar vi i sats 9.18.

För en funktion $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ som ger upphov till en tempererad distribution (se 9.6) kallar vi $\mathscr{F}(u_{\mathcal{S}'})$ för *fouriertransformen av u i distributionsmening* (om $u \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ så kan vi utelämna preciseringen "i distributionsmening"). För funktioner i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ följer av sats 9.1 att de två definitionerna av fouriertransform (9.15 och 7.1) stämmer överens, det vill säga, $\mathscr{F}(u_{\mathcal{S}'}) = (\mathscr{F}u)_{\mathcal{S}'}$ om $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

9.16 Exempel Vi beräknar fouriertransformen av diracimpulsen $\delta(t)$.

Definition 9.15 ger att

$$\big\langle \hat{\delta}(\omega), \varphi(\omega)\big\rangle = \big\langle \delta(t), \hat{\varphi}(t)\big\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega 0}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\, d\omega$$
$$= \big\langle 1(\omega), \varphi(\omega)\big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

där $1(\omega)$ betecknar den konstanta funktion som har värdet 1 för alla $\omega \in \mathbb{R}$. Vi har här skrivit ut variabelnamnen t och ω, vilket ofta har en klargörande effekt i denna typ av beräkningar. Fouriertransformen av $\delta(t)$ är alltså den tempererade distribution som ges av funktionen $1(\omega)$, eller kortare uttryckt: $\hat{\delta} = 1$.

9.17 Exempel Vi beräknar fouriertransformen i distributionsmening av den konstanta funktionen $1(t)$, det vill säga den funktion som har värdet 1 för alla $t \in \mathbb{R}$.

Notera att funktionen $1(t)$ inte tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så vi kan inte använda definition 7.1 för att beräkna dess fouriertransform (integralen $\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-i\omega t}\, dt$ är divergent för alla $\omega \in \mathbb{R}$).

Definition 9.15 och Fouriers inversionsformel (7.11) ger att

$$\big\langle \hat{1}(\omega), \varphi(\omega)\big\rangle = \big\langle 1(t), \hat{\varphi}(t)\big\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t)\, dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(t) e^{i0t}\, dt = 2\pi\varphi(0)$$
$$= 2\pi \big\langle \delta(\omega), \varphi(\omega)\big\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Fouriertransformen av funktionen $1(t)$ är alltså $2\pi\delta(\omega)$, eller kortare uttryckt: $\hat{1} = 2\pi\delta$.

9.18 Sats *Fouriertransformen $\mathscr{F}$ avbildar $\mathcal{S}'$ på $\mathcal{S}'$, och avbildningen $\mathscr{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ är linjär, inverterbar och kontinuerlig.*

Bevis I detta bevis låter vi F beteckna fouriertransformen från $\mathcal{S}$ till $\mathcal{S}$, som enligt sats 9.14 är linjär, inverterbar och kontinuerlig. Fouriers inversionsformel (7.11) medför att $F^{-1}\varphi = F\check{\varphi}/2\pi$ för alla $\varphi \in \mathcal{S}$, så även F^{-1} är linjär och kontinuerlig.

Låt $u \in \mathcal{S}'$. Definition 9.15 säger att $(\mathscr{F}u)(\varphi) = u(F\varphi)$ för alla $\varphi \in \mathcal{S}$, så vi har att $\mathscr{F}u = u \circ F$ (där tecknet $\circ$ betecknar sammansättning av funktioner). Eftersom F och u är linjära och kontinuerliga följer att $\mathscr{F}u$ är linjär och kontinuerlig, så $\mathscr{F}u \in \mathcal{S}'$.

Fouriertransformen är alltså en avbildning från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{S}'$. För att visa att $\mathscr{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ är linjär låter vi $u, v \in \mathcal{S}'$ och $c \in \mathbb{C}$. Då har vi för alla $\varphi \in \mathcal{S}$ att

$$\langle (u+v)\hat{}, \varphi\rangle = \langle u+v, \hat{\varphi}\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle + \langle v, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{u}, \varphi\rangle + \langle \hat{v}, \varphi\rangle = \langle \hat{u} + \hat{v}, \varphi\rangle,$$

och att

$$\langle (cu)\hat{}, \varphi\rangle = \langle cu, \hat{\varphi}\rangle = c\langle u, \hat{\varphi}\rangle = c\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle c\hat{u}, \varphi\rangle,$$

vilket visar att $\mathscr{F}(u+v) = \mathscr{F}u + \mathscr{F}v$ och att $\mathscr{F}(cu) = c\mathscr{F}u$.

Om $u, v \in \mathcal{S}'$ är sådana att $\mathscr{F}u = \mathscr{F}v$, det vill säga sådana att $u \circ F = v \circ F$, så följer att $u \circ F \circ F^{-1} = v \circ F \circ F^{-1}$ och därmed att $u = v$. Alltså är $\mathscr{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ injektiv. Om vi för ett godtyckligt $v \in \mathcal{S}'$ sätter $u = v \circ F^{-1}$ så följer att $u \in \mathcal{S}'$ och vi får att $\mathscr{F}u = u \circ F = v \circ F^{-1} \circ F = v$, så $\mathscr{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ är också surjektiv och därmed inverterbar.

Om $u, u_n \in \mathcal{S}'$, $n = 1, 2, \ldots$, är sådana att $u_n \to u$ i $\mathcal{S}'$ så har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \langle \widehat{u_n}, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \hat{\varphi}\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{u}, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

det vill säga att $\mathscr{F}u_n \to \mathscr{F}u$ i $\mathcal{S}'$. Detta visar att $\mathscr{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ är kontinuerlig. $\square$

9.19 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ har kompakt stöd. Då ges u:s fouriertransform $\hat{u}$ av funktionen $U(\omega) = \langle u(t), e^{-i\omega t}\rangle$, $\omega \in \mathbb{R}$, som är en multiplikator på $\mathcal{S}'$ (se 9.12).*

Funktionen U definieras genom $U(\omega) = \langle u(t), \rho(t)e^{-i\omega t}\rangle$, $\omega \in \mathbb{R}$ (i enlighet med 2.26), där $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är sådan att $\rho = 1$ i en omgivning av ett intervall som innehåller u:s stöd.

Bevis Vi visar först att funktionen U är en multiplikator på $\mathcal{S}'$. Med samma teknik som vi använde i beviset av sats 3.13 kan man visa att $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, och att U:s derivator ges av $U^{(l)}(\omega) = \langle u(t), \rho(t)(-it)^l e^{-i\omega t}\rangle$ för $\omega \in \mathbb{R}$ och $l \in \mathbb{N}$. Låt nu K vara ett kompakt intervall som innehåller stödet för ρ. Av kontinuitetsvillkoret för u får vi att det finns konstanter $C \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att det för $l \in \mathbb{N}$ gäller att

$$|U^{(l)}(\omega)| = \big|\langle u(t), \rho(t)(-it)^l e^{-i\omega t}\rangle\big| \leq C \sum_{k=0}^{N} \sup_{t\in K} \big|\big(\rho(t)(-it)^l e^{-i\omega t}\big)^{(k)}\big|, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Det följer att U är en multiplikator på $\mathcal{S}'$, eftersom det sista ledet ovan är mindre än ett polynom i $|\omega|$ av grad N.

Funktionen U ger upphov till en tempererad distribution enligt följdsats 9.7, och u är en tempererad distribution enligt sats 9.10. För att visa att $\hat{u} = U_{\mathcal{S}'}$ räcker det att visa att $\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle U_{\mathcal{S}'}, \varphi\rangle$ för alla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (se 9.5).

Låt alltså $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Vi har att

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle = \langle u, \rho\hat{\varphi}\rangle = \left\langle u(t),\, \rho(t)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega \right\rangle, \tag{$*$}$$

och att

$$\langle U_{\mathcal{S}'}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\varphi(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(t), \rho(t)e^{-i\omega t}\rangle\varphi(\omega)\, d\omega. \tag{$**$}$$

Om man "byter integrationsordning" i högerledet av $(*)$ så får man högerledet av $(**)$.

Vi visar att detta är tillåtet genom att approximera integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega$ med riemannsummorna

$$\hat{\varphi}_n(t) = \sum_{k=-bn}^{bn-1} \varphi(k/n)e^{-i(k/n)t}\,\frac{1}{n}, \quad t \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots,$$

där $b \in \mathbb{N}$ är valt så att stödet för φ ligger i intervallet $[-b, b]$. För $l \in \mathbb{N}$ ger rättframma uppskattningar, utgående från att det för $t \in \mathbb{R}$ och $n = 1, 2, \ldots$ gäller att

$$\hat{\varphi}^{(l)}(t) - \hat{\varphi}_n^{(l)}(t) = \sum_{k=-bn}^{bn-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \big(\varphi(\omega)(-i\omega)^l e^{-i\omega t} - \varphi(k/n)(-ik/n)^l e^{-i(k/n)t}\big)\, d\omega,$$

att $\hat{\varphi}_n^{(l)} \to \hat{\varphi}^{(l)}$ likformigt på K. Detta medför att $\rho\hat{\varphi}_n \to \rho\hat{\varphi}$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, och vi får nu att

$$\begin{aligned}\left\langle u(t),\, \rho(t)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega \right\rangle &= \lim_{n\to\infty} \left\langle u(t),\, \rho(t) \sum_{k=-bn}^{bn-1} \varphi(k/n)e^{-i(k/n)t}\,\frac{1}{n} \right\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-bn}^{bn-1} \big\langle u(t), \rho(t)e^{-i(k/n)t}\big\rangle \varphi(k/n)\,\frac{1}{n} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(t), \rho(t)e^{-i\omega t}\rangle\varphi(\omega)\, d\omega,\end{aligned}$$

där likheterna i tur och ordning följer av att $\rho\hat{\varphi}_n \to \rho\hat{\varphi}$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, att u är linjär, och att integralen i sista ledet är gränsvärdet av sina riemannsummor i näst sista ledet. $\square$

9.20 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'_T$ och låt $c_n = (\mathscr{F}_T u)(n)$, där $n \in \mathbb{Z}$, vara fourierkoefficienterna för u (se 6.5). Då gäller att*

$$\hat{u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta_{n\Omega}.$$

Bevis Enligt sats 6.8 gäller att $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}$, så vi har att $S_N u \to u$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, där $S_N u = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t}$ är den N:te symmetriska delsumman till u:s fourierserie. Sats 9.11 ger att u och $S_N u$ (sedd som distribution) är tempererade distributioner. Vi får nu för varje schwartztestfunktion $\varphi \in \mathcal{S}$ att

$$\lim_{N\to\infty} \langle S_N u, \varphi\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle S_N u, \rho\Phi\rangle = \langle u, \rho\Phi\rangle = \langle u, \varphi\rangle,$$

där $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är en etta över en period och Φ är periodiseringen av φ (se beviset för sats 9.11). Alltså gäller att $S_N u \to u$ i $\mathcal{S}'$.

Tillsammans med att fouriertransformen är linjär och kontinuerlig på $\mathcal{S}'$ ger detta att fourierserien för u kan fouriertransformeras term för term, så vi får att

$$\hat{u} = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\Omega t}\Big)\hat{} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \big(e^{in\Omega t}\big)\hat{} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2\pi\delta(\omega - n\Omega),$$

där vi i sista steget använt exempel 9.17 och sats 9.21 (g) nedan. □

Räkneregler

9.21 Sats *Räknereglerna för fouriertransformen, sats 7.4 (a)–(i), gäller om $u, v \in \mathcal{S}'$.*

Bevis Reglerna (a) och (b) (att fouriertransformen är linjär) visade vi i beviset för sats 9.18. Vi visar nedan (g) och (h), om fouriertransformerna av $e^{iat}u(t)$ respektive $u'(t)$. Resten av bevisen följer samma mönster.

(g) Antag att $u \in \mathcal{S}'$ och att $a \in \mathbb{R}$. För alla $\varphi \in \mathcal{S}$ har vi att

$$\begin{aligned}\big\langle \big(e^{iat}u(t)\big)\hat{}(\omega), \varphi(\omega)\big\rangle &= \big\langle e^{iat}u(t), \hat{\varphi}(t)\big\rangle = \big\langle u(t), e^{iat}\hat{\varphi}(t)\big\rangle \\ &= \big\langle u(t), \big(\varphi(\omega+a)\big)\hat{}(t)\big\rangle = \big\langle \hat{u}(\omega), \varphi(\omega+a)\big\rangle = \big\langle \hat{u}(\omega-a), \varphi(\omega)\big\rangle,\end{aligned}$$

där likheten $e^{iat}\hat{\varphi}(t) = \big(\varphi(\omega+a)\big)\hat{}(t)$ följer av sats 7.4 (f) (använd med t och ω ombytta), eller alternativt av räkningen

$$\begin{aligned}e^{iat}\hat{\varphi}(t) &= e^{iat}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i(\omega-a)t}\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega+a)e^{-i\omega t}\,d\omega = \big(\varphi(\omega+a)\big)\hat{}(t), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Fouriertransformen av $e^{iat}u(t)$ är alltså $\hat{u}(\omega - a)$.

(h) Antag att $u \in \mathcal{S}'$. För alla $\varphi \in \mathcal{S}$ har vi att

$$\begin{aligned}\big\langle (u')\hat{}(\omega), \varphi(\omega)\big\rangle &= \big\langle u'(t), \hat{\varphi}(t)\big\rangle = -\big\langle u(t), \hat{\varphi}'(t)\big\rangle \\ &= -\big\langle u(t), -\big(i\omega\varphi(\omega)\big)\hat{}(t)\big\rangle = \big\langle \hat{u}(\omega), i\omega\varphi(\omega)\big\rangle = \big\langle i\omega\hat{u}(\omega), \varphi(\omega)\big\rangle,\end{aligned}$$

där likheten $\hat{\varphi}'(t) = -\big(i\omega\varphi(\omega)\big)\hat{}(t)$ följer av sats 7.4 (i). Detta visar att fouriertransformen av $u'(t)$ är $i\omega\hat{u}(\omega)$. □

9.22 Exempel Vi beräknar fouriertransformen av signumfunktionen sgn, som ges av

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

("Fouriertransformen" betyder här "fouriertransformen i distributionsmening" eftersom funktionen sgn inte tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.)

Vi har att $\operatorname{sgn}' = 2\delta$, till exempel genom sats 2.5, och fouriertransformering av denna likhet ger att $(\operatorname{sgn}')\hat{} = 2\hat{\delta}$. Enligt sats 9.21 (h) och exempel 9.16 får vi att

$$i\omega\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) = 2.$$

Eftersom $2 = 2\omega\underline{\omega}^{-1}$ kan ekvationen skrivas $\omega\big(\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) + 2i\underline{\omega}^{-1}\big) = 0$, så sats 2.17 ger att

$$\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) + 2i\underline{\omega}^{-1} = C\delta(\omega)$$

för någon konstant $C \in \mathbb{C}$.

Värdet på C kan här bestämmas på följande sätt: sgn är udda och fouriertransformen är paritetsbevarande, så $\widehat{\operatorname{sgn}}$ är udda. Vidare är $\underline{\omega}^{-1}$ udda eftersom den är derivatan av den jämna funktionen $\ln|\omega|$. Vänsterledet i likheten ovan är alltså udda, och i högerledet är diracimpulsen $\delta(\omega)$ jämn, så C måste vara 0. (Enbart 0 är både jämn och udda.)

Fouriertransformen av funktionen $\operatorname{sgn} t$ är alltså lika med $-2i\underline{\omega}^{-1}$.

Givet en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter kan fouriertransformen användas för att bestämma de tempererade distributioner som löser ekvationen.

9.23 Exempel Vi bestämmer alla lösningar y i $\mathcal{S}'$ och i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + y = \delta.$$

Vi använder först fouriertransformen för att bestämma de $y \in \mathcal{S}'$ som löser ekvationen. Notera att följande ekvivalens gäller eftersom fouriertransformen är inverterbar på $\mathcal{S}'$:

$$y'' + 2y' + y = \delta, \quad y \in \mathcal{S}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad (i\omega)^2\hat{y} + 2i\omega\hat{y} + \hat{y} = 1, \quad \hat{y} \in \mathcal{S}'.$$

Den högra ekvationen kan skrivas $(1 + i\omega)^2\hat{y} = 1$, så vi får att

$$\hat{y} = \frac{1}{(1 + i\omega)^2}.$$

Detta ger, med Fouriers inversionsformel eller som i exempel 7.7, att

$$y = te^{-t}\chi(t),$$

vilket alltså är den lösning till differentialekvationen som tillhör $\mathcal{S}'$.

Den homogena ekvationen $y'' + 2y' + y = 0$ har lösningarna $y = (Ct + D)e^{-t}$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ enligt sats 2.16, där $C, D \in \mathbb{C}$ är godtyckliga konstanter. Dessa funktioner ger inte upphov till tempererade distributioner (utom då $C = D = 0$), så de dök inte upp i lösningsgången ovan. Vi fick dock fram partikulärlösningen $y = te^{-t}\chi(t)$, så alla lösningar i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ges av

$$y = te^{-t}\chi(t) + (Ct + D)e^{-t},$$

där $C, D \in \mathbb{C}$ är godtyckliga konstanter.

9.24 Exempel Vi bestämmer alla lösningar y i $\mathcal{S}'$ och i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen

$$y' + iy = \delta.$$

Fouriertransformering av ekvationen ger att

$$i\omega\hat{y} + i\hat{y} = 1,$$

så vi har att $(\omega + 1)\hat{y} = -i$. Denna ekvation har partikulärlösningen $-i\underline{(\omega + 1)}^{-1}$, så sats 2.17 medför att

$$\hat{y} = -i\underline{(\omega + 1)}^{-1} + C\delta_{-1},$$

där $C \in \mathbb{C}$ är en godtycklig konstant. För att inverstransformera högerledet noterar vi först att $\delta_{-1}(\omega) = \delta(\omega + 1)$. Exempel 9.17 och 9.22, och sats 9.21 (g), ger nu att

$$y = \frac{1}{2}e^{-it}\operatorname{sgn} t + \frac{C}{2\pi}e^{-it},$$

vilket alltså är de lösningar till differentialekvationen som tillhör $\mathcal{S}'$.

Den homogena ekvationen $y' + iy = 0$ har lösningarna $y = De^{-it}$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, där $D \in \mathbb{C}$ är en godtycklig konstant. Dessa funktioner ger upphov till tempererade distributioner, så de kommer med i lösningsgången ovan. Differentialekvationen $y' + iy = \delta$ har alltså samma lösningar i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som i $\mathcal{S}'$.

Faltning

Tempererade distributioner kan faltas med schwartztestfunktioner på samma sätt som distributioner i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ kan faltas med testfunktioner i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (se definition 3.11).

9.25 Definition Låt $u \in \mathcal{S}'$ vara en tempererad distribution och låt $\varphi \in \mathcal{S}$ vara en schwartztestfunktion. Vi definierar *faltningen* $u * \varphi$ som den funktion som ges av

$$(u * \varphi)(t) = \big\langle u(t - r), \varphi(r)\big\rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Som efter definition 3.11 noterar vi att $(u * \varphi)(t) = \langle u(r), \varphi(t - r)\rangle$, och att denna faltningsoperation är bilinjär och kommuterar med translationer.

9.26 Sats *Antag att $u \in \mathcal{S}'$ och att $\varphi \in \mathcal{S}$. Då gäller att $u * \varphi$ är en multiplikator på $\mathcal{S}'$ (se 9.12) och att $(u * \varphi)' = u * \varphi'$.*

Bevis Att $u * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ och att $(u * \varphi)^{(l)} = u * \varphi^{(l)}$ för $l \in \mathbb{N}$ kan visas på väsentligen samma sätt som vi bevisade sats 3.13. För att visa att $u * \varphi$ uppfyller tillväxtvillkoren för en multiplikator på $\mathcal{S}'$ använder vi kontinuitetsvillkoret för u: det finns konstanter $C \geq 0$ och $N \in \mathbb{N}$ sådana att det för alla $t \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\begin{aligned}|(u * \varphi)(t)| &= \big|\big\langle u(r), \varphi(t - r)\big\rangle\big| \leq C \sum_{0 \leq k, l \leq N} \sup_{r \in \mathbb{R}} \big|r^k(-1)^l\varphi^{(l)}(t - r)\big| \\ &= C \sum_{0 \leq k, l \leq N} \sup_{r \in \mathbb{R}} \big|(t - r)^k\varphi^{(l)}(r)\big| \leq C \sum_{0 \leq k, l \leq N} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} |t|^m \sup_{r \in \mathbb{R}} |r^{k-m}\varphi^{(l)}(r)|.\end{aligned}$$

Det sista ledet är ett polynom i $|t|$ av grad N (om $\varphi \neq 0$), så $u * \varphi$ har högst polynomiell tillväxt. För $l \geq 1$ får vi på samma sätt, eftersom $(u * \varphi)^{(l)} = u * \varphi^{(l)}$, att $(u * \varphi)^{(l)}$ är begränsad av ett polynom i $|t|$ av grad N, så $u * \varphi$ är en multiplikator på $\mathcal{S}'$. $\square$

9.27 Sats *Om $u \in \mathcal{S}'$ och $\varphi \in \mathcal{S}$ så gäller att $(u * \varphi)\hat{} = \hat{u}\hat{\varphi}$ och att $(u\varphi)\hat{} = \dfrac{1}{2\pi}\hat{u} * \hat{\varphi}$.*

Bevis Vi kommer att använda likheten $\langle u * \varphi, \psi\rangle = \langle u, \check{\varphi} * \psi\rangle$, som gäller för $u \in \mathcal{S}'$ och $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$. (Att $\check{\varphi} * \psi \in \mathcal{S}$ följer av att $(\check{\varphi} * \psi)\hat{} = \hat{\check{\varphi}}\hat{\psi} \in \mathcal{S}$.) Eftersom

$$\langle u * \varphi, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u * \varphi)(t)\psi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \big\langle u(r), \varphi(t-r)\big\rangle \psi(t)\,dt$$

och

$$\langle u, \check{\varphi} * \psi\rangle = \left\langle u(r), \int_{-\infty}^{\infty} \check{\varphi}(r-t)\psi(t)\,dt \right\rangle = \left\langle u(r), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-r)\psi(t)\,dt \right\rangle$$

kan likheten visas genom att ”byta integrationsordning” med hjälp av riemannsummor, på samma sätt som vi gjorde i beviset av sats 9.19.

Låt nu $u \in \mathcal{S}'$ och $\varphi \in \mathcal{S}$. Då har vi att $(u * \varphi)\hat{} = \hat{u}\hat{\varphi}$, eftersom

$$\langle (u * \varphi)\hat{}, \psi\rangle = \langle u * \varphi, \hat{\psi}\rangle = \langle u, \check{\varphi} * \hat{\psi}\rangle = \langle u, (\hat{\varphi}\psi)\hat{}\rangle = \langle \hat{u}, \hat{\varphi}\psi\rangle = \langle \hat{u}\hat{\varphi}, \psi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{S}.$$

Likhetstecknet i mitten följer av att $2\pi\check{\varphi} * \hat{\psi} = \hat{\check{\varphi}} * \hat{\psi} = 2\pi(\hat{\varphi}\psi)\hat{}$, där vi använt Fouriers inversionsformel (7.11) och resultatet i övning 8G.

Eftersom fouriertransformen är inverterbar på $\mathcal{S}'$ följer likheten $(u\varphi)\hat{} = (\hat{u} * \hat{\varphi})/2\pi$ nu av att

$$(\hat{u} * \hat{\varphi})\hat{} = \hat{\hat{u}}\hat{\hat{\varphi}} = (2\pi)^2\check{u}\check{\varphi} = (2\pi)^2(u\varphi)\check{} = 2\pi((u\varphi)\hat{})\hat{},$$

där vi bland annat använt att $\hat{\check{v}} = 2\pi\check{v}$ för alla $v \in \mathcal{S}'$. Att visa detta är övning 9F. □

Formeln $(u * v)\hat{} = \hat{u}\hat{v}$ gäller också då $u, v \in \mathcal{S}'$ och minst en av u och v har kompakt stöd (det följer då att $u * v \in \mathcal{S}'$). För ett bevis se till exempel [5].

9.28 Frekvensfunktionen för ett LTI-system Låt S vara ett LTI-system och antag att systemets impulssvar h är en *tempererad* distribution (se avsnittet om LTI-system). Då kallas fouriertransformen $\hat{h}$ av systemets impulssvar för systemets *frekvensfunktion* eller *överföringsfunktion*.

Låt nu $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vara en insignal till S. Utsignalen blir $y = Sx = h * x$, så det följer av sats 9.27 att vi har sambandet

$$\hat{y}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{x}(\omega)$$

mellan fouriertransformerna av insignalen och utsignalen. Frekvensfunktionen ger alltså på ett explicit sätt fullständig information om systemets frekvensegenskaper.

Övningar

9A Bestäm fouriertransformen i distributionsmening av följande funktioner, till exempel med hjälp av tabell och räkneregler:

(a) $t^2 + t + 1$, (b) $\dfrac{t^3 + 2t^2 + t + 3}{t^2 + 1}$, (c) $t \cos t$, (d) $(\sin t) \operatorname{sgn} t$.

9B Genomför några delar av beviset för sats 9.21.

9C Bestäm tempererade distributioner som har följande fouriertransformer:

(a) $\dfrac{\omega^2}{\omega^2 + a^2}$ $(a > 0)$, (b) $\chi(\omega)$, (c) $|\omega|$, (d) $\underline{(\omega - 3)}^{-1}$.

9D Bestäm alla lösningar y i $\mathcal{S}'$ och i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till följande differentialekvationer:

(a) $-y'' + y = 1 + \delta$, (b) $y' - iy = \chi$, (c) $y''' - y'' + y' - y = \delta' + \delta$.

9E För ett LTI-system S gäller att impulssvaret h är en tempererad distribution och att $y'' - 2y' - 3y = 3x' - 5x$ då $y = Sx$. Bestäm systemets frekvensfunktion och impulssvar, och avgör om systemet är kausalt.

∗9F Visa att ”Fouriers inversionsformel” $\hat{\hat{u}} = 2\pi \check{u}$ gäller för alla $u \in \mathcal{S}'$.

∗9G Bestäm fouriertransformen i distributionsmening av funktionen $u(t) = \arctan t$.

∗∗9H Antag att σ, σ_1 och σ_2 är reella tal sådana att $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Visa att funktionen

$$f(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

är en schwartztestfunktion.

∗∗9I Visa att funktionen $e^{t + ie^t}$ ger upphov till en tempererad distribution.

∗∗9J Visa att maclaurinserien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}$ för $\cos t$ är konvergent i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ men inte i $\mathcal{S}'$.

Laplacetransformen

Man kan se laplacetransformen som en utvidgning av fouriertransformen till komplexa frekvenser. Detta ger en transform som är mycket praktisk att använda, och som tillsammans med komplex analys är ett kraftfullt verktyg bland annat för att analysera och lösa differentialekvationer.

Laplacetransformen har fått sitt namn efter Pierre-Simon de Laplace (1749–1827), som vidareutvecklade Leonhard Eulers (1707–1783) tekniker för att uttrycka lösningar till differentialekvationer i form av integraler.

Föreläsning 10

Laplacetransform av lokalt integrerbara funktioner

10.1 Definition Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Vi definierar *laplacetransformen* av u, betecknad $\hat{u}$ eller $\mathscr{L}u$, som den funktion som ges av

$$\hat{u}(s) = (\mathscr{L}u)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt,$$

och vars definitionsmängd består av de $s \in \mathbb{C}$ för vilka integralen är absolutkonvergent.

Notera att $(\mathscr{L}u)(i\omega) = (\mathscr{F}u)(\omega)$ för alla $\omega \in \mathbb{R}$ om $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Den laplacetransform vi definierat ovan kallas ibland för den *dubbelsidiga* laplacetransformen, speciellt om man vill skilja den ifrån den *enkelsidiga* laplacetransformen (vars undre integrationsgräns är 0 istället för $-\infty$), som vi tar upp på nästa föreläsning.

10.2 Exempel Vi beräknar laplacetransformen av funktionen $u(t) = e^t\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\hat{u}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^t\chi(t)e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-1)t}\,dt = \Big/\text{om } s \neq 1\Big/ \\ &= \left[\frac{e^{-(s-1)t}}{-(s-1)}\right]_0^{\infty} = \Big/\text{om } \operatorname{Re} s > 1\Big/ = \frac{1}{s-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.\end{aligned}$$

Räkningen visar att integralen är konvergent om och endast om $\operatorname{Re} s > 1$, och av samma räkning följer, eftersom $|e^t\chi(t)e^{-st}| = e^t\chi(t)e^{-\sigma t}$, där $\sigma = \operatorname{Re} s$, att integralen till och med är absolutkonvergent om $\operatorname{Re} s > 1$.

Vi beräknar också laplacetransformen av funktionen $v(t) = -e^t\chi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\hat{v}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^t\chi(-t)e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-1)t}\,dt = \frac{1}{s-1}, \quad \operatorname{Re} s < 1.$$

Observera att $\hat{u}$ och $\hat{v}$ ges av samma uttryck, men att definitionsmängderna skiljer sig åt.

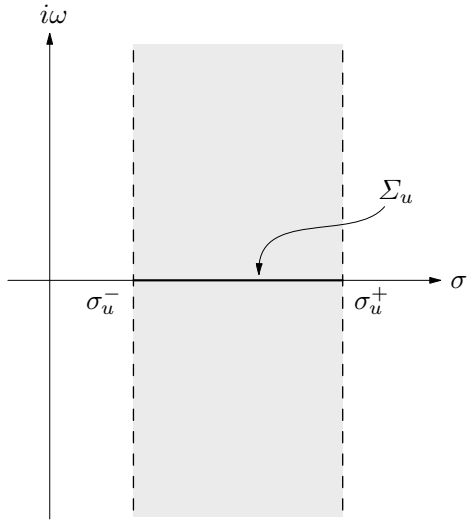
Vi kan här också se en fördel med laplacetransformen jämfört med fouriertransformen: funktionen u har en väldefinierad laplacetransform, medan u inte ens i distributionsmening har någon fouriertransform, eftersom u inte ger upphov till en tempererad distribution.

10.3 Definitionsmängden för en laplacetransform Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. För att på ett enkelt sätt kunna hantera definitionsmängden för $\hat{u}$ definierar vi mängden Σ_u genom

$$\Sigma_u = \big\{\sigma \in \mathbb{R};\ \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|e^{-\sigma t}\,dt < \infty\big\}.$$

Då gäller att definitionsmängden för $\hat{u}$ består av de $s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ sådana att $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u$, eftersom $|e^{-st}| = e^{-\sigma t}$. För ett sådant s har vi alltså att funktionen $u(t)e^{-\sigma t}$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $(\mathscr{L}u)(s) = \mathscr{F}\big(u(t)e^{-\sigma t}\big)(\omega)$.

Om $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_u$ och $\sigma_1 < \sigma_2$ så gäller för alla σ sådana att $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ att $\sigma \in \Sigma_u$, eftersom $e^{-\sigma t} \le e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Detta medför att Σ_u antingen är den tomma mängden, eller att Σ_u innehåller precis en punkt, eller att Σ_u är ett intervall.



Vi definierar också *konvergensabskissorna* σ_u^- och σ_u^+ för u genom

$$\sigma_u^- = \inf \Sigma_u \quad \text{och} \quad \sigma_u^+ = \sup \Sigma_u.$$

Det följer av definitionerna att om $\sigma_u^- < \sigma_u^+$ så ingår området

$$\{s \in \mathbb{C};\ \sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+\}$$

i definitionsmängden för $\hat{u}$.

Om u är lika med noll på något intervall $]-\infty, a[$, och $\Sigma_u \neq \varnothing$, så gäller att $\sigma_u^+ = \infty$. För att se detta, antag att $u(t) = 0$ då $t < a$ och att $\sigma_1 \in \Sigma_u$. Om då $\sigma \ge \sigma_1$ så är $e^{(\sigma-\sigma_1)(t-a)} \ge 1$ för alla $t \ge a$, så att $e^{-\sigma t} \le e^{-(\sigma-\sigma_1)a}e^{-\sigma_1 t}$ för alla $t \ge a$, vilket medför att $\sigma \in \Sigma_u$. Alltså gäller att $[\sigma_1, \infty[\ \subseteq \Sigma_u$, vilket ger att $\sigma_u^+ = \infty$.

Med andra ord, om $u = 0$ på något intervall $]-\infty, a[$, och $\hat{u}$:s definitionsmängd inte är tom, så innehåller $\hat{u}$:s definitionsmängd ett ”halvplan åt höger” av s-planet. Notera dock att funktionen $u(t) = \chi(t) + e^{-t^2}$ (till exempel) är nollskild på hela t-axeln och att $\hat{u}$ är definierad i det halvplan som ges av $\operatorname{Re} s > 0$.

Analogt, om $u = 0$ på något intervall $]a, \infty[$, och $\Sigma_u \neq \varnothing$, så gäller att $\sigma_u^- = -\infty$.

10.4 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och antag att $\sigma_u^- < \sigma_u^+$. Då är laplacetransformen av u en analytisk funktion i området $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+\}$.*

Bevis Vi visar först att $\hat{u}$ är kontinuerlig i området $D = \{s \in \mathbb{C};\ \sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+\}$. Låt s vara en godtycklig punkt i D och låt s_n, $n = 1, 2, \ldots$, vara en följd i D sådan att $s_n \to s$ då $n \to \infty$. Funktionerna $u(t)e^{-s_n t}$ tillhör då $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ för $n = 1, 2, \ldots$, och för varje $t \in \mathbb{R}$ gäller att $u(t)e^{-s_n t} \to u(t)e^{-st}$ då $n \to \infty$. Vi har också att

$$|u(t)e^{-s_n t}| \le |u(t)|(e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}), \quad t \in \mathbb{R},\ n \ge 1,$$

där σ_1 och σ_2 är valda så att $\sigma_u^- < \sigma_1 \le \operatorname{Re} s_n \le \sigma_2 < \sigma_u^+$ för alla $n \ge 1$. Sats A.18 ger nu att

$$\lim_{n\to\infty} \hat{u}(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-s_n t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt = \hat{u}(s).$$

Detta medför att $\hat{u}$ är kontinuerlig i punkten s, och eftersom s var godtycklig i D följer att $\hat{u}$ är kontinuerlig i D.

Vidare gäller att $]\sigma_u^-, \sigma_u^+[\subseteq \Sigma_{tu(t)}$. För att se detta, låt σ vara sådant att $\sigma_u^- < \sigma < \sigma_u^+$ och välj σ_1 och σ_2 sådana att $\sigma_u^- < \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 < \sigma_u^+$. Då har vi att

$$|tu(t)|e^{-\sigma t} = \begin{cases} |te^{-(\sigma-\sigma_1)t}||u(t)|e^{-\sigma_1 t}, & t \geq 0, \\ |te^{(\sigma_2-\sigma)t}||u(t)|e^{-\sigma_2 t}, & t \leq 0, \end{cases}$$

och eftersom funktionerna $te^{-(\sigma-\sigma_1)t}$ och $te^{(\sigma_2-\sigma)t}$ är begränsade då $t \geq 0$ respektive $t \leq 0$ följer att $\sigma \in \Sigma_{tu(t)}$. Med hjälp av detta får vi att funktionen $u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}$ uppfyller förutsättningarna i sats A.19, så laplacetransformen $\hat{u}(\sigma+i\omega)$ är partiellt deriverbar med avseende på σ och ω, och derivatorna ges av

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma}(\sigma+i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}(-t)\,dt, \quad \sigma+i\omega \in D,$$

och

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \omega}(\sigma+i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}(-it)\,dt, \quad \sigma+i\omega \in D.$$

Av det ovanstående följer att $\partial\hat{u}/\partial\sigma$ och $\partial\hat{u}/\partial\omega$ är kontinuerliga i D, och eftersom $\partial\hat{u}/\partial\omega = i\partial\hat{u}/\partial\sigma$ är Cauchy–Riemanns ekvationer för $\hat{u}$ uppfyllda. Detta medför att $\hat{u}$ är analytisk i D (se till exempel [2] eller [12]). □

10.5 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och antag att $\sigma_u^- < \sigma_u^+$.*

(a) *Om $\sigma_u^- < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_u^+$ så gäller att $\hat{u}(s) \to 0$ då $s \to \infty$ i det område som ges av $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$ (det vill säga, $\hat{u}(s) \to 0$ då $|s| \to \infty$ och $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$).*

(b) *Om $u(t) = 0$ då $t < 0$ och $\sigma_1 > \sigma_u^-$ så gäller att $\hat{u}(s) \to 0$ då $s \to \infty$ i det område som ges av $\operatorname{Re} s > \sigma_1$.*

Bevis För att visa (a) antar vi att $\sigma_u^- < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_u^+$ och låter $\varepsilon > 0$. För $R \geq 0$ har vi att

$$\hat{u}(s) = \int_{-\infty}^{-R} u(t)e^{-st}\,dt + \int_{-R}^{R} u(t)e^{-st}\,dt + \int_{R}^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt, \quad \sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+,$$

och om $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$ så gäller uppskattningarna

$$\left|\int_R^{\infty} u(t)e^{-st}\,dt\right| \leq \int_R^{\infty} |u(t)|e^{-\sigma_1 t}\,dt \quad \text{och} \quad \left|\int_{-\infty}^{-R} u(t)e^{-st}\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{-R} |u(t)|e^{-\sigma_2 t}\,dt.$$

Vi väljer nu R så stort att de båda integralerna i högerleden ovan blir mindre än $\varepsilon/6$.

Av sats A.17 följer, eftersom $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, att det finns en funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är styckvis konstant och sådan att

$$\int_{-R}^{R} |u(t) - v(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3(e^{\sigma_2 R} + e^{-\sigma_1 R})}.$$

Om $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$ så får vi nu att

$$|\hat{u}(s)| < \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int_{-R}^{R} \big(u(t) - v(t)\big)e^{-st}\,dt\right| + \left|\int_{-R}^{R} v(t)e^{-st}\,dt\right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\int_{-R}^{R} v(t)e^{-st}\,dt\right|.$$

Den sista integralen är en (ändlig) linjärkombination av integraler av typen $\int_a^b e^{-st}\,dt$, så den går mot 0 om $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$ och $s \to \infty$. Alltså är $|\hat{u}(s)| < \varepsilon$ om $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$ och $|s|$ är tillräckligt stort, vilket avslutar beviset av (a). Vi utelämnar beviset av (b) eftersom det inte på något väsentligt sätt skiljer sig från beviset av (a). □

Vid problemlösning med laplacetransformen är det praktiskt att ha en tabell som listar vanligt förekommande funktioner och deras transformer. Tabellen i den formelsamling som hör till denna kurs kan man härleda genom rättframma räkningar utgående från definition 10.1, eller genom att använda räknereglerna i sats 10.7 nedan. För att identifiera en konstant som dyker upp i laplacetransformen av funktionen $(\ln t)\chi(t)$ krävs dock en något längre utredning.

10.6 Laplacetransformen av $(\ln t)\chi(t)$ Sätt $u(t) = (\ln t)\chi(t)$. Med detta menar vi att $u(t) = \ln t$ då $t > 0$, att $u(t) = 0$ då $t < 0$, och att u är odefinierad i punkten 0.

Notera att u väsentligen tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ (se 1.3), och att $\Sigma_u =]0, \infty[$. Sats 10.4 ger att $\hat{u}$ är en analytisk funktion i det område som ges av $\operatorname{Re} s > 0$, och för $s > 0$ har vi att

$$\begin{aligned}\hat{u}(s) &= \int_0^\infty (\ln t)e^{-st}\,dt = \Big/ r = st \Big/ = \int_0^\infty \Big(\ln \frac{r}{s}\Big) e^{-r}\,\frac{1}{s}\,dr \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty (\ln r - \ln s)e^{-r}\,dr = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-r}\ln r\,dr - \frac{\ln s}{s}\int_0^\infty e^{-r}\,dr \\ &= -\frac{\gamma + \ln s}{s}, \quad s > 0,\end{aligned}$$

där $\gamma = -\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt$ är en konstant. Detta bestämmer $\hat{u}$, eftersom $\hat{u}$ är analytisk, och ger att

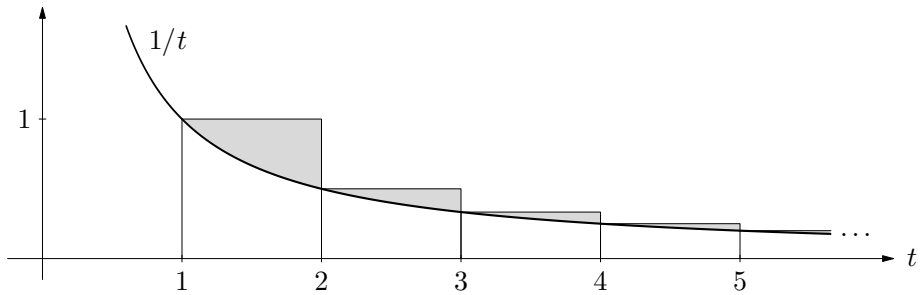
$$\hat{u}(s) = -\frac{\gamma + \operatorname{Log} s}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

där "Log" betecknar den komplexa logaritmfunktionens principalgren, som är definierad i området $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ och som ges av $\operatorname{Log} s = \ln s$ då $s > 0$.

Vi gör nu en utvikning och visar att konstanten γ är den så kallade *Eulers konstant*, som definieras som gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\Big) = 0{,}5772156\ldots.$$

Att gränsvärdet existerar följer av att det kan tolkas grafiskt som arean av den mängd som illustreras i följande figur:



Eulers konstant har beräknats med flera miljarder decimaler, men det är faktiskt inte ens känt om dess värde är ett rationellt tal eller inte.

När vi nu ska visa att γ är lika med Eulers konstant så kommer vi flera gånger att använda likheten

$$\int_0^\infty e^{-t}t^n\,dt = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

som kan visas genom att göra upprepade partialintegrationer.

Genom partiella integrationer, i vilka de utintegrerade delarna blir lika med noll, får vi också att

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt &= \int_0^\infty e^{-t}(t\ln t - t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t\ln t\,dt - 1\\ &= \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t^2}{2!}\ln t - \frac{t^2}{2\cdot 2!}\right)dt - 1 = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^2}{2!}\ln t\,dt - \frac{1}{2} - 1\\ &= \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t^3}{3!}\ln t - \frac{t^3}{3\cdot 3!}\right)dt - \frac{1}{2} - 1 = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^3}{3!}\ln t\,dt - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1\\ &= \ldots,\end{aligned}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}\gamma &= -\int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}\ln t\,dt\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n - \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}\ln\frac{t}{n}\,dt, \quad n \geq 1. \qquad (*)\end{aligned}$$

Vi låter I_n beteckna den sista integralen, det vill säga,

$$I_n = \int_0^\infty e^{-t}\frac{t^n}{n!}\ln\frac{t}{n}\,dt = \Big/ t = nr \Big/ = \int_0^\infty \frac{n^{n+1}}{n!}(re^{-r})^n \ln r\,dr, \quad n \geq 1.$$

Om vi visar att $I_n \to 0$ då $n \to \infty$ så följer av $(*)$ att γ är lika med Eulers konstant, eftersom $\ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \to 0$ då $n \to \infty$.

Låt $\varepsilon > 0$. Då finns ett $\delta > 0$ sådant att $|\ln r| < \varepsilon/2$ då $|r - 1| < \delta$, vilket ger att

$$\left|\int_{|r-1|<\delta} \frac{n^{n+1}}{n!}(re^{-r})^n \ln r\,dr\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^\infty \frac{n^{n+1}}{n!}(re^{-r})^n\,dr = \frac{\varepsilon}{2}, \quad n \geq 1.$$

Funktionen re^{-r} är strängt växande på $[0, 1]$, strängt avtagande på $[1, \infty[$, och dess värde då $r = 1$ är e^{-1}. Det finns därför ett $a < 1$ sådant att $re^{-r} \leq ae^{-1}$ för alla $r \geq 0$ sådana att $|r - 1| \geq \delta$. Vidare har vi att

$$n! \geq n^n e^{-n} e, \quad n \geq 1,$$

vilket följer av att

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n \geq \ln 1 + \int_1^n \ln x\,dx = n\ln n - n + 1, \quad n \geq 1.$$

Dessa uppskattningar ger att

$$\left|\int_{r\geq 0;\,|r-1|\geq\delta} \frac{n^{n+1}}{n!}(re^{-r})^n \ln r\,dr\right| \leq \frac{n^{n+1}a^{n-1}e^{-(n-1)}}{n^n e^{-n} e}\int_0^\infty re^{-r}|\ln r|\,dr, \quad n \geq 1.$$

Det sista högerledet går mot noll då $n \to \infty$, eftersom $na^n \to 0$ då $n \to \infty$. Detta medför att $|I_n| < \varepsilon$ om n är tillräckligt stort, så $I_n \to 0$ då $n \to \infty$. Därmed har vi visat att γ är lika med Eulers konstant.

Räkneregler för laplacetransformen

Räknereglerna för laplacetransformen är mycket lika räknereglerna för fouriertransformen (se sats 7.4). Den största skillnaden är att man för laplacetransformen måste hålla reda på transformernas definitionsmängder.

10.7 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och för (h) nedan att u är kontinuerligt deriverbar. Då gäller följande räkneregler:*

(a)	$u(t) + v(t)$	$\hat{u}(s) + \hat{v}(s),\ \operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \Sigma_v$	
(b)	$cu(t)$	$c\hat{u}(s),\ \operatorname{Re} s \in \Sigma_u$	$(c \in \mathbb{C})$
(c)	$\overline{u(t)}$	$\overline{\hat{u}(\bar{s})},\ \operatorname{Re} s \in \Sigma_u$	
(d)	$u(-t)$	$\hat{u}(-s),\ \operatorname{Re}(-s) \in \Sigma_u$	
(e)	$u(at)$	$\hat{u}(s/a)/a,\ \operatorname{Re}(s/a) \in \Sigma_u$	$(a > 0)$
(f)	$u(t-a)$	$e^{-as}\hat{u}(s),\ \operatorname{Re} s \in \Sigma_u$	$(a \in \mathbb{R})$
(g)	$e^{ct}u(t)$	$\hat{u}(s-c),\ \operatorname{Re}(s-c) \in \Sigma_u$	$(c \in \mathbb{C})$
(h)	$u'(t)$	$s\hat{u}(s),\ \operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \Sigma_{u'}$	
(i)	$tu(t)$	$-\hat{u}'(s),\ \sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$	

Notera att inklusionerna som ges i (a), (h) och (i): $\Sigma_u \cap \Sigma_v \subseteq \Sigma_{u+v}$, $\Sigma_u \cap \Sigma_{u'} \subseteq \Sigma_{u'}$ och $]\sigma_u^-, \sigma_u^+[\ \subseteq \Sigma_{tu(t)}$, kan vara strikta, men att $\Sigma_{cu} = \Sigma_u$ (om $c \neq 0$), $\Sigma_{\bar{u}} = \Sigma_u$, $\Sigma_{u(-t)} = -\Sigma_u$, $\Sigma_{u(at)} = a\Sigma_u$, $\Sigma_{u(t-a)} = \Sigma_u$ och $\Sigma_{e^{ct}u(t)} = \Sigma_u + \operatorname{Re} c$.

Bevis Vi visar först (g). Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, låt $c \in \mathbb{C}$ och sätt $v(t) = e^{ct}u(t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Om (och endast om) $s \in \mathbb{C}$ är sådant att $\operatorname{Re}(s-c) \in \Sigma_u$ så har vi att

$$\hat{v}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ct}u(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-(s-c)t}\,dt = \hat{u}(s-c).$$

Bevisen för (a)–(f) följer samma mönster.

För att visa (h) antar vi att $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (vilket medför att $u, u' \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$) och att $s \in \mathbb{C}$ är sådant att $\operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \Sigma_{u'}$. Då har vi att funktionen $u(t)e^{-st}$ och dess derivata $(u'(t) - su(t))e^{-st}$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Att derivatan tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ger att

$$u(t)e^{-st} - u(0) = \int_0^t \big(u'(r) - su(r)\big)e^{-sr}\,dr \to \int_0^{\infty} \big(u'(r) - su(r)\big)e^{-sr}\,dr, \quad t \to \infty.$$

Eftersom funktionen $u(t)e^{-st}$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och har ett gränsvärde då $t \to \infty$ följer att $u(t)e^{-st} \to 0$ då $t \to \infty$, och på samma sätt kan man visa att $u(t)e^{-st} \to 0$ då $t \to -\infty$. Vi får nu att

$$(u')\hat{}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u'(t)e^{-st}\,dt = \Big[u(t)e^{-st}\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}(-s)\,dt = s\hat{u}(s).$$

För att visa (i) antar vi att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och att $\sigma_u^- < \sigma_u^+$. I beviset för sats 10.4 visade vi att $]\sigma_u^-, \sigma_u^+[\ \subseteq \Sigma_{tu(t)}$ och att $\hat{u}$ är komplext deriverbar i det område som ges av $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$. Det följer därför av uttrycket för $\partial\hat{u}/\partial\sigma$ i beviset för sats 10.4 att

$$\hat{u}'(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}(-t)\,dt, \quad \sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+.$$

Detta ger att laplacetransformen av funktionen $tu(t)$ är $-\hat{u}'(s)$, för $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$. $\square$

10.8 Exempel Låt $u(t) = e^{3t}\chi(2-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Vi bestämmer u:s laplacetransform med hjälp av tabell och räkneregler.

Utgående från en lämplig rad i tabellen använder vi olika räkneregler, i detta fall sats 10.7 (d), (f) och (g), för att i vänsterkolumnen ta oss fram till $u(t)$:

$$\begin{array}{ccl}
\chi(t) & \xrightarrow{\mathscr{L}} & \dfrac{1}{s},\ \operatorname{Re} s > 0, \\[2ex]
\chi(-t) & & \dfrac{1}{-s},\ \operatorname{Re}(-s) > 0, \\[2ex]
\chi(-(t-2)) & & -\dfrac{e^{-2s}}{s},\ \operatorname{Re} s < 0, \\[2ex]
e^{3t}\chi(2-t) & & -\dfrac{e^{-2(s-3)}}{s-3},\ \operatorname{Re}(s-3) < 0.
\end{array}$$

Resultatet är alltså att $\hat{u}(s) = -e^{-2(s-3)}/(s-3)$, $\operatorname{Re} s < 3$.

10.9 Exempel Vi bestämmer, med hjälp av tabell och räkneregler, en funktion $u(t)$ som har laplacetransform

$$U(s) = \frac{8}{s-1} - \frac{5}{s-2}, \quad 1 < \operatorname{Re} s < 2.$$

Direkt ur tabell får vi att funktionen $e^t\chi(t)$ har laplacetransform $1/(s-1)$, $\operatorname{Re} s > 1$, och det återstår att bestämma en funktion som har transform $1/(s-2)$, $\operatorname{Re} s < 2$. Detta kan vi göra genom att kalla denna funktion för $v(t)$, till exempel, och sedan använda räkneregler så att vi i högerkolumnen tar oss fram till något som finns i tabellen:

$$\begin{array}{ccl}
v(t) & \xrightarrow{\mathscr{L}} & \dfrac{1}{s-2},\ \operatorname{Re} s < 2, \\[2ex]
v(-t) & & \dfrac{1}{-s-2},\ \operatorname{Re}(-s) < 2, \\[2ex]
-v(-t) & & \dfrac{1}{s+2},\ \operatorname{Re} s > -2.
\end{array}$$

Sista raden i högerkolumnen är enligt tabell laplacetransformen av funktionen $e^{-2t}\chi(t)$, så vi sätter $-v(-t) = e^{-2t}\chi(t)$, vilket efter förenkling ger att $v(t) = -e^{2t}\chi(-t)$, och har då att $\hat{v}(s) = 1/(s-2)$, $\operatorname{Re} s < 2$.

Alternativt kan vi utgå från en lämplig rad i tabellen och använda räkneregler för att i högerkolumnen ta oss fram till $1/(s-2)$, $\operatorname{Re} s < 2$:

$$\begin{array}{ccl}
\chi(t) & \xrightarrow{\mathscr{L}} & \dfrac{1}{s},\ \operatorname{Re} s > 0, \\[2ex]
\chi(-t) & & \dfrac{1}{-s},\ \operatorname{Re}(-s) > 0, \\[2ex]
-\chi(-t) & & \dfrac{1}{s},\ \operatorname{Re} s < 0, \\[2ex]
-e^{2t}\chi(-t) & & \dfrac{1}{s-2},\ \operatorname{Re}(s-2) < 0,
\end{array}$$

så vi får, som ovan, att funktionen $-e^{2t}\chi(-t)$ har laplacetransform $1/(s-2)$, $\operatorname{Re} s < 2$.

För funktionen $u(t) = 8e^t\chi(t) + 5e^{2t}\chi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, gäller alltså att $\hat{u} = U$.

10.10 Exempel Vi bestämmer en funktion $u(t)$ som har laplacetransform

$$U(s) = \frac{6s^3 + 11s^2 + 4s - 13}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Första steget är att göra en partialbråksuppdelning:

$$\frac{6s^3 + 11s^2 + 4s - 13}{(s-1)^2(s^2+2s+5)} = \frac{5}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s+7}{s^2+2s+5}.$$

Ur tabell får vi direkt att de två första partialbråken, med definitionsmängder givna av $\operatorname{Re} s > 1$, är laplacetransformer av funktionerna $5e^t\chi(t)$ respektive $te^t\chi(t)$. I det tredje partialbråket kvadratkompletterar vi nämnaren och anpassar täljarens form därefter:

$$\frac{s+7}{s^2+2s+5} = \frac{s+7}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{3\cdot 2}{(s+1)^2+4}.$$

En funktion vars laplacetransform är det första bråket i högerledet, med definitionsmängd given av $\operatorname{Re} s > -1$, får vi på följande sätt med hjälp av tabell och sats 10.7 (g):

$$\begin{aligned} (\cos 2t)\chi(t) \quad &\xrightarrow{\mathscr{L}} \quad \frac{s}{s^2+4}, \ \operatorname{Re} s > 0, \\ e^{-t}(\cos 2t)\chi(t) \quad & \qquad \frac{s+1}{(s+1)^2+4}, \ \operatorname{Re}(s+1) > 0. \end{aligned}$$

Bråket $3\cdot 2/((s+1)^2+4)$, med definitionsmängd given av $\operatorname{Re} s > -1$, fås på samma sätt som laplacetransformen av funktionen $3e^{-t}(\sin 2t)\chi(t)$. För funktionen

$$u(t) = \big(5e^t + te^t + e^{-t}(\cos 2t + 3\sin 2t)\big)\chi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

gäller alltså att $\hat{u}(s) = U(s)$ för $\operatorname{Re} s > 1$, eftersom sats 10.7 (a) och det ovanstående medför att $\hat{u}$:s definitionsmängd innehåller området givet av $\operatorname{Re} s > 1$. Eftersom $\hat{u}$ har en singularitet i $s = 1$ ingår inga ytterligare punkter i dess definitionsmängd.

10.11 Exempel Vi härleder laplacetransformen av funktionen

$$u(t) = \frac{\sin at}{t}\chi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

där $a > 0$ är en konstant.

Vi noterar att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och att $\Sigma_u =]0, \infty[$. Genom en rättfram räkning utgående från definition 10.1 (eller ur tabell) får vi att

$$tu(t) = (\sin at)\chi(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad \frac{a}{s^2+a^2}, \ \operatorname{Re} s > 0,$$

så sats 10.7 (i) ger att $-\hat{u}'(s) = a/(s^2+a^2)$ då $\operatorname{Re} s > 0$. Genom att bestämma en primitiv funktion till $a/(s^2+a^2)$ får vi att $\hat{u}(s) = \operatorname{Arctan}(a/s) + C$ då $\operatorname{Re} s > 0$, där $C \in \mathbb{C}$ är en konstant och "Arctan" betecknar den gren av den komplexa arctangensfunktionen som är definierad i området $\mathbb{C} \setminus \pm i[1, \infty[$ och som överensstämmer med den vanliga reella arctangensfunktionen på realaxeln.

Enligt sats 10.5 (b) gäller att $\hat{u}(s) \to 0$ då $s \to \infty$ längs positiva realaxeln, vilket medför att $C = 0$. Alltså har vi att

$$\hat{u}(s) = \operatorname{Arctan}\frac{a}{s}, \ \operatorname{Re} s > 0.$$

Faltning och laplacetransform

10.12 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, att $\Sigma_u \cap \Sigma_v \neq \varnothing$, och att om $\sigma \in \Sigma_u \cap \Sigma_v$ så är minst en av funktionerna $u(t)e^{-\sigma t}$ och $v(t)e^{-\sigma t}$ begränsad. Då gäller att faltningen $u * v$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ och att*

$$(u * v)\hat{}(s) = \hat{u}(s)\hat{v}(s), \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \Sigma_v.$$

Bevis Antag att $\sigma \in \Sigma_u \cap \Sigma_v$ och sätt $u_\sigma(t) = u(t)e^{-\sigma t}$ och $v_\sigma(t) = v(t)e^{-\sigma t}$ för $t \in \mathbb{R}$. Då gäller att $u_\sigma, v_\sigma \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att minst en av funktionerna u_σ och v_σ tillhör $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Sats 3.6 ger därför att $(|u_\sigma| * |v_\sigma|)(t)$ är definierad för varje $t \in \mathbb{R}$, så

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)v(r)|\, dr = e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t-r)|e^{-\sigma(t-r)}|v(r)|e^{-\sigma r}\, dr < \infty, \quad t \in \mathbb{R},$$

vilket ger att $u * v$ är definierad på hela $\mathbb{R}$. Samma räkning, men utan beloppstecknen, visar att $(u * v)(t) = e^{\sigma t}(u_\sigma * v_\sigma)(t)$ då $t \in \mathbb{R}$. Av detta följer att $u * v$ är kontinuerlig och att $\sigma \in \Sigma_{u*v}$, eftersom sats 8.1 ger att $u_\sigma * v_\sigma$ är kontinuerlig och tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Om nu $s = \sigma + i\omega$ för något $\omega \in \mathbb{R}$ så har vi att

$$(u * v)\hat{}(s) = \mathscr{F}\big((u * v)(t)e^{-\sigma t}\big)(\omega) = \mathscr{F}(u_\sigma * v_\sigma)(\omega) = (\mathscr{F}u_\sigma)(\omega)(\mathscr{F}v_\sigma)(\omega) = \hat{u}(s)\hat{v}(s),$$

där den tredje likheten ges av sats 8.1. □

10.13 Exempel Vi bestämmer med hjälp av laplacetransform lösningar u till följande integralekvation:

$$\int_{-\infty}^{t} \big(\cos(t-r) - \sin(t-r)\big)u(r)\, dr = te^{2t}\chi(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vänsterledet är faltningen av funktionen $(\cos t - \sin t)\chi(t)$ och u. Med hjälp av tabell och räkningar liknande dem i exempel 10.8 får vi att

$$(\cos t - \sin t)\chi(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad \frac{s-1}{s^2+1}, \ \operatorname{Re} s > 0,$$

och att

$$te^{2t}\chi(-t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad -\frac{1}{(s-2)^2}, \ \operatorname{Re} s < 2.$$

Av sats 10.12 följer nu, om vi antar att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och att $\Sigma_u \cap \,]0,2[\, \neq \varnothing$, att

$$\frac{s-1}{s^2+1}\hat{u}(s) = -\frac{1}{(s-2)^2}, \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_u \cap \,]0,2[.$$

Vi löser ut $\hat{u}(s)$ och gör en partialbråksuppdelning:

$$\hat{u}(s) = -\frac{s^2+1}{(s-2)^2(s-1)} = -\frac{5}{(s-2)^2} + \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s-1}, \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_u.$$

Vi ser att $\hat{u}(s)$ har singulariteter i $s = 1$ och $s = 2$. Om vi väljer $\Sigma_u = \,]1,2[$ så får vi med hjälp av tabell och räkningar av samma typ som i exempel 10.9 att

$$u(t) = (5t-1)e^{2t}\chi(-t) - 2e^t\chi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Med $\Sigma_u = \,]-\infty,1[$ får vi istället att $u(t) = (5t-1)e^{2t}\chi(-t) + 2e^t\chi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Att dessa funktioner är lösningar till integralekvationen kan kontrolleras genom insättning.

Inversionsformeln och entydighet

Eftersom $(\mathscr{L}u)(\sigma+i\omega) = \mathscr{F}\big(u(t)e^{-\sigma t}\big)(\omega)$ ger Fouriers inversionsformel (sats 7.11) direkt upphov till en inversionsformel för laplacetransformen. Denna inversionsformel är ofta ett bra alternativ till tabellräkningar, men den har också andra användningsområden.

10.14 Sats (Inversionsformeln) *Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och antag att $\sigma \in \Sigma_u$ och att $a \in \mathbb{R}$. Om u har generaliserad högerderivata och generaliserad vänsterderivata i punkten a så gäller att*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,R}} \hat{u}(s)e^{sa}\,ds = \frac{u(a+)+u(a-)}{2},$$

där $L_{\sigma,R}$ är sträckan $s=\sigma+i\omega$ då ω går från $-R$ till R. Mera allmänt gäller denna likhet förutsatt att alla ingående gränsvärden existerar ändligt.

Bevis Funktionen $u(t)e^{-\sigma t}$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ eftersom $\sigma \in \Sigma_u$. Om u har generaliserad högerderivata och generaliserad vänsterderivata i punkten a så har funktionen $u(t)e^{-\sigma t}$ också det, och Fouriers inversionsformel (7.11) ger då att

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \mathscr{F}\big(u(t)e^{-\sigma t}\big)(\omega)e^{i\omega a}\,d\omega = \frac{u(a+)e^{-\sigma a}+u(a-)e^{-\sigma a}}{2}. \qquad (*)$$

Mera allmänt gäller denna likhet också, enligt sats 7.15, om alla ingående gränsvärden existerar ändligt. Likheten $(*)$ kan omformas till likheten i satsen genom att multiplicera med konstanten $e^{\sigma a}$, vilket ger

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{u}(\sigma+i\omega)e^{(\sigma+i\omega)a}\,d\omega = \frac{u(a+)+u(a-)}{2},$$

och sedan uttrycka integralen som en komplex kurvintegral längs sträckan $L_{\sigma,R}$. □

10.15 Exempel Vi använder inversionsformeln för att inverstransformera funktionen

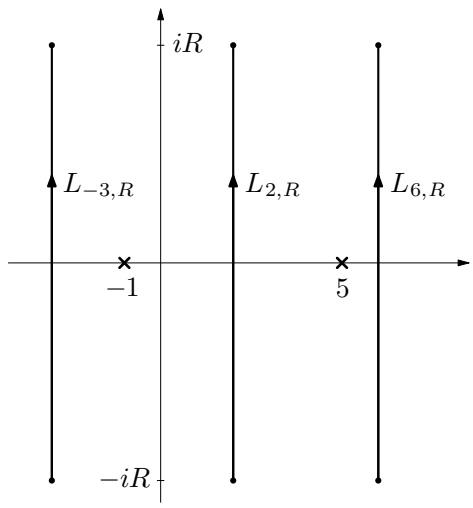
$$U(s) = \frac{6e^{-3s}}{(s+1)(s-5)},$$

med definitionsmängd given av: (a) $\operatorname{Re} s < -1$, (b) $-1 < \operatorname{Re} s < 5$, (c) $\operatorname{Re} s > 5$.

Vi ska alltså för alla $t \in \mathbb{R}$ beräkna

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\sigma,R}} U(s)e^{st}\,ds$$

i de tre fallen $\sigma < -1$, $-1 < \sigma < 5$, och $\sigma > 5$. Det följer av Cauchys integralsats (se till exempel [2] eller [12]) att det inte spelar någon roll vilket σ vi väljer inom respektive intervall, ty $U(s)e^{st} \to 0$ då $s \to \infty$ och $\operatorname{Re} s$ hålls begränsad. Vi kan till exempel ta $\sigma = -3$, 2, och 6.



För att kunna använda residysatsen bildar vi slutna konturer genom att från slutpunkten på $L_{\sigma,R}$ återvända till dess startpunkt längs en halvcirkelbåge, som i exempel 7.12.

Värdet på t bestämmer om halvcirkelbågen till höger eller till vänster om $L_{\sigma,R}$ ska användas, eftersom

$$\left|U(s)e^{st}\right| = \frac{6e^{(t-3)\operatorname{Re} s}}{|s+1||s-5|}.$$

Rättframma uppskattningar ger att om $t \geq 3$ (respektive $t \leq 3$) så går integralen över halvcirkelbågen till vänster (respektive till höger) om $L_{\sigma,R}$ mot noll då $R \to \infty$. Alltså använder vi halvcirkelbågen åt vänster om $t \geq 3$ och halvcirkelbågen åt höger om $t \leq 3$.

Residysatsen och det ovanstående ger nu:

$$\text{(a)} \quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{-3,R}} U(s)e^{st}\,ds = \begin{cases} 0, & t \geq 3, \\ \big(-\operatorname*{Res}_{s=-1} - \operatorname*{Res}_{s=5}\big)U(s)e^{st} = e^{-(t-3)} - e^{5(t-3)}, & t \leq 3, \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{2,R}} U(s)e^{st}\,ds = \begin{cases} \operatorname*{Res}_{s=-1} U(s)e^{st} = -e^{-(t-3)}, & t \geq 3, \\ -\operatorname*{Res}_{s=5} U(s)e^{st} = -e^{5(t-3)}, & t \leq 3, \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{6,R}} U(s)e^{st}\,ds = \begin{cases} \big(\operatorname*{Res}_{s=-1} + \operatorname*{Res}_{s=5}\big)U(s)e^{st} = -e^{-(t-3)} + e^{5(t-3)}, & t \geq 3, \\ 0, & t \leq 3. \end{cases}$$

Att laplacetransformen av dessa tre funktioner av t verkligen är U, med motsvarande definitionsmängder, följer av sats 7.11.

Nästa sats, ett starkt entydighetsresultat för laplacetransformen, är en direkt följd av entydighetssatsen för fouriertransformen (se sats 7.13).

10.16 Sats *Låt $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Om det finns ett $\sigma \in \Sigma_u \cap \Sigma_v$ sådant att $\hat{u}(s) = \hat{v}(s)$ då $\operatorname{Re} s = \sigma$ så är $u(t) = v(t)$ i alla punkter $t \in \mathbb{R}$ där både u och v är kontinuerliga.* □

Start- och slutvärdessatserna

En allmän princip för en funktion $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ sådan att $u(t) = 0$ då $t < 0$ är att eventuella asymptotiska egenskaper hos $u(t)$ då $t \to 0+$ ger upphov till asymptotiska egenskaper hos dess laplacetransform $\hat{u}(s)$ då $s \to \infty$ (se till exempel [3]). Vi tar här bara upp ett enkelt exempel på denna princip, den så kallade *startvärdessatsen*:

10.17 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och antag att $u(t) = 0$ då $t < 0$, att $\Sigma_u \neq \varnothing$, och att $\lim_{t\to 0+} u(t) = A$ för något $A \in \mathbb{C}$. Om $0 < \alpha < \pi/2$ så gäller att $s\hat{u}(s) \to A$ då $s \to \infty$ i det område som ges av $|\operatorname{Arg} s| < \alpha$.*

Här betecknar "$\operatorname{Arg} s$" principalargumentet för s, som för alla $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieras av att $s = |s|e^{i\operatorname{Arg} s}$ och $-\pi < \operatorname{Arg} s \leq \pi$. ($\operatorname{Arg} 0$ är odefinierat.)

Bevis Eftersom $u(t) = 0$ då $t < 0$ och $\int_0^\infty se^{-st}\,dt = 1$ då $\operatorname{Re} s > 0$ har vi att

$$s\hat{u}(s) = s\int_0^\infty (u(t) - A + A)e^{-st}\,dt = s\int_0^\infty (u(t) - A)e^{-st}\,dt + A, \quad \operatorname{Re} s > \max(\sigma_u^-, 0).$$

Antag att $0 < \alpha < \pi/2$ och låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $\lim_{t\to 0+} u(t) = A$ kan vi välja ett $\delta > 0$

sådant att $|u(t) - A| < \varepsilon(\cos\alpha)/2$ då $0 < t < \delta$. Vidare har vi för alla $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ att $\operatorname{Re} s = |s|\cos(\operatorname{Arg} s)$. Det följer att $\operatorname{Re} s > 0$ om $|\operatorname{Arg} s| < \alpha$, och vi får att

$$\left| s\int_0^\delta (u(t) - A)e^{-st}\,dt \right| \le |s| \int_0^\delta \frac{\varepsilon\cos\alpha}{2} e^{-(\operatorname{Re} s)t}\,dt \le \frac{|s|\varepsilon\cos\alpha}{2\operatorname{Re} s} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\operatorname{Arg} s| < \alpha.$$

Välj nu ett godtyckligt σ_1 sådant att $\sigma_1 > \max(\sigma_u^-, 0)$. För $\operatorname{Re} s \ge \sigma_1$ och $t \ge \delta$ har vi att $e^{-(\operatorname{Re} s)t} = e^{-(\operatorname{Re} s - \sigma_1)t}e^{-\sigma_1 t} \le e^{-(\operatorname{Re} s - \sigma_1)\delta}e^{-\sigma_1 t}$, så vi får att

$$\begin{aligned} \left| s\int_\delta^\infty (u(t) - A)e^{-st}\,dt \right| &\le |s| \int_\delta^\infty |u(t) - A| e^{-(\operatorname{Re} s)t}\,dt \\ &\le \frac{(\operatorname{Re} s)e^{-(\operatorname{Re} s - \sigma_1)\delta}}{\cos\alpha} \int_\delta^\infty |u(t) - A| e^{-\sigma_1 t}\,dt, \qquad |\operatorname{Arg} s| < \alpha,\ \operatorname{Re} s \ge \sigma_1. \end{aligned}$$

Det sista ledet blir mindre än $\varepsilon/2$ om $|\operatorname{Arg} s| < \alpha$ och $\operatorname{Re} s$ är tillräckligt stort. Tillsammans visar detta att $|s\hat{u}(s) - A| < \varepsilon$ då $|\operatorname{Arg} s| < \alpha$ och $|s|$ är tillräckligt stort. □

Analogt ger asymptotiska egenskaper hos $u(t)$ då $t \to \infty$ i vissa situationer upphov till asymptotiska egenskaper hos $\hat{u}(s)$ då $s \to 0$. Ett exempel på detta är den så kallade *slutvärdessatsen* nedan, som kan bevisas på väsentligen samma sätt som startvärdessatsen.

10.18 Sats *Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och antag att $u(t) = 0$ då $t < 0$ och att $\lim_{t\to\infty} u(t) = A$ för något $A \in \mathbb{C}$. Om $0 < \alpha < \pi/2$ så gäller att $s\hat{u}(s) \to A$ då $s \to 0$ i det område som ges av $|\operatorname{Arg} s| < \alpha$.* □

Observera att varken start- eller slutvärdessatsen påstår att existensen av gränsvärdet $\lim s\hat{u}(s)$ medför att gränsvärdet $\lim u(t)$ existerar. Utan ytterligare antaganden behöver detta inte vara fallet, vilket visas av följande exempel: sätt $u(t) = (\sin t)\chi(t)$ för $t \in \mathbb{R}$, så att $\hat{u}(s) = 1/(s^2 + 1)$, $\operatorname{Re} s > 0$. Då gäller att $s\hat{u}(s) \to 0$ då $s \to 0$ i det område som ges av $|\operatorname{Arg} s| < \pi/2$, men gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} u(t)$ existerar inte.

Övningar

10A Låt $u(t) = e^{2t}\chi(t) + e^{3t}\chi(-t)$ för $t \in \mathbb{R}$. Bestäm u:s laplacetransform (i detta ingår att bestämma dess definitionsmängd) med hjälp av definition 10.1.

10B Bestäm laplacetransformen av följande funktioner:

(a) $(t^2+1)^2\chi(t)$, (b) $(\sin t)\chi(t+1)$, (c) $e^{-t}(\cos 2t)\chi(-t)$,

(d) $\chi(t+1) - \chi(t-1)$, (e) $\chi(1-t)$, (f) $\chi(t+1) - \chi(1-t)$.

10C Bevisa några av räknereglerna i sats 10.7.

10D Använd inversionsformeln för att inverstransformera uttrycket

$$\frac{e^{-s}}{s^2(s-1)},$$

med definitionsmängd given av: (a) $\operatorname{Re} s < 0$, (b) $0 < \operatorname{Re} s < 1$, (c) $\operatorname{Re} s > 1$.

10E Bestäm funktioner som har följande laplacetransformer:

(a) $\dfrac{4}{s(s+2)^2}$, $\operatorname{Re} s > 0$, (b) $\dfrac{s-8}{s^2-4s+13}$, $\operatorname{Re} s > 2$,

(c) $\dfrac{2}{(s^2+1)(s+1)}$, $-1 < \operatorname{Re} s < 0$, (d) $\dfrac{e^{2s}}{s-3}$, $\operatorname{Re} s < 3$.

10F Bestäm en lösning u till integralekvationen $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^r u(t-r)\,dr = t\chi(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

∗10G Bestäm laplacetransformen av den funktion u som ges av

$$u(t) = \begin{cases} n, & n-1 \le t < n, \text{ för } n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

∗10H Bestäm en lösning u till integralekvationen $\displaystyle\int_{t-1}^{t+1} u(r)\,dr = (1-t^2)\chi(1-t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

∗10I Bestäm en funktion som har laplacetransform $\operatorname{Log}(1+1/s^2)$, $\operatorname{Re} s > 0$.

∗∗10J Antag att $u \in \mathcal{L}^1_T$. Visa att $\mathscr{L}(u\chi)(s) = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T u(t)e^{-st}\,dt$, $\operatorname{Re} s > 0$.

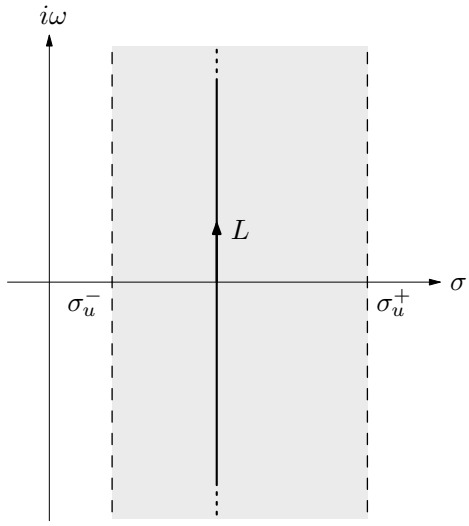
∗∗10K Låt $u, v \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och antag att $\Sigma_u \cap \Sigma_v = \varnothing$ men att $\Sigma_u \neq \varnothing$ och $\Sigma_v \neq \varnothing$. Visa att $\Sigma_{u+v} = \varnothing$.

Föreläsning 11

Laplacetransform och distributioner

Inom många tillämpningsområden är det otillräckligt att bara kunna laplacetransformera lokalt integrerbara funktioner. Vi ska därför utvidga laplacetransformen så att godtyckliga distributioner i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ kan transformeras.

Som vi såg på förra föreläsningen är laplacetransformen $\hat{u}$ av en funktion $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ i normalfallet en analytisk funktion definierad i ett vertikalt band av s-planet. För att se hur laplacetransformen av en distribution ska definieras behöver vi veta "hur $\hat{u}$ verkar på testfunktioner". Detta är en helt ny situation, eftersom vi hittills enbart har arbetat med testfunktioner och distributioner definierade på delintervall av $\mathbb{R}$.



Det faller sig dock ganska naturligt här att som testfunktioner välja vissa funktioner som till att börja med är analytiska och definierade i hela s-planet, och att definiera $\hat{u}$:s verkan på en sådan testfunktion ψ genom att integrera $\hat{u}\psi$:s värden längs en vertikal linje L i s-planet. Verkan blir oberoende av vilken linje som väljs om testfunktionerna går mot noll på lämpligt sätt då $s \to \infty$ i imaginärled.

Om $\sigma \in \Sigma_u$ så är $\hat{u}(s)$ definierad på den linje som ges av $\operatorname{Re} s = \sigma$, och en formell räkning (jämför med sats 9.1) ger då att verkan av $\hat{u}$ på en testfunktion ψ ges av

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\sigma + i\omega)\psi(\sigma + i\omega)\,d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}\,dt\right)\psi(\sigma + i\omega)\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\omega)e^{-(\sigma+i\omega)t}\,d\omega\right)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\hat{\psi}(t)\,dt,\end{aligned}$$

där vi låter $\hat{\psi}(t)$ beteckna värdet av den t-beroende integralen av ψ i det näst sista ledet, som med lämpliga villkor på testfunktionerna blir oberoende av σ. Laplacetransformen av en distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ bör alltså definieras genom

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle = \langle u, \hat{\psi} \rangle,$$

och för att detta ska ha mening måste det gälla att $\hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ för alla testfunktioner ψ.

Detta motiverar definitionen av vad vi kallar *analytiska testfunktioner* nedan. När vi sedan har infört motsvarande *analytiska distributioner* så kommer vi att kunna definiera laplacetransformen för godtyckliga distributioner i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Analytiska distributioner

11.1 Rummet $\mathcal{H}$ av analytiska testfunktioner Med en *analytisk testfunktion* menar vi en analytisk funktion $\psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ sådan att funktionen $\omega\mapsto\psi(i\omega)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och sådan att $\hat{\psi}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, där

$$\hat{\psi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(i\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Vi låter $\mathcal{H}$ beteckna mängden av alla analytiska testfunktioner. Av definitionen följer att $\mathcal{H}$ är ett linjärt rum, och att avbildningen $\psi\mapsto\hat{\psi}$, från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, är linjär. Vi visar nu att denna avbildning är inverterbar.

Låt $\psi\in\mathcal{H}$. Fouriers inversionsformel (sats 7.11) ger att $\psi(i\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(t)e^{i\omega t}\,dt$ för alla $\omega\in\mathbb{R}$. Eftersom ψ är analytisk medför detta att ψ är fullständigt bestämd av $\hat{\psi}$, vilket ger att avbildningen $\psi\mapsto\hat{\psi}$ från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ är injektiv.

Låt $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ och sätt $\psi(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{st}\,dt$ för $s\in\mathbb{C}$. Av sats 10.4 följer att ψ är analytisk, och eftersom $\varphi\in\mathcal{S}$ (se 9.2) ger sats 9.14 att funktionen $\omega\mapsto\psi(i\omega)$ tillhör $\mathcal{S}$ och därmed $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Av Fouriers inversionsformel följer nu att $\hat{\psi}=\varphi$, vilket ger att $\psi\in\mathcal{H}$ och att avbildningen $\psi\mapsto\hat{\psi}$ från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ är surjektiv. Det ger också, med hjälp av injektiviteten ovan, att det för varje $\psi\in\mathcal{H}$ gäller att

$$\psi(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(t)e^{st}\,dt,\quad s\in\mathbb{C},$$

så Fouriers inversionsformel medför att det för varje $\psi\in\mathcal{H}$ och $\sigma\in\mathbb{R}$ gäller att

$$\hat{\psi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\omega)e^{-(\sigma+i\omega)t}\,d\omega,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Avbildningen $\psi\mapsto\hat{\psi}$ från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ är alltså linjär och inverterbar. Vi definierar konvergens i rummet $\mathcal{H}$ så att denna avbildning och dess invers blir kontinuerliga, det vill säga: om $\psi,\psi_n\in\mathcal{H}$, $n=1,2,\ldots$, så sägs följden ψ_n *konvergera mot* ψ *i* $\mathcal{H}$ om och endast om $(\psi_n)\hat{}\to\hat{\psi}$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

För varje $\sigma\in\mathbb{R}$ är avbildningen $\psi\mapsto\psi_\sigma$, där $\psi_\sigma(\omega)=\psi(\sigma+i\omega)$ för alla $\omega\in\mathbb{R}$, en kontinuerlig linjär avbildning från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{S}$, eftersom den kan ses som sammansättningen

$$\psi\in\mathcal{H}\quad\longmapsto\quad\hat{\psi}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\quad\longmapsto\quad\hat{\psi}(t)e^{\sigma t}\in\mathcal{D}(\mathbb{R})\quad\overset{\mathscr{F}^{-1}}{\longmapsto}\quad\psi_\sigma\in\mathcal{S}.$$

Det följer med hjälp av sats 9.3 att värderummet för avbildningen $\psi\mapsto\psi_\sigma$ är tätt i $\mathcal{S}$, det vill säga: om $\varphi\in\mathcal{S}$ så finns en följd ψ_n, $n=1,2,\ldots$, i $\mathcal{H}$ sådan att $(\psi_n)_\sigma\to\varphi$ i $\mathcal{S}$.

Rummet $\mathcal{H}$ och dess konvergensbegrepp kan också beskrivas mera direkt:

11.2 Sats *Rummet $\mathcal{H}$ består av de analytiska funktioner $\psi\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ för vilka det finns konstanter C_0, C_1, …, och $A\geq 0$ sådana att*

$$|s^k\psi(s)|\leq C_k e^{A|\operatorname{Re}s|},\quad s\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}.$$

Om $\psi,\psi_n\in\mathcal{H}$, $n=1,2,\ldots$, så gäller att $\psi_n\to\psi$ i $\mathcal{H}$ om och endast om det finns konstanter C_0, C_1, …, och $A\geq 0$ sådana att

$$|s^k\psi_n(s)|\leq C_k e^{A|\operatorname{Re}s|},\quad s\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N},\ n\geq 1,$$

och $\psi_n\to\psi$ likformigt på varje kompakt delmängd av s-planet.

Bevis Antag att $\psi \in \mathcal{H}$. Då är ψ en analytisk funktion från $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C}$, och vi får genom partiell integration att

$$s^k\psi(s) = s^k \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t)e^{st}\,dt = \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}^{(k)}(t)e^{st}\,dt, \quad s \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}.$$

Eftersom $\hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ finns ett $A \geq 0$ sådant att $\hat{\psi}(t) = 0$ då $|t| > A$, vilket medför att

$$|s^k\psi(s)| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} |\hat{\psi}^{(k)}(t)|\,dt\right)e^{A|\operatorname{Re} s|}, \quad s \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Med $C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} |\hat{\psi}^{(k)}(t)|\,dt$ har vi alltså att $|s^k\psi(s)| \leq C_k e^{A|\operatorname{Re} s|}$ för $s \in \mathbb{C}$ och $k \in \mathbb{N}$.

Antag omvänt att $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ är en analytisk funktion och att det finns konstanter C_0, C_1, …, och $A \geq 0$ sådana att $|s^k\psi(s)| \leq C_k e^{A|\operatorname{Re} s|}$ för $s \in \mathbb{C}$ och $k \in \mathbb{N}$. Dessa olikheter medför, eftersom ψ är kontinuerlig, att funktionerna $\omega \mapsto \omega^k\psi(i\omega)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ för alla $k \in \mathbb{N}$, så sats 7.10 ger att $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Olikheterna medför också, tillsammans med Cauchys integralsats, att

$$\hat{\psi}(t) = \int_{L_0} \psi(s)e^{-st}\,\frac{ds}{i} = \int_{L_\sigma} \psi(s)e^{-st}\,\frac{ds}{i} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\omega)e^{-(\sigma+i\omega)t}\,d\omega, \quad t, \sigma \in \mathbb{R},$$

där L_0 och L_σ är linjerna $s = i\omega$ respektive $s = \sigma + i\omega$ då ω går från $-\infty$ till ∞. Detta ger, eftersom $|(\sigma + i\omega)^2\psi(\sigma + i\omega)| \leq C_2 e^{A|\sigma|}$, att

$$|\hat{\psi}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\sigma + i\omega)|e^{-\sigma t}\,d\omega \leq e^{A|\sigma|-\sigma t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_2}{1+\omega^2}\,d\omega, \quad t \in \mathbb{R},\ |\sigma| \geq 1.$$

Om $t > A$ eller $t < -A$ så får vi att $\hat{\psi}(t) = 0$ genom att låta σ gå mot ∞ respektive $-\infty$. Vi har alltså att $\hat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vilket ger att $\psi \in \mathcal{H}$.

Därmed har vi bevisat den första delen av satsen, och vi bevisar nu den andra delen. Låt $\psi, \psi_n \in \mathcal{H}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Antag att $\psi_n \to \psi$ i $\mathcal{H}$. Då har vi per definition att $(\psi_n)\hat{} \to \hat{\psi}$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, så det finns ett $A \geq 0$ sådant att $(\psi_n)\hat{}(t) = \hat{\psi}(t) = 0$ då $|t| > A$, och $((\psi_n)\hat{})^{(k)} \to \hat{\psi}^{(k)}$ likformigt för alla $k \in \mathbb{N}$. Som ovan (se $(*)$) ger detta att det finns konstanter C_0, C_1, …, sådana att $|s^k\psi_n(s)| \leq C_k e^{A|\operatorname{Re} s|}$ för $s \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ och $n \geq 1$. Vidare, om K är en kompakt delmängd av s-planet så medför olikheten

$$|\psi_n(s) - \psi(s)| \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} |(\psi_n)\hat{}(t) - \hat{\psi}(t)|\,dt\right)e^{A|\operatorname{Re} s|}, \quad s \in \mathbb{C},\ n \geq 1,$$

att $\psi_n \to \psi$ likformigt på K, eftersom $\operatorname{Re} s$ är begränsad på K.

Antag omvänt att $\psi_n \to \psi$ likformigt på varje kompakt delmängd av s-planet och att det finns konstanter C_0, C_1, …, och $A \geq 0$ sådana att $|s^k\psi_n(s)| \leq C_k e^{A|\operatorname{Re} s|}$ för $s \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ och $n \geq 1$. Av dessa olikheter får vi för $n \geq 1$ att $(\psi_n)\hat{}(t) = 0$ då $|t| > A$, på samma sätt som tidigare i detta bevis. Vidare medför sats 7.4 (i) att

$$\left|((\psi_n)\hat{})^{(k)}(t) - \hat{\psi}^{(k)}(t)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^k \left|\psi_n(i\omega) - \psi(i\omega)\right|\,d\omega, \quad t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},\ n \geq 1,$$

så av det ovanstående följer att $((\psi_n)\hat{})^{(k)} \to \hat{\psi}^{(k)}$ likformigt för alla $k \in \mathbb{N}$. Vi har alltså att $(\psi_n)\hat{} \to \hat{\psi}$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, och därmed att $\psi_n \to \psi$ i $\mathcal{H}$. $\square$

11.3 Operationer på analytiska testfunktioner Om vi har en linjär och kontinuerlig operation på rummet $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ så ger den genom avbildningen $\psi \mapsto \hat{\psi}$, från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, upphov till en linjär och kontinuerlig operation på rummet $\mathcal{H}$.

Tag till exempel operationen $\varphi \mapsto t\varphi$ på $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Om $\psi \in \mathcal{H}$ och vi sätter $\varphi = \hat{\psi}$ så gäller att $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ och att $\psi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{st}\,dt$ för alla $s \in \mathbb{C}$. Vi får nu att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi(t)e^{st}\,dt = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{st}\,dt\right) = \psi'(s), \quad s \in \mathbb{C},$$

eftersom derivering under integraltecknet är tillåtet enligt sats A.19. Operationen $\varphi \mapsto t\varphi$ på $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ motsvaras alltså av operationen $\psi \mapsto \psi'$ på $\mathcal{H}$. Detta visar att derivering är en linjär och kontinuerlig operation på $\mathcal{H}$.

På liknande sätt kan man visa att följande operationer är linjära och kontinuerliga på rummet $\mathcal{H}$: speglingen $\psi(s) \mapsto \psi(-s)$, omskalningarna $\psi(s) \mapsto \psi(as)$ för $a > 0$, translationerna $\psi(s) \mapsto \psi(s-c)$ för $c \in \mathbb{C}$, och multiplikationerna $\psi(s) \mapsto s\psi(s)$ och $\psi(s) \mapsto e^{as}\psi(s)$ för $a \in \mathbb{R}$.

Konjugeringsoperationen $\varphi \mapsto \overline{\varphi}$ på $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, där $\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi(t)}$ för $t \in \mathbb{R}$, är konjugatlinjär och kontinuerlig. Om $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så har vi att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}e^{st}\,dt = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)e^{\bar{s}t}\,dt}, \quad s \in \mathbb{C},$$

så för $\psi \in \mathcal{H}$ definierar vi ψ:s *konjugering* $\overline{\psi}$ genom $\overline{\psi}(s) = \overline{\psi(\bar{s})}$ för $s \in \mathbb{C}$. Det följer att operationen $\psi \mapsto \overline{\psi}$ är konjugatlinjär och kontinuerlig på $\mathcal{H}$.

11.4 Rummet $\mathcal{H}'$ av analytiska distributioner Med en *analytisk distribution* menar vi en linjär funktion $v\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ med egenskapen att om ψ_n, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd i $\mathcal{H}$ sådan att $\psi_n \to 0$ i $\mathcal{H}$ så gäller att $v(\psi_n) \to 0$ då $n \to \infty$. En analytisk distribution är alltså en kontinuerlig linjär funktional på rummet $\mathcal{H}$ av analytiska testfunktioner.

Vi låter $\mathcal{H}'$ beteckna mängden av alla analytiska distributioner. För $v \in \mathcal{H}'$ och $\psi \in \mathcal{H}$ betecknar vi värdet $v(\psi)$ med $\langle v, \psi\rangle$, och för $v, w \in \mathcal{H}'$ och $c \in \mathbb{C}$ definieras $v + w$ och cv genom $\langle v + w, \psi\rangle = \langle v, \psi\rangle + \langle w, \psi\rangle$ och $\langle cv, \psi\rangle = c\langle v, \psi\rangle$, för $\psi \in \mathcal{H}$. Det följer att $v + w$ och cv är analytiska distributioner och att $\mathcal{H}'$, med dessa operationer, är ett linjärt rum.

Konvergens i rummet $\mathcal{H}'$ definieras på följande sätt: om $v, v_n \in \mathcal{H}'$, $n = 1, 2, \ldots$, så sägs följden v_n *konvergera mot* v *i* $\mathcal{H}'$ om $\lim_{n\to\infty}\langle v_n, \psi\rangle = \langle v, \psi\rangle$ för alla $\psi \in \mathcal{H}$.

11.5 Analytiska distributioner som ges av funktioner Låt $\sigma \in \mathbb{R}$ och låt L_σ vara den linje i s-planet som ges av $\operatorname{Re} s = \sigma$. Antag att v är en komplexvärd funktion som är definierad åtminstone på L_σ, att $v_\sigma \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, där v_σ ges av $v_\sigma(\omega) = v(\sigma + i\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, och att v_σ ger upphov till en tempererad distribution (se 9.6). Då får vi en analytisk distribution, betecknad $v_{\mathcal{H}',\sigma}$, genom att sätta

$$\langle v_{\mathcal{H}',\sigma}, \psi\rangle = \langle (v_\sigma)_{\mathcal{S}'}, \psi_\sigma\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

eftersom $\psi \mapsto \psi_\sigma$ är en kontinuerlig linjär avbildning från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{S}$ (se 11.1). Om v_σ även uppfyller integralvillkoret i sats 9.6, till exempel om v_σ har högst polynomiell tillväxt, så har vi att

$$\langle v_{\mathcal{H}',\sigma}, \psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v(\sigma + i\omega)\psi(\sigma + i\omega)\,d\omega = \int_{L_\sigma} v(s)\psi(s)\,\frac{ds}{i}, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

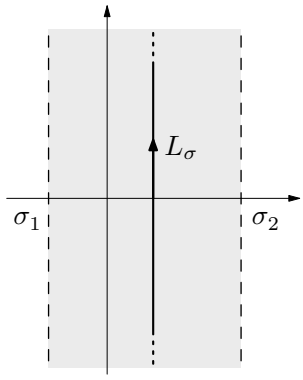
där L_σ parametriseras genom $s = \sigma + i\omega$ då ω går från $-\infty$ till ∞.

Om v_σ är kontinuerlig i en punkt $\omega \in \mathbb{R}$ så är värdet $v_\sigma(\omega)$ entydigt bestämt av $v_{\mathcal{H}',\sigma}$, ty sats 1.21 medför att $v_\sigma(\omega)$ är entydigt bestämt av $(v_\sigma)_{\mathcal{S}'}$ om v_σ är kontinuerlig i ω, och som i 9.5 följer att $(v_\sigma)_{\mathcal{S}'}$ är entydigt bestämd av $v_{\mathcal{H}',\sigma}$ eftersom mängden $\{\psi_\sigma;\ \psi \in \mathcal{H}\}$ är tät i $\mathcal{S}$ (se 11.1).

Låt nu $-\infty \le \sigma_1 < \sigma_2 \le \infty$ och antag att v är en analytisk funktion som är definierad i det område av s-planet som ges av $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$, och att det för varje kompakt delintervall K av $]\sigma_1, \sigma_2[$ finns konstanter $C \ge 0$ och $k \in \mathbb{N}$ sådana att $|v(s)| \le C(1 + |s|^k)$ då $\operatorname{Re} s \in K$. Om $\psi \in \mathcal{H}$ följer då av Cauchys integralsats och uppskattningar, där sats 11.2 används, att

$$\int_{L_\sigma} v(s)\psi(s)\,\frac{ds}{i}$$

är absolutkonvergent och oberoende av σ, förutsatt att $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. I detta fall är alltså distributionen $v_{\mathcal{H}',\sigma}$ bestämd av att v (inklusive v:s definitionsmängd) är given, och vi betecknar den då med $v_{\mathcal{H}'}$. Ibland kommer vi dock att beteckna $v_{\mathcal{H}'}$ med enbart v, och vad som avses får då framgå av sammanhanget.



11.6 Exempel Låt s_+^{-1} och s_-^{-1} beteckna de analytiska distributioner som ges av den analytiska funktionen $1/s$ på de områden som definieras av $\operatorname{Re} s > 0$ respektive $\operatorname{Re} s < 0$, det vill säga,

$$s_+^{-1} = \left(\frac{1}{s},\ \operatorname{Re} s > 0\right)_{\mathcal{H}'} \quad \text{och} \quad s_-^{-1} = \left(\frac{1}{s},\ \operatorname{Re} s < 0\right)_{\mathcal{H}'}.$$

Verkan av s_+^{-1} och s_-^{-1} på en godtycklig analytisk testfunktion $\psi \in \mathcal{H}$ ges alltså av

$$\langle s_+^{-1}, \psi\rangle = \int_{L_+} \frac{1}{s}\psi(s)\,\frac{ds}{i} \quad \text{respektive} \quad \langle s_-^{-1}, \psi\rangle = \int_{L_-} \frac{1}{s}\psi(s)\,\frac{ds}{i},$$

där linjerna $L_\pm$ ges av $s = \pm 1 + i\omega$ då ω går från $-\infty$ till ∞. (Som $L_\pm$ kunde vi lika gärna valt linjerna $s = \pm\sigma + i\omega$ då ω går från $-\infty$ till ∞, för ett godtyckligt $\sigma > 0$.)

Vad är relationen mellan s_+^{-1} och s_-^{-1}? Svaret är att

$$\langle s_+^{-1}, \psi\rangle - \langle s_-^{-1}, \psi\rangle = 2\pi\psi(0), \quad \psi \in \mathcal{H}. \tag{$*$}$$

För att se detta, låt sträckorna $L_{\pm,R}$ ges av $s = \pm 1 + i\omega$ då ω går från $-R$ till R, och låt $S_{\pm,R}$ vara sträckorna givna av $s = \sigma \pm iR$ då σ går från -1 till 1. Residysatsen ger för $R > 0$ att

$$\int_{L_{+,R}\ -\ S_{+,R}\ -\ L_{-,R}\ +\ S_{-,R}} \frac{1}{s}\psi(s)\,\frac{ds}{i} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{s=0} \frac{\psi(s)}{si} = 2\pi\psi(0), \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

När $R \to \infty$ följer av sats 11.2 att integralerna över $S_{\pm,R}$ går mot noll, så vi får att

$$\int_{L_+} \frac{1}{s}\psi(s)\,\frac{ds}{i} - \int_{L_-} \frac{1}{s}\psi(s)\,\frac{ds}{i} = 2\pi\psi(0), \quad \psi \in \mathcal{H},$$

vilket visar att $(*)$ gäller. Detta betyder att $s_+^{-1} - s_-^{-1} = 2\pi\delta$, där vi föregripit definitionen av diracimpulsen som analytisk distribution (se 11.7 nedan).

11.7 Diracimpulsen Som analytisk distribution definieras diracimpulsen δ genom

$$\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0), \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Att δ är en analytisk distribution (se definitionen i 11.4) följer av sats 11.2. Mera allmänt har vi också för $c \in \mathbb{C}$ att "diracimpulsen i c", som betecknas δ_c och definieras genom

$$\langle \delta_c, \psi \rangle = \psi(c), \quad \psi \in \mathcal{H},$$

är en analytisk distribution.

11.8 En avbildning från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{H}'$ Givet en tempererad distribution $u \in \mathcal{S}'$ kan vi definiera en analytisk distribution, betecknad $u^{\mathcal{H}'}$, genom

$$\langle u^{\mathcal{H}'}, \psi \rangle = \langle u, \psi_0 \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

eftersom $\psi \mapsto \psi_0$, där ψ_0 ges av $\psi_0(\omega) = \psi(i\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, är en kontinuerlig linjär avbildning från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{S}$ (se 11.1). Det följer att avbildningen $u \mapsto u^{\mathcal{H}'}$ från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{H}'$ är linjär, och eftersom mängden $\{\psi_0;\, \psi \in \mathcal{H}\}$ är tät i $\mathcal{S}$ (se 11.1) är avbildningen också injektiv.

Avbildningen $u \mapsto u^{\mathcal{H}'}$ från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{H}'$ är alltså linjär och injektiv, men den bevarar inte vissa vanliga operationer (till exempel derivering), så det är inte särskilt lämpligt att betrakta $\mathcal{S}'$ som ett underrum av $\mathcal{H}'$ via denna avbildning.

11.9 Operationer på analytiska distributioner Samma operationer som vi tidigare definierade för distributioner i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (se föreläsning 2) kan definieras också för analytiska distributioner, men vissa detaljer skiljer sig åt.

Låt $v \in \mathcal{H}'$ vara en analytisk distribution. Då definieras v:s *derivata* v' genom

$$\langle v', \psi \rangle = -\langle v, \psi' \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Detta utvidgar den vanliga derivatan av analytiska funktioner.

Med en *multiplikator på* $\mathcal{H}'$ menar vi en analytisk funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ för vilken det finns konstanter C, k och A sådana att $|f(s)| \le C(1 + |s|^k)e^{A|\operatorname{Re} s|}$ för $s \in \mathbb{C}$. Om f är en multiplikator på $\mathcal{H}'$ så kan *produkten* fv av f och v definieras genom

$$\langle fv, \psi \rangle = \langle v, f\psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

ty det följer då av sats 11.2 att $\psi \mapsto f\psi$ är en linjär och kontinuerlig avbildning på $\mathcal{H}$.

Affina variabelbyten: om $0 \neq a \in \mathbb{R}$ och $c \in \mathbb{C}$ definieras $v(as + c)$ genom

$$\big\langle v(as + c), \psi(s) \big\rangle = \frac{1}{|a|} \big\langle v(s), \psi\big((s - c)/a\big) \big\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

och som viktiga specialfall får vi speglingen $v(-s)$, omskalningarna $v(as)$ för $a > 0$, och translationerna $v(s - c)$ för $c \in \mathbb{C}$.

Konjugeringen $\bar{v}$ av v definieras genom

$$\langle \bar{v}, \psi \rangle = \overline{\langle v, \bar{\psi} \rangle}, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

där $\bar{\psi}$ betecknar konjugeringen av ψ definierad i 11.3. För en funktion $v(s)$ innebär detta att $\bar{v}$ definieras genom $\bar{v}(s) = \overline{v(\bar{s})}$, vilket till exempel ger att om $\bar{v} = v$ så är v reellvärd på realaxeln i s-planet.

Av definitionerna av operationerna ovan följer att de är linjära (utom konjugering som är konjugatlinjär) och kontinuerliga operationer på $\mathcal{H}'$.

Följande två satser spelar en grundläggande roll när man löser ekvationer där analytiska distributioner ingår. När man väl har tillgång till laplacetransformen för distributioner, som vi inför i nästa avsnitt, blir dessa satser direkta följdsatser till sats 2.17 respektive sats 2.14. Vi utelämnar därför deras bevis.

11.10 Sats *Antag att $v \in \mathcal{H}'$ och att $v' = 0$. Då är $v = C$ för någon konstant $C \in \mathbb{C}$.* □

11.11 Sats *Antag att $v \in \mathcal{H}'$, att $c \in \mathbb{C}$, och att $(s-c)v = 0$. Då är $v = C\delta_c$ för någon konstant $C \in \mathbb{C}$.* □

Följande sats, som ofta kommer till användning, är en generalisering av sats 11.11. Den kan bevisas genom att använda sats 11.11 upprepade gånger, eller genom att med hjälp av laplacetransformen för distributioner visa att den är ekvivalent med sats 2.16.

11.12 Sats *Alla lösningar $v \in \mathcal{H}'$ till ekvationen $(s-c_1)^{m_1} \dots (s-c_k)^{m_k} v = 0$, där $k \geq 1$, $m_1, \dots, m_k \geq 1$, och $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ är distinkta ges av*

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_i - 1} C_{i,j}\, \delta_{c_i}^{(j)},$$

där $C_{i,j} \in \mathbb{C}$ är en godtycklig konstant, för $i = 1, \dots, k$ och $j = 0, \dots, m_i - 1$. □

Divisionsproblemet för distributioner (se föreläsning 2) är i allmänhet enklare att hantera i $\mathcal{H}'$ än i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

11.13 Exempel Finns det någon lösning $v \in \mathcal{H}'$ till ekvationen $sv = 1$? Ja, till exempel kan vi ta $v = \big(1/s,\, \operatorname{Re} s > 0\big)_{\mathcal{H}'}$. Då har vi att

$$\langle sv, \psi \rangle = \langle v, s\psi \rangle = \int_L \frac{1}{s} s\psi(s) \frac{ds}{i} = \int_L \psi(s) \frac{ds}{i} = \langle 1, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

vilket visar att $sv = 1$. Här är L en linje $s = \sigma + i\omega$ då ω går från $-\infty$ till ∞, för något godtyckligt $\sigma > 0$. (Jämför med utredningen av motsvarande fråga för $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i 2.20).

11.14 Exempel Vi bestämmer ett $v \in \mathcal{H}'$ sådant att $s^2 v = \delta'''$.

Eftersom $\langle \delta''', \psi \rangle = (-1)^3 \langle \delta, \psi''' \rangle = -\psi'''(0)$ för alla $\psi \in \mathcal{H}$ ger Cauchys integralformel för derivator (se till exempel [2] eller [12]) att

$$\langle \delta''', \psi \rangle = -\frac{3!}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(s)}{s^4}\, ds, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

där C är cirkeln $s = e^{i\theta}$ då θ går från 0 till 2π. Så vi definierar $v \in \mathcal{H}'$ genom

$$\langle v, \psi \rangle = -\frac{3!}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(s)}{s^6}\, ds, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

ty då följer att $\langle s^2 v, \psi \rangle = \langle v, s^2 \psi \rangle = \langle \delta''', \psi \rangle$ för alla $\psi \in \mathcal{H}$, det vill säga att $s^2 v = \delta'''$. Vi förenklar v genom att återigen använda Cauchys integralformel för derivator:

$$\langle v, \psi \rangle = -\frac{3!\, \psi^{(5)}(0)}{5!} = -\frac{\psi^{(5)}(0)}{20}, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

så vi får att $v = \delta^{(5)}/20$. (Alla lösningar $v \in \mathcal{H}'$ till $s^2 v = \delta'''$ ges därför enligt sats 11.12 av $v = \delta^{(5)}/20 + C\delta + D\delta'$, där $C, D \in \mathbb{C}$ är godtyckliga konstanter.)

Laplacetransform av distributioner

11.15 Definition För en distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definierar vi *laplacetransformen* av u, betecknad $\hat{u}$ eller $\mathscr{L}u$, som den analytiska distribution som ges av

$$\langle \hat{u}, \psi \rangle = \langle u, \hat{\psi} \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

där, som i 11.1,

$$\hat{\psi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(i\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Att $\hat{u}$ verkligen tillhör $\mathcal{H}'$ visar vi i sats 11.18.

För en funktion $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ kallar vi $\mathscr{L}(u_{\mathcal{D}'})$, där $u_{\mathcal{D}'}$ är den distribution i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som ges av u (se sats 1.17), för *laplacetransformen av u i distributionsmening.* Om $\Sigma_u \neq \varnothing$ (se 10.3) så stämmer definitionerna 11.15 och 10.1 av u:s laplacetransform överens, vilket vi visar i sats 11.19. Om $\Sigma_u = \varnothing$ så är definition 10.1 inte av intresse, och vi kommer då ofta att utelämna preciseringen ”i distributionsmening” när vi talar om $\mathscr{L}(u_{\mathcal{D}'})$.

11.16 Exempel Vi beräknar laplacetransformen av diracimpulsen $\delta(t)$.

Definition 11.15 ger att

$$\begin{aligned}\big\langle \hat{\delta}(s), \psi(s) \big\rangle &= \big\langle \delta(t), \hat{\psi}(t) \big\rangle = \hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(i\omega) e^{-i\omega 0}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(i\omega)\, d\omega \\ &= \big\langle 1(s), \psi(s) \big\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},\end{aligned}$$

där $1(s)$ betecknar den funktion som har värdet 1 för alla $s \in \mathbb{C}$. Laplacetransformen av diracimpulsen $\delta(t)$ är alltså den analytiska distribution som ges av funktionen $1(s)$, eller kortare uttryckt: $\hat{\delta} = 1$.

11.17 Exempel Vi beräknar laplacetransformen i distributionsmening av den konstanta funktionen $1(t)$, det vill säga den funktion som har värdet 1 för alla $t \in \mathbb{R}$.

Notera att funktionen $1(t)$ tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Dess laplacetransform i definition 10.1:s mening är dock en funktion med tom definitionsmängd, vilket inte är speciellt användbart. Definition 11.15 ger däremot att

$$\begin{aligned}\big\langle \hat{1}(s), \psi(s) \big\rangle &= \big\langle 1(t), \hat{\psi}(t) \big\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t)\, dt = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t) e^{0t}\, dt = 2\pi\psi(0) \\ &= 2\pi \big\langle \delta(s), \psi(s) \big\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Laplacetransformen av funktionen $1(t)$ är alltså $2\pi\delta(s)$, eller kortare uttryckt: $\hat{1} = 2\pi\delta$.

11.18 Sats *Laplacetransformen $\mathscr{L}$ avbildar $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ på $\mathcal{H}'$, och $\mathscr{L}\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}'$ är en linjär, inverterbar och kontinuerlig avbildning.*

Bevis I detta bevis låter vi L beteckna avbildningen $\psi \mapsto \hat{\psi}$ från $\mathcal{H}$ till $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, som är linjär och inverterbar (se 11.1). Konvergensbegreppet i rummet $\mathcal{H}$ är definierat på ett sådant sätt att både L och dess invers L^{-1} är kontinuerliga (se 11.1).

Låt $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Definition 11.15 säger att $(\mathscr{L}u)(\psi) = u(L\psi)$ för alla $\psi \in \mathcal{H}$, så vi har att $\mathscr{L}u = u \circ L$ (där tecknet $\circ$ betecknar sammansättning av funktioner). Eftersom L och u är linjära och kontinuerliga följer att $\mathscr{L}u$ är linjär och kontinuerlig, så $\mathscr{L}u \in \mathcal{H}'$.

Laplacetransformen är alltså en avbildning från $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till $\mathcal{H}'$. För att visa dess linjäritet låter vi $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och $c \in \mathbb{C}$. Då har vi för alla $\psi \in \mathcal{H}$ att

$$\langle (u+v)\hat{}, \psi\rangle = \langle u+v, \hat{\psi}\rangle = \langle u, \hat{\psi}\rangle + \langle v, \hat{\psi}\rangle = \langle \hat{u}, \psi\rangle + \langle \hat{v}, \psi\rangle = \langle \hat{u}+\hat{v}, \psi\rangle,$$

och att

$$\langle (cu)\hat{}, \psi\rangle = \langle cu, \hat{\psi}\rangle = c\langle u, \hat{\psi}\rangle = c\langle \hat{u}, \psi\rangle = \langle c\hat{u}, \psi\rangle,$$

vilket visar att $\mathscr{L}(u+v) = \mathscr{L}u + \mathscr{L}v$ och att $\mathscr{L}(cu) = c\mathscr{L}u$.

Om $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ är sådana att $\mathscr{L}u = \mathscr{L}v$, det vill säga sådana att $u \circ L = v \circ L$, så följer att $u \circ L \circ L^{-1} = v \circ L \circ L^{-1}$ och därmed att $u = v$. Alltså är $\mathscr{L}\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}'$ injektiv. Om vi för ett godtyckligt $v \in \mathcal{H}'$ sätter $u = v \circ L^{-1}$ så följer att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och vi får att $\mathscr{L}u = u \circ L = v \circ L^{-1} \circ L = v$, så $\mathscr{L}\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}'$ är också surjektiv och därmed inverterbar.

Om $u, u_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$, är sådana att $u_n \to u$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ så har vi att

$$\lim_{n\to\infty} \langle \widehat{u_n}, \psi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \hat{\psi}\rangle = \langle u, \hat{\psi}\rangle = \langle \hat{u}, \psi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

det vill säga att $\mathscr{L}u_n \to \mathscr{L}u$ i $\mathcal{H}'$. Detta visar att $\mathscr{L}\colon \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}'$ är kontinuerlig. □

11.19 Sats *Laplacetransformen på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ utvidgar laplacetransformen på $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, det vill säga, $(\mathscr{L}u)_{\mathcal{H}',\sigma} = \mathscr{L}(u_{\mathcal{D}'})$ om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och $\sigma \in \Sigma_u$.*

Bevis Antag att $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och att $\sigma \in \Sigma_u$. Funktionen $u(t)e^{-\sigma t}$ tillhör då $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så sats 7.8 ger att $\mathscr{L}u$ (definierad enligt 10.1) är en kontinuerlig och begränsad funktion på den linje i s-planet som ges av $\operatorname{Re} s = \sigma$. Därmed ger $\mathscr{L}u$ upphov till en analytisk distribution $(\mathscr{L}u)_{\mathcal{H}',\sigma}$ (se 11.5), och vi får att

$$\begin{aligned}
\langle (\mathscr{L}u)_{\mathcal{H}',\sigma}, \psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\sigma+i\omega)\psi(\sigma+i\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}\,dt\Big)\psi(\sigma+i\omega)\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma+i\omega)e^{-(\sigma+i\omega)t}\,d\omega\Big)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\hat{\psi}(t)\,dt \\
&= \langle u_{\mathcal{D}'}, \hat{\psi}\rangle = \langle \mathscr{L}(u_{\mathcal{D}'}), \psi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H},
\end{aligned}$$

där $\mathscr{L}(u_{\mathcal{D}'})$ är definierad enligt 11.15, och bytet av integrationsordning är tillåtet enligt sats A.20 eftersom funktionerna $u(t)e^{-\sigma t}$ och $\omega \mapsto \psi(\sigma+i\omega)$ tillhör $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alltså har vi att $(\mathscr{L}u)_{\mathcal{H}',\sigma} = \mathscr{L}(u_{\mathcal{D}'})$. □

11.20 Sats *Laplacetransformen på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ utvidgar fouriertransformen på $\mathcal{S}'$, det vill säga, $(\mathscr{F}u)^{\mathcal{H}'} = \mathscr{L}(u^{\mathcal{D}'})$ om $u \in \mathcal{S}'$.*

Bevis Antag att $u \in \mathcal{S}'$. Vi får enligt 11.8, 9.15, 11.1, 9.5 och 11.15 att

$$\begin{aligned}
\langle (\mathscr{F}u)^{\mathcal{H}'}, \psi\rangle &= \langle \mathscr{F}u, \psi_0\rangle = \langle u, \mathscr{F}\psi_0\rangle \\
&= \langle u, \hat{\psi}\rangle = \langle u^{\mathcal{D}'}, \hat{\psi}\rangle = \langle \mathscr{L}(u^{\mathcal{D}'}), \psi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}' \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "(9.5)"'] & \mathcal{S}' \arrow[d, "(11.8)"] \\
\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \mathcal{H}'
\end{tikzcd}$$

Alltså har vi att $(\mathscr{F}u)^{\mathcal{H}'} = \mathscr{L}(u^{\mathcal{D}'})$. □

11.21 Exempel Sedan tidigare vet vi att laplacetransformen av stegfunktionen $\chi(t)$ är funktionen $1/s$, $\operatorname{Re} s > 0$. Vi ska nu använda detta för att bestämma stegfunktionens fouriertransform i distributionsmening, $\mathscr{F}(\chi_{\mathcal{S}'})$ (se definition 9.15).

Sats 11.19 ger att laplacetransformen av χ i distributionsmening, det vill säga $\mathscr{L}(\chi_{\mathcal{D}'})$, är den analytiska distribution som ges av funktionen $1/s$, $\operatorname{Re} s > 0$, så

$$\langle \mathscr{L}(\chi_{\mathcal{D}'}), \psi \rangle = \int_L \frac{1}{s}\,\psi(s)\,\frac{ds}{i}, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

där linjen L ges av $s = 1 + i\omega$ då ω går från $-\infty$ till ∞. Enligt Cauchys integralsats och uppskattningar baserade på sats 11.2 kan linjen L ersättas med konturen $L_\varepsilon + C_\varepsilon$, där $\varepsilon > 0$, L_ε är de två halvlinjerna $s = i\omega$ då ω går från $-\infty$ till $-\varepsilon$ och från ε till ∞, och C_ε är halvcirkeln $s = \varepsilon e^{i\theta}$ då θ går från $-\pi/2$ till $\pi/2$. Vi har alltså att

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{L}(\chi_{\mathcal{D}'}), \psi \rangle &= \int_{L_\varepsilon} \frac{\psi(s)}{s}\,\frac{ds}{i} + \int_{C_\varepsilon} \frac{\psi(s)}{s}\,\frac{ds}{i} = \int_{|\omega|\geq\varepsilon} \frac{\psi(i\omega)}{i\omega}\,\frac{i\,d\omega}{i} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\psi(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\,\frac{\varepsilon e^{i\theta} i\,d\theta}{i} \\ &= -i\int_{|\omega|\geq\varepsilon} \frac{\psi_0(\omega)}{\omega}\,d\omega + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta, \quad \psi \in \mathcal{H},\end{aligned}$$

där $\psi_0(\omega) = \psi(i\omega)$ för $\omega \in \mathbb{R}$. Vi låter nu $\varepsilon \to 0+$ och får (jämför med övning 2H) att

$$\langle \mathscr{L}(\chi_{\mathcal{D}'}), \psi \rangle = -i\langle \underline{\omega}^{-1}, \psi_0 \rangle + \pi\psi(0) = \langle -i\underline{\omega}^{-1} + \pi\delta(\omega), \psi_0 \rangle, \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Detta ger att $\mathscr{F}(\chi_{\mathcal{S}'}) = -i\underline{\omega}^{-1} + \pi\delta(\omega)$, enligt sats 11.20 och egenskaperna för avbildningen från $\mathcal{S}'$ till $\mathcal{H}'$ som definierades i 11.8.

11.22 Mängden Σ för distributioner För $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definierar vi mängden Σ_u genom

$$\Sigma_u = \big\{\sigma \in \mathbb{R};\ u(t)e^{-\sigma t} \text{ är tempererad}\big\},$$

och vi definierar ”konvergensabskissorna” σ_u^- och σ_u^+ för u genom

$$\sigma_u^- = \inf \Sigma_u \quad \text{och} \quad \sigma_u^+ = \sup \Sigma_u.$$

Notera att u är tempererad om och endast om 0 tillhör mängden Σ_u.

Vi har tidigare definierat mängden Σ_u för $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ (se 10.3). Notera att $\Sigma_u \subseteq \Sigma_{u_{\mathcal{D}'}}$ om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, och att det då kan inträffa att $\sigma^-_{u_{\mathcal{D}'}} < \sigma_u^-$ eller att $\sigma_u^+ < \sigma^+_{u_{\mathcal{D}'}}$.

Låt nu $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Mängden Σ_u, om den inte är tom eller innehåller precis en punkt, är ett intervall, ty om $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_u$ och $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ så följer av likheten

$$u(t)e^{-\sigma t} = \frac{e^{-\sigma t}}{e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}}\big(u(t)e^{-\sigma_1 t} + u(t)e^{-\sigma_2 t}\big)$$

att $\sigma \in \Sigma_u$, eftersom funktionen $e^{-\sigma t}/(e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t})$ är en multiplikator på $\mathcal{S}'$ (se 9.12).

Om u är lika med noll på något intervall $]-\infty, a[$, och $\Sigma_u \neq \varnothing$, så gäller att $\sigma_u^+ = \infty$. För att se detta, antag att $u = 0$ på $]-\infty, a[$ och att $\sigma_1 \in \Sigma_u$. Låt $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vara sådan att $\rho(t) = 1$ då $t \geq a - 1$ och sådan att $\rho(t) = 0$ då $t \leq a - 2$. Om nu $\sigma \geq \sigma_1$ så är funktionen $\rho(t)e^{-(\sigma-\sigma_1)t}$ en multiplikator på $\mathcal{S}'$, så likheten

$$u(t)e^{-\sigma t} = \rho(t)e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\big(u(t)e^{-\sigma_1 t}\big)$$

medför att $\sigma \in \Sigma_u$. Alltså gäller att $[\sigma_1, \infty[\ \subseteq \Sigma_u$ och därmed att $\sigma_u^+ = \infty$.

Analogt, om $u = 0$ på något intervall $]a, \infty[$, och $\Sigma_u \neq \varnothing$, så gäller att $\sigma_u^- = -\infty$.

11.23 Funktionen $\langle u(t), e^{-st}\rangle$ Låt $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och antag att $\sigma_u^- < \sigma_u^+$. Om $s \in \mathbb{C}$ och olikheterna $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$ är uppfyllda så definierar vi "$\langle u(t), e^{-st}\rangle$" genom att sätta

$$\langle u(t), e^{-st}\rangle = \left\langle u(t)e^{-\sigma_1 t} + u(t)e^{-\sigma_2 t}, \frac{e^{-st}}{e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}}\right\rangle,$$

där $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_u$ är valda så att $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$. (Notera att e^{-st} inte är en testfunktion.)

Att detta ger en väldefinierad funktion $\langle u(t), e^{-st}\rangle$, $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$, är en följd av att distributionen $u(t)e^{-\sigma_1 t} + u(t)e^{-\sigma_2 t}$ är tempererad, att funktionen $e^{-st}/(e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t})$ tillhör $\mathcal{S}$, och att värdet av högerledet inte beror på valen av σ_1 och σ_2. För att visa det sista påståendet sätter vi $f(t) = e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}$, $t \in \mathbb{R}$, och låter ρ_n vara som i beviset för sats 9.3. Då har vi enligt beviset för sats 9.3 att $\rho_n e^{-st}/f \to e^{-st}/f$ i $\mathcal{S}$, vilket ger att

$$\langle u(t), e^{-st}\rangle = \left\langle f(t)u(t), \frac{e^{-st}}{f(t)}\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle f(t)u(t), \rho_n(t)\frac{e^{-st}}{f(t)}\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u(t), \rho_n(t)e^{-st}\rangle,$$

där det sista ledet inte beror på valen av σ_1 och σ_2.

Om u har kompakt stöd så följer av sats 9.10 att $\sigma_u^- = -\infty$ och att $\sigma_u^+ = \infty$, och av det ovanstående följer att $\langle u(t), e^{-st}\rangle = \langle u(t), \rho(t)e^{-st}\rangle$ för alla $s \in \mathbb{C}$, där $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ är sådan att $\rho = 1$ i en omgivning av ett intervall som innehåller u:s stöd (jämför med 2.26).

Följande sats ger en slags karakterisering av när laplacetransformen av en distribution ges av en analytisk funktion.

11.24 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att $\sigma_u^- < \sigma_u^+$. Då ges u:s laplacetransform av funktionen $U(s) = \langle u(t), e^{-st}\rangle$, $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$, som är analytisk och har egenskapen att det för varje kompakt delintervall K av $]\sigma_u^-, \sigma_u^+[$ finns konstanter $C \geq 0$ och $k \in \mathbb{N}$ sådana att $|U(s)| \leq C(1 + |s|^k)$ då $\operatorname{Re} s \in K$. I specialfallet att u har kompakt stöd är funktionen U en multiplikator på $\mathcal{H}'$ (se 11.9).*

Antag omvänt att $U(s)$, $-\infty \leq \sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2 \leq \infty$, är en analytisk funktion med egenskapen att det för varje kompakt delintervall K av $]\sigma_1, \sigma_2[$ finns konstanter $C \geq 0$ och $k \in \mathbb{N}$ sådana att $|U(s)| \leq C(1 + |s|^k)$ då $\operatorname{Re} s \in K$. Den inversa laplacetransformen av den analytiska distribution som ges av U är då en distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ för vilken $\sigma_u^- \leq \sigma_1$, $\sigma_u^+ \geq \sigma_2$ och $\langle u(t), e^{-st}\rangle = U(s)$ då $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$.

Bevis Vi går bara igenom huvuddragen i detta bevis. Antag först att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att $\sigma_u^- < \sigma_u^+$, och sätt $U(s) = \langle u(t), e^{-st}\rangle$, $\sigma_u^- < \operatorname{Re} s < \sigma_u^+$. Med samma teknik som vi använde i beviset av sats 3.13 kan man visa att U är kontinuerligt partiellt deriverbar, och de uttryck för derivatorna man då får ger att $\partial U/\partial\omega = i\,\partial U/\partial\sigma$. Alltså är U analytisk. Uppskattningarna för U, respektive att U är en multiplikator på $\mathcal{H}'$ om u har kompakt stöd, följer av kontinuitetsvillkoren för distributioner i $\mathcal{S}'$ respektive i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och uttrycken för $\langle u(t), e^{-st}\rangle$ i 11.23 (jämför med beviset av sats 9.19). Att u:s laplacetransform ges av U kan man visa genom ett "byte av integrationsordning", som i beviset av sats 9.19.

Antag nu att $U(s)$, $\sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2$, är en analytisk funktion och att uppskattningarna för U i satsens andra del är uppfyllda. Sätt $u = \mathscr{L}^{-1}(U_{\mathcal{H}'})$ och antag att $\sigma \in \mathbb{R}$ är sådant att $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Om $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så ger omskrivningar att $\langle e^{-\sigma t}u, \varphi\rangle = \langle \mathscr{F}^{-1}v, \varphi\rangle$, där v är den tempererade distribution som ges av funktionen $\omega \mapsto U(\sigma + i\omega)$. Alltså är distributionen $u(t)e^{-\sigma t}$ tempererad. Påståendena i satsens andra del följer av detta och satsens första del (och entydighetsresultatet i 11.5). $\square$

Räkneregler

11.25 Sats *Räknereglerna för laplacetransformen, sats 10.7 (a)–(i), gäller om $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (informationen om definitionsmängderna är dock irrelevant i detta sammanhang).*

Bevis Reglerna (a) och (b) (att laplacetransformen är linjär) visade vi i beviset för sats 11.18. Vi visar nedan (g) och (i), om laplacetransformerna av $e^{ct}u(t)$ respektive $tu(t)$. Resten av bevisen följer samma mönster.

(g) Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att $c = a + ib \in \mathbb{C}$. För alla $\psi \in \mathcal{H}$ har vi att

$$\big\langle \big(e^{ct}u(t)\big)\hat{}(s), \psi(s)\big\rangle = \big\langle e^{ct}u(t), \hat{\psi}(t)\big\rangle = \big\langle u(t), e^{ct}\hat{\psi}(t)\big\rangle = \dots$$

Vi vill nu uttrycka $e^{ct}\hat{\psi}(t)$ som transformen av en funktion i $\mathcal{H}$. Det är här smidigast att integrera längs den linje i s-planet som ges av $\operatorname{Re} s = a$:

$$\begin{aligned} e^{ct}\hat{\psi}(t) &= e^{(a+ib)t}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(a+i\omega)e^{-(a+i\omega)t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(a+i\omega)e^{-i(\omega-b)t}\,d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(a+i(\omega+b))e^{-i\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(i\omega+c)e^{-i\omega t}\,d\omega \\ &= \big(\psi(s+c)\big)\hat{}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

och vi kan nu avsluta beräkningen:

$$\dots = \big\langle u(t), \big(\psi(s+c)\big)\hat{}(t)\big\rangle = \big\langle \hat{u}(s), \psi(s+c)\big\rangle = \big\langle \hat{u}(s-c), \psi(s)\big\rangle.$$

Detta visar att laplacetransformen av $e^{ct}u(t)$ är $\hat{u}(s-c)$.

(i) Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. För alla $\psi \in \mathcal{H}$ har vi att

$$\big\langle (tu(t))\hat{}(s), \psi(s)\big\rangle = \big\langle tu(t), \hat{\psi}(t)\big\rangle = \big\langle u(t), t\hat{\psi}(t)\big\rangle = \dots$$

Vi vill nu uttrycka $t\hat{\psi}(t)$ som transformen av en funktion i $\mathcal{H}$. Det åstadkommer vi genom att göra en partialintegration, där den utintegrerade delen blir lika med noll eftersom funktionen $\omega \mapsto \psi(i\omega)$ tillhör $\mathcal{S}$:

$$t\hat{\psi}(t) = t\int_L \psi(s)e^{-st}\,\frac{ds}{i} = -\int_L \psi(s)e^{-st}(-t)\,\frac{ds}{i} = \int_L \psi'(s)e^{-st}\,\frac{ds}{i} = (\psi')\hat{}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

där L är linjen $s = i\omega$ då ω går från $-\infty$ till ∞. Vi får nu att

$$\dots = \big\langle u(t), (\psi')\hat{}(t)\big\rangle = \big\langle \hat{u}(s), \psi'(s)\big\rangle = -\big\langle \hat{u}'(s), \psi(s)\big\rangle,$$

vilket visar att laplacetransformen av $tu(t)$ är $-\hat{u}'(s)$. □

11.26 Exempel Låt $u(t) = e^{ct}$ för $t \in \mathbb{R}$, där $c \in \mathbb{C}$ är en konstant. Vi bestämmer u:s laplacetransform (i distributionsmening).

Exempel 11.17 och sats 11.25 (g) ger att

$$\begin{aligned} 1 \quad &\xrightarrow{\mathscr{L}} \quad 2\pi\delta, \\ e^{ct}1 \quad & \qquad\quad 2\pi\delta(s-c). \end{aligned}$$

Vi har alltså att $\hat{u} = 2\pi\delta_c$.

11.27 Exempel Vi bestämmer alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen

$$y''' - 3y' + 2y = 9\delta'.$$

Eftersom laplacetransformen är inverterbar från $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till $\mathcal{H}'$ gäller följande ekvivalens:

$$y''' - 3y' + 2y = 9\delta', \quad y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad s^3\hat{y} - 3s\hat{y} + 2\hat{y} = 9s, \quad \hat{y} \in \mathcal{H}',$$

där vi använt räkneregeln för laplacetransform av derivator och att $\hat{\delta} = 1$.

Den högra ekvationen kan skrivas $(s-1)^2(s+2)\hat{y} = 9s$. En partikulärlösning till denna ekvation ges av (jämför med exempel 11.13)

$$\left(\frac{9s}{(s-1)^2(s+2)}, \operatorname{Re} s > 1\right)_{\mathcal{H}'},$$

där vi istället för "$\operatorname{Re} s > 1$" lika gärna kunde ha valt "$-2 < \operatorname{Re} s < 1$" eller "$\operatorname{Re} s < -2$". Av sats 11.12 följer nu att det finns konstanter $C, D, E \in \mathbb{C}$ sådana att

$$\hat{y} = \left(\frac{9s}{(s-1)^2(s+2)}, \operatorname{Re} s > 1\right)_{\mathcal{H}'} + C\delta_1 + D\delta_1' + E\delta_{-2}.$$

För att inverstransformera den första termen i högerledet kan vi använda tabell och partialbråksuppdelning, eller inversionsformeln, och diracimpulserna inverstransformerar vi med hjälp av exempel 11.26. Resultatet blir att

$$y = \left(2e^t + 3te^t - 2e^{-2t}\right)\chi + \frac{C}{2\pi}e^t - \frac{D}{2\pi}te^t + \frac{E}{2\pi}e^{-2t}.$$

Alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen ges alltså av

$$y = \left(2e^t + 3te^t - 2e^{-2t}\right)\chi + (F + Gt)e^t + He^{-2t}, \quad F, G, H \in \mathbb{C}.$$

Faltning

Om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ så gäller att faltningen $u * \varphi$ tillhör $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (enligt sats 3.13) och att $(u * \varphi)\hat{}(s) = \hat{u}(s)\hat{\varphi}(s)$, vilket man kan visa på väsentligen samma sätt som vi bevisade sats 9.27. Här nöjer vi oss dock med att utan bevis ge följande allmänna sats om laplacetransformen av en faltning. För ett bevis av denna sats, se till exempel [14].

11.28 Sats *Antag att $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att minst en av u och v har kompakt stöd. Då gäller att $(u * v)\hat{}(s) = \hat{u}(s)\hat{v}(s)$.* □

Notera att högerledet $\hat{u}(s)\hat{v}(s)$ ovan är väldefinierat eftersom laplacetransformen av en distribution med kompakt stöd är en multiplikator på $\mathcal{H}'$ (enligt sats 11.24).

11.29 Systemfunktionen för ett LTI-system Låt S vara ett LTI-system och låt h vara impulssvaret för S (se avsnittet om LTI-system). Laplacetransformen $\hat{h}$ av impulssvaret kallas för systemets *systemfunktion* eller *överföringsfunktion* (jämför med 9.28).

En insignal $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ till S ger utsignalen $y = Sx = h * x$. Laplacetransformering av detta samband ger enligt sats 11.28 att

$$\hat{y}(s) = \hat{h}(s)\hat{x}(s).$$

Systemfunktionen ger på detta sätt en kompakt representation av systemets egenskaper.

Enkelsidig laplacetransform

Den enkelsidiga laplacetransformen är ett praktiskt verktyg i många tillämpningar, men är inte lika allmänt användbar som den dubbelsidiga laplacetransform vi hittills studerat.

11.30 Definition Låt $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$. Den *enkelsidiga laplacetransformen* av u, som vi betecknar $\mathscr{L}_+ u$, definieras genom $\mathscr{L}_+ u = \mathscr{L}(u\chi)$, det vill säga:

$$(\mathscr{L}_+ u)(s) = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt, \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_{u\chi}.$$

Eftersom u:s värden på $]-\infty, 0[$ är betydelselösa för den enkelsidiga laplacetransformen definieras $\mathscr{L}_+ u$, genom samma integralformel, också för $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}\big([0,\infty[\big)$.

Notera att definitionsmängden för $\mathscr{L}_+ u$ antingen är tom, eller är ett halvplan åt höger i s-planet, eller är hela s-planet, enligt 10.3.

Räknereglerna i sats 10.7 för laplacetransformen av $u(t) + v(t)$, $cu(t)$, $\overline{u(t)}$, $u(at)$, $e^{ct}u(t)$ och $tu(t)$ gäller också för den enkelsidiga laplacetransformen. Till exempel har vi, om $u \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ och $c \in \mathbb{C}$, att $\mathscr{L}_+(e^{ct}u(t))(s) = (\mathscr{L}_+ u)(s-c)$ då $\operatorname{Re}(s-c) \in \Sigma_{u\chi}$. Den enkelsidiga laplacetransformen av $u(-t)$ eller $u(t-a)$ uppfyller dock inga samband som är enkla nog att kallas räkneregler. Det som ger den enkelsidiga laplacetransformen en speciell karaktär är räkneregeln för $u'(t)$, som vi kommer till i sats 11.32.

11.31 Enkelsidig laplacetransform och distributioner Vi ska nu ge en definition av den enkelsidiga laplacetransformen för distributioner $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som är sådana att "$u\chi$" kan tolkas på ett meningsfullt sätt. (För en godtycklig distribution i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ är det oklart vad som skulle menas med dess "enkelsidiga laplacetransform".)

Låt $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Vi säger att u *har enkelsidig laplacetransform* om det finns ett $\varepsilon > 0$ och en funktion $f \in \mathcal{L}^1\big(]-\varepsilon, 0[\big)$ sådana att $u = f$ på $]-\varepsilon, 0[$.

Det följer att mängden av de distributioner som har enkelsidig laplacetransform är ett underrum av $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Notera att varje distribution som ges av en funktion i $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$, eller som är lika med noll på $]-\infty, 0[$, har enkelsidig laplacetransform enligt denna definition.

Om u har enkelsidig laplacetransform så definierar vi distributionen $u_+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ genom

$$\langle u_+, \varphi\rangle = \langle u, \rho\varphi\rangle - \int_{-\varepsilon}^0 f(t)\rho(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

där $\varepsilon > 0$ och $f \in \mathcal{L}^1\big(]-\varepsilon, 0[\big)$ är sådana att $u = f$ på $]-\varepsilon, 0[$, och $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ är sådan att $\rho = 0$ i en omgivning av $]-\infty, -\varepsilon]$ och $\rho = 1$ i en omgivning av $[0, \infty[$.

Det följer att u_+ enbart beror på u (och inte på ε, f eller ρ), att $u_+ = 0$ på $]-\infty, 0[$, och att avbildningen $u \mapsto u_+$ är linjär. Notera att denna $+$-operation motsvarar att multiplicera en funktion i $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ med χ, och att om $u = 0$ på $]-\infty, 0[$ så är $u_+ = u$.

Om u har enkelsidig laplacetransform enligt definitionen ovan så definierar vi nu till slut den *enkelsidiga laplacetransformen* av u, som vi betecknar $\mathscr{L}_+ u$, genom

$$\mathscr{L}_+ u = \mathscr{L}(u_+).$$

Det följer att $\mathscr{L}_+$ är en linjär avbildning från rummet av de distributioner i $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som har enkelsidig laplacetransform till rummet $\mathcal{H}'$. Notera att denna definition av enkelsidig laplacetransform utvidgar definition 11.30, och att $\mathscr{L}_+ u = \mathscr{L} u$ om $u = 0$ på $]-\infty, 0[$.

11.32 Sats *Antag att $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och att u:s derivata u' har enkelsidig laplacetransform. Då gäller att u har enkelsidig laplacetransform, att u har vänstergränsvärde i 0, och att*

$$\mathscr{L}_+(u')(s) = s(\mathscr{L}_+u)(s) - u(0-).$$

Bevis Eftersom u' har enkelsidig laplacetransform (se 11.31) finns det ett $\varepsilon > 0$ och en funktion $f \in \mathcal{L}^1\big(]-\varepsilon, 0[\big)$ sådana att $u' = f$ på $]-\varepsilon, 0[$. Sätt $I =]-\varepsilon, 0[$ och definiera funktionen F genom $F(t) = \int_{-\varepsilon/2}^{t} f(r)\,dr$ för $t \in I$. Då har vi att F är en kontinuerlig funktion som har vänstergränsvärde i punkten 0: $F(0-) = \int_{-\varepsilon/2}^{0} f(r)\,dr$. Dessutom gäller, om $a, b \in I$, att

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = \Big[F(t)\varphi(t)\Big]_a^b - \int_a^b F(t)\varphi'(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{C}^1(I), \tag{$*$}$$

vilket kan visas med hjälp av sats A.20.

Av $(*)$ följer att $u' = F'$ på I, ty om $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ så får vi att

$$\langle u', \varphi\rangle = \int_I f(t)\varphi(t)\,dt = -\int_I F(t)\varphi'(t)\,dt = -\langle F, \varphi'\rangle = \langle F', \varphi\rangle.$$

Detta medför enligt sats 2.14 att det finns en konstant $C \in \mathbb{C}$ sådan att $u = F + C$ på I. Distributionen u ges alltså av den kontinuerliga funktionen $F + C$ på intervallet I, vilket ger att u har enkelsidig laplacetransform. Eftersom en kontinuerlig funktion är entydigt bestämd av den distribution den ger upphov till, enligt sats 1.21, kan vi utan tvetydighet definiera u:s *vänstergränsvärde i* 0 genom $u(0-) = F(0-) + C$.

Vi ändrar nu betydelse av bokstaven "F" och låter i resten av detta bevis F beteckna funktionen $F + C$ ovan. Formeln $(*)$ är då fortfarande sann, och $u = F$ på I. Vidare låter vi $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vara sådan att $\rho(t) = 0$ då $t < -3\varepsilon/4$ och $\rho(t) = 1$ då $t > -\varepsilon/4$. Av det ovanstående och definitionen av $+$-operationen i 11.31 följer nu att

$$\begin{aligned}
\langle (u')_+, \varphi\rangle &= \langle u', \rho\varphi\rangle - \int_{-\varepsilon}^{0} f\rho\varphi\,dt \\
&= -\langle u, (\rho\varphi)'\rangle - \Big[F\rho\varphi\Big]_{-\varepsilon}^{0} + \int_{-\varepsilon}^{0} F(\rho\varphi)'\,dt \\
&= -\langle u, \rho\varphi'\rangle - \langle u, \rho'\varphi\rangle - F(0-)\varphi(0) + \int_{-\varepsilon}^{0} F\rho\varphi'\,dt + \int_{-\varepsilon}^{0} F\rho'\varphi\,dt \\
&= -\langle u, \rho\varphi'\rangle + \int_{-\varepsilon}^{0} F\rho\varphi'\,dt - u(0-)\varphi(0) \\
&= -\langle u_+, \varphi'\rangle - u(0-)\varphi(0) \\
&= \langle (u_+)', \varphi\rangle - u(0-)\langle \delta, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

där $\langle u, \rho'\varphi\rangle = \int_{-\varepsilon}^{0} F\rho'\varphi\,dt$ eftersom stödet för $\rho'\varphi$ är en kompakt delmängd av I.

Vi har alltså följande samband som relaterar $+$-operationen och derivering:

$$(u')_+ = (u_+)' - u(0-)\delta.$$

Laplacetransformering av denna likhet ger att $\mathscr{L}_+(u')(s) = s(\mathscr{L}_+u)(s) - u(0-)$. $\square$

Upprepad användning av sats 11.32 ger följande resultat:

11.33 Följdsats *Om $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och m:te-derivatan $u^{(m)}$ har enkelsidig laplacetransform så gäller att u, u', …, $u^{(m-1)}$ har enkelsidig laplacetransform, att u, u', …, $u^{(m-1)}$ har vänstergränsvärde i 0, och att*

$$\mathscr{L}_+\big(u^{(m)}\big)(s) = s^m(\mathscr{L}_+u)(s) - u(0-)s^{m-1} - u'(0-)s^{m-2} - \ldots - u^{(m-1)}(0-). \qquad \square$$

Vi har alltså följande formler för den enkelsidiga laplacetransformen av u:s derivator:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_+(u')(s) &= s(\mathscr{L}_+u)(s) - u(0-),\\
\mathscr{L}_+(u'')(s) &= s^2(\mathscr{L}_+u)(s) - u(0-)s - u'(0-),\\
\mathscr{L}_+(u''')(s) &= s^3(\mathscr{L}_+u)(s) - u(0-)s^2 - u'(0-)s - u''(0-),
\end{aligned}$$

och så vidare. Dessa formler kommer vi att använda för att lösa begynnelsevärdesproblem med hjälp av enkelsidig laplacetransform i nästa avsnitt.

Om $u, v \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(\mathbb{R})$ så gäller att $(u\chi * v\chi)(t) = \int_0^t u(t-r)v(r)\,dr$ i de punkter $t \geq 0$ där faltningen är definierad. Integralen i högerledet skulle kunna kallas för den ”enkelsidiga faltningen” av u och v, och vi har följande sats om dess enkelsidiga laplacetransform.

11.34 Sats *Antag att u och v tillhör $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$ eller $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}\big([0,\infty[\big)$. Då gäller att*

$$\mathscr{L}_+\bigg(\int_0^t u(t-r)v(r)\,dr\bigg)(s) = (\mathscr{L}_+u)(s)\,(\mathscr{L}_+v)(s), \quad \operatorname{Re} s \in \Sigma_{u\chi} \cap \Sigma_{v\chi}.$$

Bevis Det följer av sats 3.7 att funktionen

$$t \mapsto \int_0^t u(t-r)v(r)\,dr,$$

definierad i de punkter $t \geq 0$ för vilka integralen är absolutkonvergent, väsentligen tillhör rummet $\mathcal{L}^1_{\text{lok}}\big([0,\infty[\big)$. Antag nu att $\sigma \in \Sigma_{u\chi} \cap \Sigma_{v\chi}$. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \bigg|\int_0^t u(t-r)v(r)\,dr\bigg| e^{-\sigma t}\,dt &\leq \int_0^\infty \int_0^t |u(t-r)|e^{-\sigma(t-r)}|v(r)|e^{-\sigma r}\,dr\,dt\\
&= \int_0^\infty \bigg(\int_r^\infty |u(t-r)|e^{-\sigma(t-r)}\,dt\bigg)|v(r)|e^{-\sigma r}\,dr\\
&= \bigg(\int_0^\infty |u(t)|e^{-\sigma t}\,dt\bigg)\bigg(\int_0^\infty |v(r)|e^{-\sigma r}\,dr\bigg)\\
&< \infty,
\end{aligned}$$

där integrationsordningen kan bytas, enligt sats A.20, eftersom integranden är positiv. Detta visar att den enkelsidiga laplacetransformen av funktionen $t \mapsto \int_0^t u(t-r)v(r)\,dr$ är definierad på den linje i s-planet som ges av $\operatorname{Re} s = \sigma$.

Väsentligen samma räkning, men utan beloppstecknen och med σ utbytt mot ett $s \in \mathbb{C}$ sådant att $\operatorname{Re} s = \sigma$, ger att $\mathscr{L}_+\big(\int_0^t u(t-r)v(r)\,dr\big)(s) = (\mathscr{L}_+u)(s)\,(\mathscr{L}_+v)(s)$. $\square$

Begynnelsevärdesproblem

Enkelsidig laplacetransform kan användas för att lösa begynnelsevärdesproblem på ett effektivt sätt. Det första exemplet nedan (11.35) är avsett att visa hur teorin fungerar i ett något mera komplicerat fall. De två exemplen därefter (11.36 och 11.37) visar hur standardproblem mera kortfattat brukar lösas.

11.35 Exempel Vi bestämmer en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 + \delta, & t \geq 0, \\ y(0-) = 2,\ y'(0-) = 5. \end{cases}$$

När vi skriver att differentialekvationen gäller för "$t \geq 0$" menar vi att båda leden har enkelsidig laplacetransform (se 11.31) och att ekvationen

$$(y'' - 3y' + 2y)_+ = (2 + \delta)_+ \qquad (*)$$

är uppfylld. Vi antar därför att $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ är sådan att y'' har enkelsidig laplacetransform. Laplacetransformering av $(*)$ ger då, enligt sats 11.33, att

$$s^2Y - 2s - 5 - 3(sY - 2) + 2Y = \left(\frac{2}{s},\ \operatorname{Re} s > 0\right)_{\mathcal{H}'} + 1,$$

där $Y = \mathscr{L}_+ y = \mathscr{L}(y_+)$. Förenkling ger att $(s-1)(s-2)Y = \big((2s^2+2)/s,\ \operatorname{Re} s > 0\big)_{\mathcal{H}'}$, så vi får med hjälp av sats 11.12 att

$$Y = \left(\frac{2s^2+2}{s(s-1)(s-2)},\ \operatorname{Re} s > 2\right)_{\mathcal{H}'} + C\delta_1 + D\delta_2,$$

där vi måste ha att $C = D = 0$, eftersom $y_+ = 0$ på $]-\infty, 0[$ och inverstransformen av högerledet är lika med $(Ce^t + De^{2t})/2\pi$ på $]-\infty, 0[$. Inverstransformering ger nu att

$$y_+ = (1 - 4e^t + 5e^{2t})\chi,$$

så begynnelsevärdesproblemet har lösningen

$$y(t) = 1 - 4e^t + 5e^{2t}, \quad t \geq 0,$$

vilket kan kontrolleras genom insättning.

Notera att $y(0+) = 2 = y(0-)$ och att $y'(0+) = 6 \neq y'(0-)$. Begynnelsevillkoren skulle alltså ha kunnat anges som "$y(0) = 2,\ y'(0-) = 5$". Däremot skulle "$y(0) = 2,\ y'(0) = 5$" inte ha gett ett väldefinierat problem.

11.36 Exempel Vi bestämmer en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = f(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 3, \end{cases} \qquad \text{där } f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 4 - t, & t \geq 1. \end{cases}$$

Enkelsidig laplacetransformering av differentialekvationen ger enligt sats 11.32 att

$$sY(s) - 3 - Y(s) = F(s),$$

där $Y = \mathscr{L}_+ y$ och $F = \mathscr{L}_+ f$. Notera att vi inte har angett för vilka s ekvationen gäller. Detta kan utelämnas här eftersom vi använder *enkelsidig* laplacetransform och därför vet att Y:s definitionsmängd är ett halvplan åt höger i s-planet (eller i undantagsfall är tom eller är hela s-planet).

För att bestämma $F(s)$, med hjälp av tabell och räkneregler, skriver vi om $f(t)$ till en lämplig form:

$$\begin{aligned} f(t) &= t + \big((4-t)-t\big)\chi(t-1) = t + (4-2t)\chi(t-1) \\ &= t + \big(4-2(t-1+1)\big)\chi(t-1) = t + \big(2-2(t-1)\big)\chi(t-1), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Tabell och räkneregeln för en translation ger att

$$\begin{aligned} t\chi(t) \quad &\xrightarrow{\mathscr{L}} \quad \frac{1}{s^2}, \ \operatorname{Re} s > 0, \\ (t-1)\chi(t-1) \quad & \qquad\quad e^{-s}\frac{1}{s^2}, \ \operatorname{Re} s > 0, \end{aligned}$$

och på samma sätt får vi fram laplacetransformen av $\chi(t-1)$, som är e^{-s}/s, $\operatorname{Re} s > 0$.

Tillsammans ger detta att

$$(s-1)Y(s) = 3 + \frac{1}{s^2} + e^{-s}\frac{2}{s} - e^{-s}\frac{2}{s^2} = \frac{3s^2+1}{s^2} + e^{-s}\frac{2s-2}{s^2},$$

från vilket vi löser ut $Y(s)$ och gör en partialbråksuppdelning. Vi bestämmer också Y:s definitionsmängd med hjälp av läget för singulariteterna i uttrycket för $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{3s^2+1}{(s-1)s^2} + e^{-s}\frac{2}{s^2} = \frac{4}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + e^{-s}\frac{2}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Inverstransform ger nu att begynnelsevärdesproblemet har lösningen

$$y(t) = 4e^t - t - 1 + 2(t-1)\chi(t-1), \quad t \geq 0,$$

vilket kan kontrolleras genom insättning.

Enkelsidig laplacetransform kan också användas för att lösa begynnelsevärdesproblem för system av differentialekvationer:

11.37 Exempel Vi bestämmer en lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x'(t) + 2y(t) = 8t, & t \geq 0, \\ x(t) + 2y'(t) = 2t^2, & t \geq 0, \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

Enkelsidig laplacetransformering av differentialekvationerna ger att

$$\begin{cases} sX(s) - 2 + 2Y(s) = 8/s^2, \\ X(s) + 2(sY(s) - 1) = 4/s^3, \end{cases}$$

där $X = \mathscr{L}_+ x$ och $Y = \mathscr{L}_+ y$, och transformerna i högerleden är definierade för $\operatorname{Re} s > 0$. Vi löser ut $X(s)$ och $Y(s)$ ur detta ekvationssystem och får att

$$X(s) = \frac{2s^4 - 2s^3 + 8s^2 - 4}{s^3(s-1)(s+1)}, \ \operatorname{Re} s > 1, \quad \text{och} \quad Y(s) = \frac{s^3 - s^2 - 2}{s^2(s-1)(s+1)}, \ \operatorname{Re} s > 1.$$

Inverstransformering, till exempel genom partialbråksuppdelning och avläsning i tabell, ger följande lösning, som kan kontrolleras genom insättning:

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 - 4 + 2e^t + 4e^{-t}, & t \geq 0, \\ y(t) = 2t - e^t + 2e^{-t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Övningar

11A Bestäm distributioner $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ som har laplacetransform

$$\hat{u}(s) = \frac{s^3 + 3s^2}{s^2 - 1},$$

med definitionsmängd given av: (a) $\operatorname{Re} s < -1$, (b) $-1 < \operatorname{Re} s < 1$, (c) $\operatorname{Re} s > 1$.

11B Bestäm alla lösningar $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ till differentialekvationen

$$y'(t) - 2y(t) = \delta(t) + e^{2t}\chi(t) + 2\chi(3-t).$$

11C Bestäm lösningar till följande begynnelsevärdesproblem:

(a) $\begin{cases} y''(t) + y(t) = 2e^t, & t \geq 0, \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2, \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}\sin t, & t \geq 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3, \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t), & t \geq 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$ där $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 3, \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x''(t) + y(t) = t, & t \geq 0, \\ x(t) + y'(t) = 1, & t \geq 0, \\ x(0) = x'(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases}$

11D Bestäm en lösning u till integralekvationen

$$u(t) = \sin t + 2\int_0^t \cos(t-r)u(r)\,dr, \quad t \geq 0.$$

11E Genomför några delar av beviset för sats 11.25.

11F Låt S vara ett LTI-system sådant att $2y' + y = x' + x$ då $y = Sx$. Bestäm möjliga impulssvar h för S genom att först bestämma möjliga systemfunktioner $\hat{h}$ för S. Jämför med metoden i exempel 3.21.

∗11G Är det möjligt att, för var och en av distributionerna u i övning 11A, avgöra om u är tempererad eller inte utan att bestämma u?

∗11H Sätt $\underline{s}^{-1} = (s_+^{-1} + s_-^{-1})/2$ (se exempel 11.6). Visa att $\underline{s}^{-1}$ är udda och att $s\underline{s}^{-1} = 1$.

∗∗11I Bestäm alla lösningar $v \in \mathcal{H}'$ till ekvationen $v'' + v = 0$. Bevisa också sats 11.10 och sats 11.11.

∗∗11J Visa följande påståenden:

(a) För funktionen $u(t) = e^{ie^t}\chi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, gäller att $\sigma_u^- = 0$ och att $\sigma_{u_{\mathcal{D}'}}^- = -\infty$.

(b) Distributionen $u = \mathscr{L}^{-1}\big(e^{ie^{is}},\ 0 < \operatorname{Re} s < \pi\big)_{\mathcal{H}'}$ är väldefinierad och $\sigma_u^- = 0$.

∗∗11K Låt $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och antag att stödet för u är en delmängd av $[0, \infty[$ och att $\Sigma_u \neq \varnothing$. Visa att för $\operatorname{Re} s$ tillräckligt stort har $\langle u(t), e^{-st}\rangle$ högst polynomiell tillväxt.

Z-transformen

Z-TRANSFORMEN, SOM OMVANDLAR TALFÖLJDER till analytiska funktioner, infördes på 1780-talet av Pierre-Simon de Laplace som ett verktyg för att lösa differensekvationer.

Man kan se z-transformen som ett specialfall av laplacetransformen för distributioner, eftersom z-transformen av en talföljd $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ genom sambandet $z = e^s$ är samma sak som laplacetransformen av distributionen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\delta(t-n)$. Framställningen nedan av teorin för z-transformen är dock oberoende av teorin för laplacetransformen.

Föreläsning 12

Z-transform av talföljder

12.1 Definition Låt $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara en funktion. Vi definierar *z-transformen* av u, betecknad $\hat{u}$ eller $\mathscr{Z}u$, som den funktion som ges av

$$\hat{u}(z) = (\mathscr{Z}u)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n},$$

och vars definitionsmängd består av de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ för vilka serien är absolutkonvergent.

Notera att u:s z-transform $\hat{u}$ ges av en potensserie i z, där både positiva och negativa potenser av z ingår, och där u:s värden används som koefficienter. Ibland kallas $\hat{u}$ för den *dubbelsidiga* z-transformen av u, speciellt om man vill undvika förväxling med den *enkelsidiga* z-transformen av u, vars undre summationsgräns är 0 istället för $-\infty$.

12.2 Exempel Z-transformen av funktionen $u(n) = 2^n\chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, kan beräknas med hjälp av formeln för summan av en geometrisk serie. Vi får att

$$\hat{u}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n\chi(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n = \Big/\text{serien är absolut-}$$

$$\text{konvergent om och endast om } |2/z| < 1\Big/ = \frac{1}{1-2/z} = \frac{z}{z-2}, \quad |z| > 2.$$

För z-transformen av funktionen $v(n) = -2^n\chi(-n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, får vi på samma sätt att

$$\hat{v}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -2^n\chi(-n-1)z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(z/2)^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(z/2)^n$$

$$= -\frac{z/2}{1-z/2} = \frac{z}{z-2}, \quad 0 < |z| < 2.$$

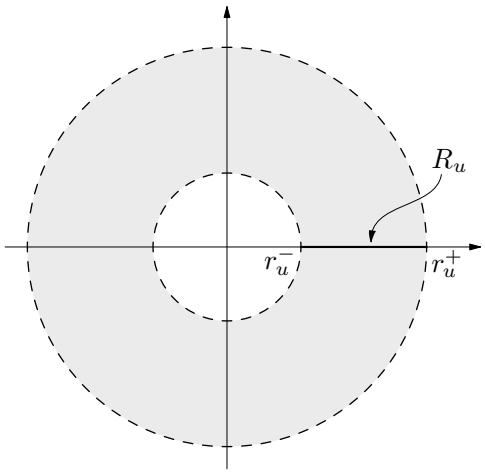
För z-transformen spelar alltså definitionsmängden av en transform en viktig roll, precis som var fallet för laplacetransformen.

12.3 Definitionsmängden för en z-transform Låt $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara en funktion. För att kunna hantera definitionsmängden för u:s z-transform $\hat{u}$ på ett enkelt sätt definierar vi mängden R_u genom

$$R_u = \big\{0 < r < \infty;\ \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| r^{-n} < \infty\big\}.$$

Då gäller att definitionsmängden för $\hat{u}$ består av de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sådana att $|z| \in R_u$, eftersom $|z^{-n}| = |z|^{-n}$. Notera att om $r \in R_u$ så gäller att $|u(n)| \le Cr^n$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ och någon konstant $C \ge 0$, eftersom $|u(n)|r^{-n} \to 0$ då $n \to \pm\infty$ om $r \in R_u$.

Om $r_1, r_2 \in R_u$ och $r_1 < r_2$ så gäller för alla r sådana att $r_1 < r < r_2$ att $r \in R_u$, eftersom $r^{-n} \le r_1^{-n} + r_2^{-n}$ för alla $n \in \mathbb{Z}$. Det följer att R_u antingen är den tomma mängden, eller att R_u innehåller precis en punkt, eller att R_u är ett intervall.



Vi definierar också *konvergensradierna* r_u^- och r_u^+ för u genom

$$r_u^- = \inf R_u \quad \text{och} \quad r_u^+ = \sup R_u.$$

Det följer att om $r_u^- < r_u^+$ så ingår området

$$\{z \in \mathbb{C};\ r_u^- < |z| < r_u^+\}$$

i definitionsmängden för $\hat{u}$.

Om $u(n) = 0$ då $n < m$, för något $m \in \mathbb{Z}$, och $R_u \neq \varnothing$, så gäller att $r_u^+ = \infty$. För att se detta, antag att $u(n) = 0$ då $n < m$ och att $r_1 \in R_u$. Om då $r \ge r_1$ så är $(r/r_1)^{n-m} \ge 1$ för alla $n \ge m$, så att $r^{-n} \le (r/r_1)^{-m} r_1^{-n}$ för alla $n \ge m$, vilket medför att $r \in R_u$. Alltså gäller att $[r_1, \infty[\ \subseteq R_u$, vilket ger att $r_u^+ = \infty$.

Med andra ord, om $u(n) = 0$ då $n < m$, för något $m \in \mathbb{Z}$, och $\hat{u}$:s definitionsmängd inte är tom, så innehåller $\hat{u}$:s definitionsmängd alla punkter i z-planet utanför någon cirkel med centrum i origo.

Analogt, om $u(n) = 0$ då $n > m$, för något $m \in \mathbb{Z}$, och $R_u \neq \varnothing$, så gäller att $r_u^- = 0$.

Nästa sats följer av teorin för laurentserier (se till exempel [2] eller [12]) och sambandet mellan z-transformer och potensserier (se definition 12.1).

12.4 Sats *Om $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ är en funktion sådan att $r_u^- < r_u^+$ så är z-transformen av u en analytisk funktion i området $\{z \in \mathbb{C};\ r_u^- < |z| < r_u^+\}$. Omvänt, om $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$ och U är en analytisk funktion i området $\{z \in \mathbb{C};\ r_1 < |z| < r_2\}$ så finns en entydigt bestämd funktion $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sådan att $\hat{u}(z) = U(z)$ då $r_1 < |z| < r_2$.* □

Vi ska nu härleda några delar av den z-transformtabell som finns i formelsamlingen som hör till denna kurs.

12.5 Exempel Z-transformen av den *diskreta diracimpulsen* $\delta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, som ges av

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

är, enligt definition 12.1, $\hat{\delta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = \ldots + 0z^1 + 1z^0 + 0z^{-1} + \ldots = 1$, $z \neq 0$.

12.6 Exempel Vi beräknar z-transformen av stegfunktionen χ.

Definition 12.1 och formeln för summan av en geometrisk serie ger att

$$\hat{\chi}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi(n) z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

12.7 Exempel Vi bestämmer z-transformen för en viss följd av binomialkoefficienter. Resultatet kommer ofta till användning vid inverstransformering.

Formeln för summan av en geometrisk serie ger att

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Genom att derivera denna likhet m gånger får vi, eftersom potensserier kan deriveras termvis, att

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1) z^{n-m} = \frac{m!}{(1-z)^{m+1}}, \quad |z| < 1.$$

Vänsterledets termer är lika med noll för $n = 0, 1, \ldots, m-1$, så för $0 \le k \le m$ har vi att

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\ldots(n+k-m+1) z^{n+k-m} = \frac{m!}{(1-z)^{m+1}}, \quad |z| < 1.$$

Vi multiplicerar denna likhet med $z^{-(k-m)}/m!$ och ersätter z med z^{-1}, vilket ger att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{m} z^{-n} = \frac{z^{k-m}}{(1-z^{-1})^{m+1}}, \quad |z^{-1}| < 1.$$

Efter förlängning av bråket i högerledet med z^{m+1} får vi följande resultat:

$$\binom{n+k}{m} \chi(n) \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad \frac{z^{k+1}}{(z-1)^{m+1}}, \ |z| > 1 \quad (k, m \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le m).$$

12.8 Exempel Låt $u(n) = (\cos n\alpha)\chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, där $\alpha > 0$. Vi beräknar u:s z-transform.

Definition 12.1 och formeln för summan av en geometrisk serie (återigen) ger att

$$\begin{aligned}\hat{u}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\alpha) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{in\alpha} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-in\alpha} z^{-n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - e^{i\alpha}/z} + \frac{1}{1 - e^{-i\alpha}/z} \right) = \frac{z^2 - (\cos\alpha) z}{z^2 - 2(\cos\alpha) z + 1}, \quad |z| > 1.\end{aligned}$$

12.9 Exempel Vi bestämmer z-transformen av den funktion u som ges av

$$u(n) = \begin{cases} 1/n, & n > 0, \\ 0, & n \le 0. \end{cases}$$

Definition 12.1 ger att $\hat{u}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) z^{-n} = z^{-1} + (1/2) z^{-2} + (1/3) z^{-3} + \ldots$. Genom att jämföra detta med maclaurinserien $\operatorname{Log}(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \ldots$, som är absolutkonvergent då $|z| < 1$, ser vi att

$$\hat{u}(z) = -\operatorname{Log}(1 - 1/z) = \operatorname{Log} \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

Räkneregler för z-transformen

12.10 Sats *Antag att $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ är två funktioner. Då gäller följande räkneregler:*

(a)	$u(n) + v(n)$	$\hat{u}(z) + \hat{v}(z),\ \lvert z\rvert \in R_u \cap R_v$	
(b)	$cu(n)$	$c\hat{u}(z),\ \lvert z\rvert \in R_u$	$(c \in \mathbb{C})$
(c)	$\overline{u(n)}$	$\overline{\hat{u}(\bar{z})},\ \lvert z\rvert \in R_u$	
(d)	$u(-n)$	$\hat{u}(1/z),\ \lvert 1/z\rvert \in R_u$	
(e)	$u(n-m)$	$z^{-m}\hat{u}(z),\ \lvert z\rvert \in R_u$	$(m \in \mathbb{Z})$
(f)	$c^n u(n)$	$\hat{u}(z/c),\ \lvert z/c\rvert \in R_u$	$(0 \neq c \in \mathbb{C})$
(g)	$nu(n)$	$-z\hat{u}'(z),\ r_u^- < \lvert z\rvert < r_u^+$	

Bevis Vi visar först (d). Låt $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara en funktion. Då har vi att

$$\big(u(-n)\big)\hat{}\,(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)(1/z)^{-n} = \hat{u}(1/z),$$

för $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sådana att $|1/z| \in R_u$. Bevisen för (a)–(f) följer samma mönster.

För att visa (g) antar vi att $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ är en funktion sådan att $r_u^- < r_u^+$. Laurentserier kan deriveras termvis (se till exempel [2] eller [12]), så utgående från definition 12.1 får vi att

$$\hat{u}'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)(-n)z^{-n-1}, \quad r_u^- < |z| < r_u^+,$$

vilket ger att

$$-z\hat{u}'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nu(n)z^{-n}, \quad r_u^- < |z| < r_u^+. \qquad \square$$

Dessa räkneregler gör z-transformen användbar för att bestämma partikulärlösningar till linjära differensekvationer. Följande sats, om den allmänna lösningen till en homogen linjär differensekvation med konstanta koefficienter, är värdefull vid bestämning av alla lösningar till icke-homogena ekvationer av samma typ. Vi kommer inte att använda den speciellt ofta, men jämför gärna med motsvarande sats för differentialekvationer, sats 2.16.

12.11 Sats *Alla lösningar $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ till differensekvationen*

$$c_m u(n+m) + c_{m-1}u(n+m-1) + \ldots + c_1 u(n+1) + c_0 u(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

där $m \geq 1$, $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, $c_0 \neq 0$ och $c_m \neq 0$ ges av

$$u(n) = P_1(n)r_1^n + \ldots + P_k(n)r_k^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

där $r_1, \ldots, r_k$ är de distinkta rötterna, med respektive multiplicitet $m_1, \ldots, m_k$, till den karakteristiska ekvationen $c_m r^m + c_{m-1}r^{m-1} + \ldots + c_1 r + c_0 = 0$, och P_i är ett godtyckligt komplext polynom med grad mindre än m_i, för $i = 1, \ldots, k$. $\square$

Satsen kan bevisas med rent elementära metoder, väsentligen genom att successivt lösa differensekvationer av typen $u(n+1) - ru(n) = v(n)$, där $0 \neq r \in \mathbb{C}$ är en konstant. En något utförligare beskrivning av beviset finns i ledningen till övning 12K.

12.12 Exempel Vi använder z-transform för att bestämma lösningar $y\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ till följande differensekvation:

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 2\chi(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Exempel 12.6 och sats 12.10 (b) ger att högerledets z-transform är $2z/(z-1)$, $|z| > 1$, så vi antar att $R_y \cap \,]1,\infty[\, \neq \varnothing$ och får med hjälp av sats 12.10 (a), (b) och (e) att

$$z^2\hat{y}(z) - 5z\hat{y}(z) + 6\hat{y}(z) = \frac{2z}{z-1}, \quad |z| \in R_y \cap \,]1,\infty[.$$

Vi löser ut $\hat{y}(z)$ och gör en partialbråksuppdelning, men med tanke på hur transformerna i tabellen ser ut håller vi ett z i täljaren "utanför" uppdelningen:

$$\begin{aligned}\hat{y}(z) &= \frac{2z}{(z^2-5z+6)(z-1)} = z\,\frac{2}{(z-3)(z-2)(z-1)} \\ &= z\left(\frac{1}{z-3} - \frac{2}{z-2} + \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z}{z-3} - \frac{2z}{z-2} + \frac{z}{z-1}, \quad |z| \in R_y.\end{aligned}$$

De möjliga definitionsmängderna för $\hat{y}$ ges alltså av $|z| > 3$, $2 < |z| < 3$ och $1 < |z| < 2$ (men inte av $0 < |z| < 1$ eftersom vi antog att $R_y \cap \,]1,\infty[\, \neq \varnothing$).

Antag först att $\hat{y}(z)$ är definierad för $|z| > 3$. I detta fall får vi direkt ur tabell lösningen

$$y(n) = (3^n - 2\cdot 2^n + 1)\chi(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{$*$}$$

Antag nu att $\hat{y}(z)$ är definierad för $2 < |z| < 3$. För att bestämma en funktion $u(n)$ som har z-transform $z/(z-3)$, $0 < |z| < 3$, använder vi först sats 12.10 (d) och (e):

$$\begin{array}{lcl} u(n) & \xrightarrow{\mathscr{Z}} & \dfrac{z}{z-3},\ 0 < |z| < 3, \\[2ex] u(-n) & & \dfrac{1/z}{1/z-3} = \dfrac{1}{1-3z},\ 0 < |1/z| < 3, \\[2ex] u(-(n+1)) & & -\dfrac{1}{3}\,\dfrac{z}{z-1/3},\ |z| > \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Enligt tabell och sats 12.10 (b) är den sista raden i högerkolumnen z-transformen av funktionen $-(1/3)(1/3)^n\chi(n)$. Alltså är $u(-(n+1)) = -(1/3)(1/3)^n\chi(n)$, vilket ger att $u(n) = -3^n\chi(-n-1)$. Lösningen till differensekvationen blir alltså i detta fall

$$y(n) = -3^n\chi(-n-1) + (-2\cdot 2^n + 1)\chi(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{$**$}$$

Antag till slut att $\hat{y}(z)$ är definierad för $1 < |z| < 2$. På samma sätt som ovan får vi att lösningen i detta fall är

$$y(n) = (-3^n + 2\cdot 2^n)\chi(-n-1) + \chi(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{$***$}$$

De tre lösningarna $(*)$, $(**)$ och $(***)$ kan kontrolleras genom insättning. Notera att storleksordningen av en lösning, då $n \to \infty$ respektive $n \to -\infty$, bestäms av lösningens inre respektive yttre konvergensradie (se 12.3). Notera även att skillnaden mellan två av lösningarna är av formen $C\cdot 2^n + D\cdot 3^n$, vilket följer av att skillnaden löser motsvarande homogena differensekvation $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 0$ (se sats 12.11). Till exempel fås $(**)$ genom att addera -3^n till högerledet av $(*)$.

Faltning och z-transform

12.13 Definition Låt $u, v\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara två funktioner. Deras *faltning*, betecknad $u * v$, är den funktion som ges av

$$(u * v)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(n-k)v(k),$$

och vars definitionsmängd består av de $n \in \mathbb{Z}$ för vilka serien är absolutkonvergent.

12.14 Sats *Låt $u, v\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara två funktioner. Om $R_u \cap R_v \neq \varnothing$ så gäller att $u * v$ är definierad på hela $\mathbb{Z}$ och att $(u * v)\hat{}(z) = \hat{u}(z)\hat{v}(z)$ då $|z| \in R_u \cap R_v$.*

Bevis Antag att $r \in R_u \cap R_v$, så att $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|r^{-n}$ och $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |v(n)|r^{-n}$ är konvergenta. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(n-k)v(k)|\Bigg)r^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(n-k)|r^{-(n-k)}|v(k)|r^{-k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n-k)|r^{-(n-k)}\Bigg)|v(k)|r^{-k} \\
&= \Bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|r^{-n}\Bigg)\Bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v(k)|r^{-k}\Bigg),
\end{aligned}$$

där det följer av sats A.20 att bytet av summationsordning är tillåtet eftersom termerna är ickenegativa. Detta visar för det första att $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(n-k)v(k)| < \infty$ för alla $n \in \mathbb{Z}$ (eftersom sista ledet ovan är ändligt), vilket ger att $u * v$ är definierad på hela $\mathbb{Z}$, och för det andra att $r \in R_{u*v}$, eftersom $|(u * v)(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u(n-k)v(k)|$ för alla $n \in \mathbb{Z}$.

Samma räkning som ovan, men med alla beloppstecken borttagna och med r utbytt mot ett $z \in \mathbb{C}$ sådant att $|z| = r$, ger nu att $(u * v)\hat{}(z) = \hat{u}(z)\hat{v}(z)$. □

12.15 Exempel Vi bestämmer en lösning u till ekvationen

$$u(n) + \sum_{k=0}^{\infty} u(n-k)2^k = 4 \cdot 3^n \chi(-n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Z-transformen av $3^{-n}\chi(n)$ är enligt tabell $z/(z-1/3)$, $|z| > 1/3$, så av sats 12.10 (d) följer att högerledets z-transform är $12/(3-z)$, $|z| < 3$. Serien i vänsterledet är faltningen av u och funktionen $2^n\chi(n)$, vars z-transform är $z/(z-2)$, $|z| > 2$. Vi får därför, med hjälp av sats 12.14, att

$$\hat{u}(z) + \frac{z}{z-2}\hat{u}(z) = \frac{12}{3-z}, \quad |z| \in R_u \cap \,]2, 3[.$$

Förenkling och partialbråksuppdelning ger att

$$\hat{u}(z) = \frac{6(z-2)}{(3-z)(z-1)} = \frac{3}{3-z} - \frac{3}{z-1} = \frac{3}{3-z} - \frac{3}{z}\frac{z}{z-1}, \quad 1 < |z| < 3.$$

Det ovanstående, tabell och sats 12.10 (e) ger nu att

$$u(n) = 3^n\chi(-n) - 3\chi(n-1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

vilket kan kontrolleras genom insättning.

Inversionsformeln

12.16 Inversionsformeln *Låt $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara en funktion. Om $r \in R_u$ så gäller att*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \hat{u}(z)z^{n-1}\,dz = u(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

där C_r är cirkeln $z = re^{i\theta}$ då θ går från 0 till 2π.

Bevis Antag att $r \in R_u$. Då är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)|r^{-n} < \infty$, så det följer av Weierstrass majorantsats (A.14) att serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n}$ konvergerar likformigt på cirkeln som ges av $|z| = r$. Enligt sats A.9 kan vi därför integrera termvis i följande beräkning:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \hat{u}(z)z^{n-1}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\Bigl(\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)z^{-m}\Bigr)z^{n-1}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\Bigl(\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)r^{-m}e^{-im\theta}\Bigr)r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}re^{i\theta}i\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigl(\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)r^{n-m}e^{i(n-m)\theta}\Bigr)\,d\theta \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m)r^{n-m}\Bigl(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta\Bigr) \\
&= u(n), \quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

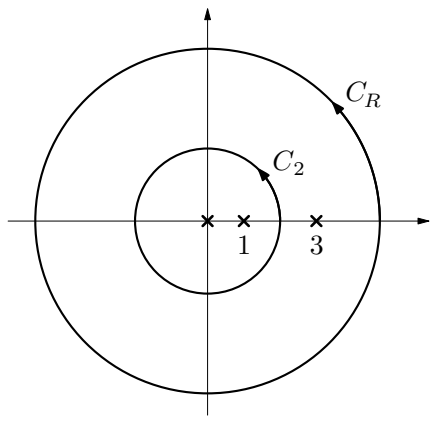
eftersom $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta$ är lika med 0 om $m \neq n$ och lika med 1 om $m = n$. □

12.17 Exempel Vi använder inversionsformeln för att bestämma den funktion $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ som har z-transform

$$\hat{u}(z) = \frac{z^2-3}{(z-1)(z-3)}, \quad 1 < |z| < 3.$$

Av sats 12.4 följer att det finns precis en funktion $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ som har denna z-transform, och inversionsformeln (12.16) ger oss följande uttryck för u:

$$u(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{z^2-3}{(z-1)(z-3)}z^{n-1}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$



där C_2 är cirkeln $z = 2e^{i\theta}$ då θ går från 0 till 2π.

Inversionsformelns integrand ovan har följande singulariteter: enkelpoler i $z = 1$ och $z = 3$ och, om $n \leq 0$, en pol av ordning $|n| + 1$ i $z = 0$. Residysatsen ger därför för $n \geq 1$ att

$$u(n) = \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)} = 1, \quad n \geq 1.$$

För $n = 0$ ger residysatsen att

$$u(0) = \bigl(\operatorname*{Res}_{z=1} + \operatorname*{Res}_{z=0}\bigr)\frac{z^2-3}{(z-1)(z-3)z} = 1 + (-1) = 0,$$

men för $n \le -1$ blir det arbetsamt att beräkna residyn i $z = 0$. Istället låter vi C_R, för $R > 3$, vara cirkeln $z = Re^{i\theta}$ då θ går från 0 till 2π. Konturen $C_R - C_2$ innesluter då enbart singulariteten i $z = 3$, så residysatsen ger att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2 - C_R} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)}\,dz = -\operatorname*{Res}_{z=3} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

eftersom $C_2 - C_R = -(C_R - C_2)$. Dessutom har vi att

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{(R^2+3)R^{n-1}}{(R-1)(R-3)}\,2\pi R,$$

vilket för $n \le -1$ (men inte för $n \ge 0$) ger att integralen över C_R går mot 0 då $R \to \infty$. Sammantaget ger detta att

$$u(n) = -\operatorname*{Res}_{z=3} \frac{(z^2-3)z^{n-1}}{(z-1)(z-3)} = -3^n, \quad n \le -1.$$

Därmed är u bestämd: $u(n) = 1$ då $n \ge 1$, $u(0) = 0$, och $u(n) = -3^n$ då $n \le -1$.

Enkelsidig z-transform

12.18 Definition Låt $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara en funktion. Den *enkelsidiga z-transformen* av u, som vi betecknar $\mathscr{Z}_+u$, definieras genom $\mathscr{Z}_+u = \mathscr{Z}(u\chi)$, det vill säga:

$$(\mathscr{Z}_+u)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n}, \quad |z| \in R_{u\chi}.$$

I denna definition av $\mathscr{Z}_+u$ saknar u:s värden för negativa heltal betydelse, så $\mathscr{Z}_+u$ definieras också, på samma sätt, för funktioner $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Notera att definitionsmängden för $\mathscr{Z}_+u$ antingen är tom, eller är hela z-planet utom en cirkelskiva med centrum i origo, eller är hela z-planet utom origo, enligt 12.3.

Räknereglerna i sats 12.10 för z-transformen av $u(n) + v(n)$, $cu(n)$, $\overline{u(n)}$, $c^n u(n)$ och $nu(n)$ gäller också för den enkelsidiga z-transformen. Dessutom har vi följande räkneregel för den enkelsidiga z-transformen av $u(n+m)$, där $m \ge 1$ är ett heltal. Räkneregeln kan bevisas med en rättfram räkning utgående från definition 12.18.

12.19 Sats *Antag att $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ är en funktion och att $m \ge 1$ är ett heltal. Då gäller att*

$$\mathscr{Z}_+\big(u(n+m)\big)(z) = z^m(\mathscr{Z}_+u)(z) - \sum_{n=0}^{m-1} u(n)z^{m-n}, \quad |z| \in R_{u\chi}. \qquad \square$$

Vi har alltså att

$$\mathscr{Z}_+\big(u(n+1)\big)(z) = z(\mathscr{Z}_+u)(z) - u(0)z,$$

$$\mathscr{Z}_+\big(u(n+2)\big)(z) = z^2(\mathscr{Z}_+u)(z) - u(0)z^2 - u(1)z,$$

$$\mathscr{Z}_+\big(u(n+3)\big)(z) = z^3(\mathscr{Z}_+u)(z) - u(0)z^3 - u(1)z^2 - u(2)z,$$

och så vidare. Dessa formler är användbara vid lösning av begynnelsevärdesproblem för differensekvationer med hjälp av enkelsidig z-transform.

12.20 Exempel Vi bestämmer en lösning till differensekvationen

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y(1) = 1$.

Enkelsidig z-transformering av differensekvationen, med hjälp av tabell och sats 12.19, ger att

$$z^2Y(z) - 0z^2 - 1z - 3(zY(z) - 0z) + 2Y(z) = \frac{z}{z-1},$$

där $Y = \mathscr{Z}_+ y$. (Vi har inte angett här för vilka z detta gäller. Jämför med exempel 11.36.) Vi löser ut $Y(z)$, faktoriserar och gör en partialbråksuppdelning, med ett z "utanför", och bestämmer Y:s definitionsmängd:

$$Y(z) = z\frac{z}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{2z}{z-1}, \quad |z| > 2.$$

Enligt tabell är detta z-transformen av funktionen $2 \cdot 2^n\chi(n) - n\chi(n) - 2\chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, så vi får att lösningen är

$$y(n) = 2^{n+1} - n - 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

vilket kan kontrolleras genom insättning.

12.21 Exempel Vi bestämmer en lösning till differensekvationen

$$y(n+2) - 2y(n+1) + 4y(n) = 6, \quad n \in \mathbb{N},$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 3$ och $y(1) = 6$.

Enkelsidig z-transformering av differensekvationen, med hjälp av tabell och sats 12.19, ger att

$$z^2Y(z) - 3z^2 - 6z - 2(zY(z) - 3z) + 4Y(z) = \frac{6z}{z-1},$$

där $Y = \mathscr{Z}_+ y$, vilket vi förenklar till

$$(z^2 - 2z + 4)Y(z) = \frac{3z^3 - 3z^2 + 6z}{z-1}.$$

Rötterna till $z^2 - 2z + 4 = 0$ är $z = 1 \pm i\sqrt{3}$, så vi har nu två alternativ: att faktorisera polynomet $z^2 - 2z + 4$ i komplexa förstagradsfaktorer eller att behålla det som det är.

Om vi avstår från att faktorisera $z^2 - 2z + 4$ så ger en partialbråksuppdelning, med ett z "utanför", att

$$Y(z) = z\frac{3z^2 - 3z + 6}{(z^2 - 2z + 4)(z-1)} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 - 2z + 4} + \frac{2z}{z-1}, \quad |z| > 2,$$

där villkoret $|z| > 2$ följer av att $|1 \pm i\sqrt{3}| = 2$. För att inverstransformera det första bråket i sista ledet gör vi följande omskrivningar:

$$\frac{z^2 + 2z}{z^2 - 2z + 4} = \frac{4(z/2)^2 + 4(z/2)}{4\big((z/2)^2 - (z/2) + 1\big)} = \frac{(z/2)^2 - (\cos\frac{\pi}{3})(z/2) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin\frac{\pi}{3})(z/2)}{(z/2)^2 - 2(\cos\frac{\pi}{3})(z/2) + 1},$$

där vi börjat med att skriva om nämnaren så att vi kan använda de bråk i tabellen som har nämnare $z^2 - 2(\cos\alpha)z + 1$. Tabell och sats 12.10 (f) ger nu att

$$y(n) = 2^n \cos\frac{n\pi}{3} + 2^n\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} + 2, \quad n \in \mathbb{N},$$

vilket kan kontrolleras genom insättning. Alternativt, om vi faktoriserar $z^2 - 2z + 4$ och

sedan partialbråksuppdelar, med ett z "utanför" som vanligt, så får vi att

$$Y(z) = z\frac{3z^2-3z+6}{(z^2-2z+4)(z-1)} = \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}z}{z-1-i\sqrt{3}} + \frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z}{z-1+i\sqrt{3}} + \frac{2z}{z-1}, \quad |z|>2.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\big(1+i\sqrt{3}\big)^n + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\big(1-i\sqrt{3}\big)^n + 2 \\ &= \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\big(2e^{i\pi/3}\big)^n + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\big(2e^{-i\pi/3}\big)^n + 2 \\ &= \frac{1-i\sqrt{3}}{2}2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + 2 \\ &= 2^n\cos\frac{n\pi}{3} + 2^n\sqrt{3}\sin\frac{n\pi}{3} + 2, \quad n\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

vilket överensstämmer med resultatet ovan.

För två funktioner $u,v\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ gäller att $(u\chi * v\chi)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(n-k)v(k)$ då $n\in\mathbb{N}$, och detta ger att nästa sats, om z-transformen av denna "enkelsidiga faltning" av u och v, är en direkt följd av sats 12.14.

12.22 Sats *Antag att u och v är komplexvärda funktioner definierade på $\mathbb{Z}$ eller $\mathbb{N}$. Då gäller att*

$$\mathscr{Z}_+\left(\sum_{k=0}^{n} u(n-k)v(k)\right)(z) = (\mathscr{Z}_+u)(z)(\mathscr{Z}_+v)(z), \quad |z|\in R_{u\chi}\cap R_{v\chi}. \qquad \square$$

12.23 Exempel Vi beräknar värdet av summan

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Genom att använda tabell och sats 12.22, med $u(n)=1$ och $v(n)=n^2$ för $n\in\mathbb{N}$, får vi att den enkelsidiga z-transformen S av s ges av

$$S(z) = \frac{z}{z-1}\frac{z^2+z}{(z-1)^3} = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}, \quad |z|>1.$$

Inverstransformering, återigen med hjälp av tabell, ger att

$$\begin{aligned} s(n) &= \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Detta resultat kan kontrolleras, i alla fall delvis, genom att sätta in några värden på n, till exempel $n=0$, 1, 2 och 3.

Övningar

12A Låt $u(n) = 1$ då $n < 0$ och $u(n) = 3^{-n}$ då $n \geq 0$. Bestäm u:s z-transform (i detta ingår att bestämma dess definitionsmängd) med hjälp av definition 12.1.

12B Bestäm z-transformen av följande funktioner:

(a) $\sqrt{|n|}\,\delta(n+4)$, (b) $n\binom{n}{2}\chi(n)$, (c) $n2^n\chi(1-n)$, (d) $2^n\chi(n)\cos\frac{n\pi}{2}$.

12C Bevisa några av räknereglerna i satserna 12.10 och 12.19.

12D Bestäm funktioner som har följande z-transformer:

(a) $\dfrac{3z^3 - 11z^2 + 11z}{z^2 - 4z + 4}$, $|z| > 2$, (b) $-\dfrac{3z}{2z^2 - 5z + 2}$, $\dfrac{1}{2} < |z| < 2$.

12E Bestäm en lösning u till ekvationen $u(n) + 2\sum_{k=0}^{n}(n-k)u(k) = 5\cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

12F Bestäm lösningar till följande differensekvationer med begynnelsevillkor:

(a) $y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = 2^n$ då $n \in \mathbb{N}$, och $y(0) = 1$, $y(1) = 4$,

(b) $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = 6\cdot 2^n$ då $n \in \mathbb{N}$, och $y(0) = 4$, $y(1) = 5$,

(c) $y(n+2) - y(n+1) - 2y(n) = f(n)$ då $n \in \mathbb{N}$, och $y(0) = y(1) = 0$, där $f(n) = 6$ då $0 \leq n < 5$ och $f(n) = n$ då $n \geq 5$.

12G Visa att $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$ för alla $n \geq 1$.

∗12H Bestäm den lösning till differensekvationen

$$y(n+1) - 2y(n) = \chi(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

som uppfyller villkoret $y(0) = 1$.

∗12I Låt $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ vara en funktion som har period N för något heltal $N \geq 1$. Visa att

$$(\mathscr{Z}_+ u)(z) = \frac{z^N}{z^N - 1}\sum_{n=0}^{N-1} u(n)z^{-n}, \quad |z| > 1.$$

∗∗12J Bestäm de funktioner $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ som är lika med noll för negativa heltal och som uppfyller att $u * u = \chi$.

∗∗12K Bevisa sats 12.11. *Ledning*: Med operatorn τ, som verkar på funktioner $v\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ genom $(\tau v)(n) = v(n+1)$, kan ekvationen skrivas $c_m(\tau - r_1)^{m_1}\ldots(\tau - r_k)^{m_k}u(n) = 0$. Använd nu följande (nedan är $0 \neq r, s \in \mathbb{C}$ konstanter och p och q betecknar polynom): alla lösningar till $(\tau - r)v(n) = 0$ ges av $v(n) = Cr^n$, där $C \in \mathbb{C}$; om $\operatorname{grad} p \geq 1$ så är $(\tau - r)(p(n)r^n) = q(n)r^n$, där $\operatorname{grad} q = (\operatorname{grad} p) - 1$; ekvationen $(\tau - r)v(n) = q(n)s^n$ har en lösning $v(n) = p(n)s^n$, där $\operatorname{grad} p = \operatorname{grad} q$ om $s \neq r$ och $\operatorname{grad} p = (\operatorname{grad} q) + 1$ om $s = r$.

Appendix

Linjära rum och normer

A.1 Definition Ett *komplext linjärt rum* (eller *komplext vektorrum*) är en mängd V, vars element ibland kallas *vektorer*, tillsammans med en operation $V \times V \to V : (u, v) \mapsto u + v$, kallad *addition*, sådan att

(a) $u + v = v + u$ för alla $u, v \in V$,

(b) $(u + v) + w = u + (v + w)$ för alla $u, v, w \in V$,

(c) det finns ett *nollelement* $0 \in V$ sådant att $u + 0 = u$ för alla $u \in V$,

(d) för varje $u \in V$ finns ett element $-u \in V$ sådant att $u + (-u) = 0$,

och en operation $\mathbb{C} \times V \to V : (c, u) \mapsto cu$, kallad *multiplikation med tal*, sådan att

(e) $1u = u$,

(f) $(cd)u = c(du)$,

(g) $(c + d)u = cu + du$,

(h) $c(u + v) = cu + cv$,

för alla $u, v \in V$ och $c, d \in \mathbb{C}$. Elementen $u+v$ och cu kallas *summan* av u och v respektive *produkten* av c och u.

För att definiera ett *reellt* linjärt rum behöver man bara byta ut $\mathbb{C}$ mot $\mathbb{R}$ i definitionen ovan. Inom den teori som handlar om underrum, linjärt oberoende, bas och dimension, och linjära avbildningar och deras matriser (se till exempel [7]) finns inga väsentliga skillnader mellan reella och komplexa linjära rum. Definitionen av en reell skalärprodukt måste dock modifieras något i det komplexa fallet (se föreläsning 5, avsnittet om unitära rum) för att ge en teori motsvarande den för reella euklidiska rum.

I denna kurs arbetar vi enbart med *komplexa* linjära rum, så med ett *linjärt rum* menar vi alltid, om inget annat sägs, ett komplext linjärt rum.

A.2 Definition Låt V vara ett linjärt rum. En *norm* på V är en funktion $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ sådan att

(a) $\|u\| \geq 0$,

(b) $\|cu\| = |c| \|u\|$,

(c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (*triangelolikheten*),

för alla $u, v \in V$ och $c \in \mathbb{C}$.

Till exempel är $\|(z_1, z_2)\|_1 = |z_1| + |z_2|$ och $\|(z_1, z_2)\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|)$ två olika normer på det linjära rummet $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2);\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. Att även $\|(z_1, z_2)\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$ är en norm på $\mathbb{C}^2$ visar vi i avsnittet om unitära rum på föreläsning 5.

En norm på ett linjärt rum är en generalisering av begreppet längd för geometriska vektorer, och man kan tänka på $\|u\|$ som ”längden av u”.

Ofta krävs i andra framställningar att $\|u\| = 0$ ska medföra att $u = 0$, och det som vi kallar en norm kallas då en *seminorm*.

Mängder av reella tal

A.3 Intervall Mängderna

$$]a,b[,\ ]a,\infty[,\ ]-\infty,b[\ \text{ och }\ \mathbb{R}\quad (a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$$

kallas *öppna intervall*, mängderna

$$[a,b],\ [a,\infty[,\ ]-\infty,b]\ \text{ och }\ \mathbb{R}\quad (a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$$

kallas *slutna intervall*, och mängderna

$$]a,b]\ \text{ och }\ [a,b[\quad (a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$$

kallas *halvöppna intervall*. Med ett *intervall* (eller *godtyckligt intervall*) menar vi en mängd av någon av typerna ovan. Vi betraktar alltså inte den tomma mängden, eller delmängder av $\mathbb{R}$ som innehåller precis en punkt, som intervall.

A.4 Öppna, slutna och begränsade mängder En delmängd D av $\mathbb{R}$ kallas *öppen* om det för varje $t\in D$ finns ett $\varepsilon>0$ sådant att intervallet $]t-\varepsilon,t+\varepsilon[$ är innehållet i D, och D kallas *sluten* om dess komplement $\{t\in\mathbb{R};\ t\notin D\}$ är öppet. (Det finns många andra ekvivalenta sätt att definiera dessa begrepp, till exempel med hjälp av begreppet *randpunkt*.) Öppna intervall är öppna, och slutna intervall är slutna.

En delmängd D av $\mathbb{R}$ kallas *uppåt begränsad* om det finns ett $b\in\mathbb{R}$ sådant att $t\le b$ för alla $t\in D$, och D kallas *nedåt begränsad* om det finns ett $a\in\mathbb{R}$ sådant att $t\ge a$ för alla $t\in D$. Mängden D kallas *begränsad* om den är både uppåt och nedåt begränsad.

A.5 Kompakta mängder En delmängd K av $\mathbb{R}$ kallas *kompakt* om den är både sluten och begränsad.

En komplexvärd funktion f som är kontinuerlig på en kompakt mängd K har ett antal användbara egenskaper. Speciellt är f likformigt kontinuerlig på K, och om f är reellvärd så har f ett största och ett minsta värde på K (se till exempel [4], [1] eller [10]).

Vi kommer att ha nytta av följande observation om kompakta mängder: om $K\subseteq\mathbb{R}$ är kompakt och icke-tom så finns punkter $a,b\in K$ sådana att $K\subseteq[a,b]$. För att visa detta betraktar vi den kontinuerliga funktionen $f(t)=t$, $t\in K$. Eftersom K är kompakt har f ett största och ett minsta värde på K, det vill säga, det finns $a,b\in K$ sådana att $f(a)\le f(t)\le f(b)$ för alla $t\in K$, och detta ger att $K\subseteq[a,b]$.

A.6 Supremum och infimum En grundläggande egenskap hos de reella talen $\mathbb{R}$ är att om D är en icke-tom och uppåt begränsad delmängd av $\mathbb{R}$, så existerar en minsta övre begränsning $b\in\mathbb{R}$ för D, det vill säga ett b sådant att $t\le b$ för alla $t\in D$ och sådant att om $a<b$ så gäller att $t>a$ för något $t\in D$ (se till exempel [4], [1] eller [10]). Detta b (som är entydigt bestämt) kallas *supremum* för D och betecknas $\sup D$ (eller $\sup_{t\in D}t$).

Definitionen av supremum utvidgas till godtyckliga delmängder D av $\mathbb{R}$ genom att sätta $\sup D=\infty$ om D inte är uppåt begränsad, och $\sup D=-\infty$ om D är den tomma mängden. Även i dessa fall är $\sup D$ den minsta övre begränsningen för D.

Varje delmängd D av $\mathbb{R}$ har också en (entydigt bestämd) största undre begränsning, som kallas *infimum* för D och betecknas $\inf D$. För en godtycklig delmängd D av $\mathbb{R}$ gäller att $\inf D=-\sup_{t\in D}(-t)$.

Höger- och vänstergränsvärden

A.7 Definition Låt $u\colon D \to \mathbb{C}$ vara en godtycklig funktion vars definitionsmängd D är en delmängd av $\mathbb{R}$. Om $a \in \mathbb{R}$ är en punkt sådan att det för varje $\delta > 0$ finns en punkt $t \in D$ sådan att $a < t < a + \delta$, så sägs funktionen u ha *högergränsvärde* i a om gränsvärdet

$$u(a+) = \lim_{t \to a+} u(t)$$

existerar ändligt, det vill säga om det finns ett $c \in \mathbb{C}$ sådant att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|u(t) - c| < \varepsilon$ om $a < t < a + \delta$ och $t \in D$.

Analogt, om $a \in \mathbb{R}$ är en punkt sådan att det för varje $\delta > 0$ finns en punkt $t \in D$ sådan att $a - \delta < t < a$, så sägs u ha *vänstergränsvärde* i a om gränsvärdet

$$u(a-) = \lim_{t \to a-} u(t)$$

existerar ändligt, det vill säga om det finns ett $c \in \mathbb{C}$ sådant att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|u(t) - c| < \varepsilon$ om $a - \delta < t < a$ och $t \in D$.

Maclaurinutvecklingar

Ett bevis för följande sats om maclaurinutveckling med resttermen på integralform finns väsentligen i [4], till exempel. Notera att Lagranges form på resttermen inte är användbar för oss eftersom den inte är giltig för komplexvärda funktioner.

A.8 Sats *Antag att $u \in \mathcal{C}^k(I)$, där $1 \le k \le \infty$ och där I är ett öppet intervall som innehåller punkten 0. Då gäller, om $0 \le n < k$, att*

$$u(t) = u(0) + u'(0)t + \ldots + \frac{u^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{u_{n+1}(t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad t \in I,$$

där

$$u_{n+1}(t) = \int_0^1 (n+1)(1-r)^n u^{(n+1)}(tr)\,dr, \quad t \in I. \qquad \square$$

Från integralformeln för u_{n+1} får vi, genom satser om derivation under integraltecknet (se till exempel [9] eller sats A.19), att $u_{n+1} \in \mathcal{C}^{k-(n+1)}(I)$, vilket om $k = \infty$ ska tolkas som att $u_{n+1} \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Vi får också att

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(t)| &= \left| \int_0^1 (n+1)(1-r)^n u^{(n+1)}(tr)\,dr \right| \\
&\le \int_0^1 (n+1)(1-r)^n |u^{(n+1)}(tr)|\,dr \\
&\le \Big(\sup_{0 \le r \le 1} |u^{(n+1)}(tr)| \Big) \int_0^1 (n+1)(1-r)^n\,dr \\
&= \sup_{0 \le r \le 1} |u^{(n+1)}(tr)|, \quad t \in I.
\end{aligned}$$

Notera att denna uppskattning medför att om C är en konstant sådan att $|u^{(n+1)}(t)| \le C$ för alla $t \in I$, så följer att $|u_{n+1}(t)| \le C$ för alla $t \in I$.

Likformig konvergens

A.9 Sats *Låt I vara ett intervall och antag att $u_n \in \mathcal{C}(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd som konvergerar likformigt mot en funktion $u\colon I \to \mathbb{C}$. Då gäller att $u \in \mathcal{C}(I)$, och att*

$$\lim_{n\to\infty} \int_K u_n(t)\,dt = \int_K u(t)\,dt$$

för varje kompakt delintervall K av I.

Bevis Vi visar först att $u \in \mathcal{C}(I)$ genom att visa att u är kontinuerlig i en godtyckligt vald punkt $a \in I$.

Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $u_n \to u$ likformigt finns ett n sådant att $|u_n(t) - u(t)| < \varepsilon/3$ för alla $t \in I$. Funktionen u_n är kontinuerlig i a, så det finns ett $\delta > 0$ sådant att $|u_n(t) - u_n(a)| < \varepsilon/3$ om $a - \delta < t < a + \delta$ och $t \in I$. Så för alla $t \in I$ sådana att $a - \delta < t < a + \delta$ gäller att

$$|u(t) - u(a)| \le |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t) - u_n(a)| + |u_n(a) - u(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

vilket visar att u är kontinuerlig i a.

Låt nu K vara ett kompakt delintervall av I, och sätt $L =$ längden av K. Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $u_n \to u$ likformigt finns ett N sådant att $|u_n(t) - u(t)| < \varepsilon/L$ för alla $n > N$ och $t \in I$. För alla $n > N$ gäller därför att

$$\left| \int_K u_n(t)\,dt - \int_K u(t)\,dt \right| \le \int_K |u_n(t) - u(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon,$$

vilket visar att

$$\lim_{n\to\infty} \int_K u_n(t)\,dt = \int_K u(t)\,dt. \qquad \square$$

A.10 Sats *Låt I vara ett öppet intervall och antag att $u_n \in \mathcal{C}^1(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd som konvergerar punktvis mot en funktion $u\colon I \to \mathbb{C}$, och att följden av derivator u_n' konvergerar likformigt mot en funktion $v\colon I \to \mathbb{C}$. Då gäller att $u \in \mathcal{C}^1(I)$ och att $u' = v$.*

Bevis Fixera en punkt $a \in I$. För varje n har vi, eftersom $u_n \in \mathcal{C}^1(I)$, att

$$u_n(t) = u_n(a) + \int_a^t u_n'(r)\,dr, \quad t \in I.$$

I denna likhet håller vi t fixt och låter $n \to \infty$. Eftersom $u_n \to u$ punktvis har vi att $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ och att $\lim_{n\to\infty} u_n(a) = u(a)$. Sats A.9 tillämpad på följden u_n' ger att $v \in \mathcal{C}(I)$ och att

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^t u_n'(r)\,dr = \int_a^t v(r)\,dr.$$

Sammantaget ger detta att

$$u(t) = u(a) + \int_a^t v(r)\,dr, \quad t \in I.$$

Analysens huvudsats ger nu att u är deriverbar och att $u'(t) = v(t)$ för alla $t \in I$. $\square$

Serier

A.11 Numeriska serier Om $c_n \in \mathbb{C}$, där $n = N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots$ för något $N \in \mathbb{Z}$, eller där $n \in \mathbb{Z}$, så kallas

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n = c_N + c_{N+1} + \ldots, \text{ respektive } \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \ldots + c_{-1} + c_0 + c_1 + \ldots,$$

för en *numerisk serie* och talen c_n kallas dess *termer*. Man skriver ofta kortare $\sum_n c_n$ och underförstår över vilka n "summan" ska tas.

En numerisk serie $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ sägs vara *konvergent* om följden av seriens *delsummor*

$$c_N,\ \ c_N + c_{N+1},\ \ c_N + c_{N+1} + c_{N+2},\ \ \ldots$$

har ett ändligt gränsvärde. Gränsvärdet kallas då seriens *summa* och betecknas $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$.

Serien $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ sägs vara *konvergent* om serierna $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}$ båda är konvergenta, och $\sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}$ kallas då seriens *summa* och betecknas $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$.

En serie som inte är konvergent sägs vara *divergent*.

En numerisk serie $\sum_n c_n$ kallas *positiv* om $c_n \geq 0$ för alla n. För en positiv serie skriver vi ofta

$$\sum_n c_n < \infty$$

istället för att säga att serien är konvergent.

A.12 Absolutkonvergens En numerisk serie $\sum_n c_n$ sägs vara *absolutkonvergent* om

$$\sum_n |c_n| < \infty.$$

En absolutkonvergent serie $\sum_n c_n$ är konvergent (se till exempel [4], [1] eller [10]), och

$$\Big|\sum_n c_n\Big| \leq \sum_n |c_n|.$$

Olikheten kan visas genom att använda triangelolikheten på seriens delsummor.

A.13 Funktionsserier Låt D vara en godtycklig mängd och låt $u_n : D \to \mathbb{C}$ vara en följd av funktioner, där n är som i A.11. Då kallas

$$\sum_n u_n$$

för en *funktionsserie* och funktionerna u_n kallas dess *termer*. För varje fixt $t \in D$ ger funktionsserien $\sum_n u_n$ upphov till en numerisk serie $\sum_n u_n(t)$. Om denna numeriska serie är konvergent för varje $t \in D$ så kallas funktionen

$$u(t) = \sum_n u_n(t), \quad t \in D,$$

för funktionsseriens *summa*.

För varje begrepp som involverar funktionsföljder, till exempel punktvis konvergens och likformig konvergens, finns motsvarande begrepp för funktionsserier, vilket fås genom att tillämpa det ursprungliga begreppet på funktionsseriens följd av delsummor (eller på delsummorna till $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}$, om serien är av typen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n$).

A.14 Weierstrass majorantsats *Låt $u_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, där D är en godtycklig mängd, vara en följd av funktioner. Antag att M_n är en följd av tal (kallade majoranter) sådana att $|u_n(t)| \le M_n$ för alla $t \in D$ och $n \ge 1$, och sådana att $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.*

Då gäller att den numeriska serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ är absolutkonvergent för varje $t \in D$, och att funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergerar likformigt mot sin summa.

Om vi dessutom antar att D är ett intervall och att $u_n \in \mathcal{C}(D)$ för alla $n \ge 1$ så gäller att summan är kontinuerlig.

Bevis Eftersom $|u_n(t)| \le M_n$ för alla $t \in D$ och $n \ge 1$ följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty, \quad t \in D,$$

så den numeriska serien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ är absolutkonvergent för varje $t \in D$.

Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ kan vi välja ett N sådant att

$$\sum_{n=N}^{\infty} M_n < \varepsilon.$$

Då gäller, för alla $n > N$ och $t \in D$, att

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(t) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right| = \left| -\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(t) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(t)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon,$$

vilket visar att funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergerar likformigt mot sin summa.

Om D är ett intervall och $u_n \in \mathcal{C}(D)$ för alla $n \ge 1$ så följer att $\sum_{k=1}^{n} u_k \in \mathcal{C}(D)$ för alla $n \ge 1$, så sats A.9 ger då att funktionsseriens summa är kontinuerlig. □

Integraler

A.15 Definition För ett godtyckligt intervall I och en funktion $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$ (se 1.3) ger vi nedan en definition av integralen

$$\int_I u(t)\,dt, \text{ eller } \int_a^b u(t)\,dt,$$

där a och b är I:s vänstra respektive högra ändpunkt (reella tal eller $\pm\infty$). Vi förutsätter att integralen redan är definierad (till exempel genom riemannsummor) för kontinuerliga komplexvärda funktioner på slutna och begränsade intervall.

Antag först att $I =]a, b[$ är ett öppet begränsat intervall och att $u \in \mathcal{C}(I)$. I detta fall sägs integralen $\int_I u(t)\,dt$ vara *konvergent* om gränsvärdena

$$\lim_{A \to a+} \int_A^{(a+b)/2} u(t)\,dt \quad \text{och} \quad \lim_{B \to b-} \int_{(a+b)/2}^{B} u(t)\,dt$$

existerar ändligt. Deras summa kallas då integralens *värde* och betecknas $\int_I u(t)\,dt$.

Antag nu att I är ett begränsat intervall och att $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$. Med en *delningspunkt* menar vi (tillfälligt) en undantagspunkt för u eller en ändpunkt för I, och med en *del av I* menar vi ett öppet delintervall av I som inte innehåller någon undantagspunkt för u och vars ändpunkter är delningspunkter. Om integralen av u över varje del av I är konvergent så sägs $\int_I u(t)\,dt$ vara *konvergent* och summan av integralerna över alla delar av I kallas integralens *värde* och betecknas $\int_I u(t)\,dt$.

Antag till slut att I är ett obegränsat intervall och att $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$. Låt a och b vara I:s vänstra respektive högra ändpunkt. I de tre fallen $-\infty < a < b = \infty$, $-\infty = a < b < \infty$, respektive $-\infty = a < b = \infty$ sägs integralen $\int_I u(t)\,dt$ vara *konvergent* om gränsvärdet

$$\lim_{B\to\infty} \int_a^B u(t)\,dt, \quad \text{gränsvärdet} \quad \lim_{A\to-\infty} \int_A^b u(t)\,dt,$$

respektive gränsvärdena

$$\lim_{B\to\infty} \int_0^B u(t)\,dt \quad \text{och} \quad \lim_{A\to-\infty} \int_A^0 u(t)\,dt$$

existerar ändligt. Gränsvärdet, respektive summan av gränsvärdena, kallas då integralens *värde* och betecknas $\int_I u(t)\,dt$.

Observera att u:s värden i eventuella undantagspunkter för u inte spelar någon som helst roll i definitionen av integralen ovan. Om I är ett intervall och u är en funktion som väsentligen tillhör $\mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$ (se 1.3), så definierar vi därför integralen av u över I genom att sätta $\int_I u(t)\,dt = \int_I \tilde{u}(t)\,dt$, där $\tilde{u}$ definieras som i 1.3.

En integral som inte är konvergent sägs vara *divergent*.

Låt I vara ett godtyckligt intervall och antag att $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$ är en *positiv* funktion, det vill säga att $u(t) \geq 0$ för alla $t \in I$. Då skriver vi ofta

$$\int_I u(t)\,dt < \infty$$

istället för att säga att integralen $\int_I u(t)\,dt$ är konvergent, och om $\int_I u(t)\,dt$ är divergent (och u är positiv) så tilldelar vi ibland integralen "värdet" ∞.

Elementära integrationsregler för integralen följer av motsvarande regler för integralen av kontinuerliga funktioner på slutna och begränsade intervall (och räkneregler för gränsvärden). Till exempel är integralen linjär, det vill säga att om $u, v \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$ är sådana att $\int_I u(t)\,dt$ och $\int_I v(t)\,dt$ är konvergenta, och om $c \in \mathbb{C}$, så är även $\int_I (u(t) + v(t))\,dt$ och $\int_I cu(t)\,dt$ konvergenta, och det gäller att

$$\int_I \big(u(t) + v(t)\big)\,dt = \int_I u(t)\,dt + \int_I v(t)\,dt,$$

och att

$$\int_I cu(t)\,dt = c\int_I u(t)\,dt.$$

Ett annat exempel är egenskaperna för absolutkonvergenta integraler.

A.16 Absolutkonvergens Integralen $\int_I u(t)\,dt$, där I är ett intervall och $u \in \mathcal{C}_{\text{sty}}(I)$, sägs vara *absolutkonvergent* om

$$\int_I |u(t)|\,dt < \infty.$$

En absolutkonvergent integral $\int_I u(t)\,dt$ är konvergent (se till exempel [4], [1] eller [10]), och det gäller att

$$\left|\int_I u(t)\,dt\right| \leq \int_I |u(t)|\,dt.$$

Om intervallet I är slutet och begränsat och $u \in \mathcal{C}(I)$ så kan denna olikhet visas genom att approximera integralerna med riemannsummor.

En viktig egenskap hos integrerbara funktioner (se 1.4) är att de kan approximeras godtyckligt väl med ”enklare” funktioner, till exempel som i följande sats.

A.17 Sats *Antag att $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ och att $\varepsilon > 0$. Då finns en funktion $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ som är styckvis konstant, har kompakt stöd, och är sådan att*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - v(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Bevis Vi väljer först $a, b \in \mathbb{R}$ sådana att $a < b$ och sådana att

$$\int_{-\infty}^{a} |u(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{och} \quad \int_{b}^{\infty} |u(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{8},$$

vilket är möjligt eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt < \infty$.

Låt $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$, för något $N \geq 0$, vara u:s undantagspunkter i intervallet $]a, b[$, och sätt $a_0 = a$, $a_{N+1} = b$. Eftersom $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\, dt < \infty$ kan vi välja ett $\delta > 0$ sådant att

$$\int_{a_n-\delta}^{a_n+\delta} |u(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{4(N+2)}, \quad 0 \leq n \leq N+1,$$

och vi ser också till så att $\delta < (a_n - a_{n-1})/2$ för $1 \leq n \leq N+1$.

Sätt $u_0(t) = u(t)$ då $t < a$ eller $t > b$ eller $|t - a_n| < \delta$ för något $0 \leq n \leq N+1$, och sätt $u_0(t) = 0$ för övrigt. Då följer av det ovanstående att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(t)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

För $1 \leq n \leq N+1$ sätter vi $u_n(t) = u(t)$ då $t \in K_n = [a_{n-1} + \delta, a_n - \delta]$ och $u_n(t) = 0$ för övrigt. Då har vi att $u = u_0 + u_1 + \ldots + u_{N+1}$. Funktionen u_n är kontinuerlig på det kompakta intervallet K_n, så u_n är likformigt kontinuerlig på K_n. Därför finns en styckvis konstant funktion $v_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, som är lika med noll utanför K_n, sådan att

$$|u_n(t) - v_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(N+1)L_n}, \quad t \in K_n,$$

där L_n är längden av intervallet K_n (se till exempel [4]).

Sätt nu $v = v_1 + \ldots + v_{N+1}$. Funktionen v är styckvis konstant och har kompakt stöd, och avslutningsvis har vi att

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - v(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(t) + u_1(t) - v_1(t) + \ldots + u_{N+1}(t) - v_{N+1}(t)|\, dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(t)|\, dt + \sum_{n=1}^{N+1} \int_{-\infty}^{\infty} |u_n(t) - v_n(t)|\, dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{N+1} \int_{K_n} |u_n(t) - v_n(t)|\, dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{\varepsilon}{2(N+1)L_n} L_n \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Vi kommer ofta att ha användning för följande satser om integraler. Deras bevis hör dock hemma i en mera avancerad framställning av integrationsteori (se till exempel [11]).

Först har vi en sats om gränsövergång under integraltecknet (en variant av *Lebesgues dominerade konvergenssats*). Jämför gärna med sats A.9.

A.18 Sats *Låt I vara ett godtyckligt intervall och antag att $u_n \in \mathcal{L}^1(I)$, $n = 1, 2, \ldots$, är en följd som konvergerar punktvis på I mot en funktion $u \in \mathcal{L}^1(I)$ och att det finns en funktion $v \in \mathcal{L}^1(I)$ sådan att*

$$|u_n(t)| \leq v(t) \text{ för alla } t \in I \text{ och } n \geq 1.$$

Då gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |u_n(t) - u(t)|\, dt = 0,$$

och därmed att

$$\lim_{n\to\infty} \int_I u_n(t)\, dt = \int_I u(t)\, dt. \qquad \square$$

Nästa sats handlar om derivation under integraltecknet. För andra varianter av sådana satser, se gärna [9].

A.19 Sats *Antag att funktionen $u(t,r)$ är definierad för $a < t < b$ och $r \in I$, där I är ett godtyckligt intervall, att funktionen $t \mapsto u(t,r)$ är deriverbar för varje $r \in I$, och att funktionerna $r \mapsto u(t,r)$ och $r \mapsto u'_t(t,r)$ tillhör $\mathcal{L}^1(I)$ för alla $a < t < b$. Sätt*

$$U(t) = \int_I u(t,r)\, dr, \quad a < t < b.$$

Antag också att det finns en funktion $v \in \mathcal{L}^1(I)$ sådan att

$$|u'_t(t,r)| \leq v(r) \text{ för alla } r \in I \text{ och } a < t < b.$$

Då är U deriverbar, och

$$U'(t) = \int_I u'_t(t,r)\, dr, \quad a < t < b. \qquad \square$$

Till slut har vi en sats om byte av integrationsordning (en variant av *Fubinis sats*). En av satsens förutsättningar är att en viss funktion ska vara *mätbar*. Detta är ett slags minimalt regularitetskrav, som uppfylls av alla funktioner som på ett "naturligt" sätt uppstår inom matematisk analys. Med den så kallade *lebesgueintegralen* kan mätbara funktioner integreras (se till exempel [11]), men vi kommer enbart att använda satsen då de integraler som ingår existerar i definition A.15:s mening.

A.20 Sats *Låt $u\colon I \times J \to \mathbb{C}$ vara en mätbar funktion, där I och J är godtyckliga intervall, och antag att $u(t,r) \geq 0$ för alla $t \in I$ och $r \in J$, eller att*

$$\int_I \left(\int_J |u(t,r)|\, dr \right) dt < \infty, \text{ eller att } \int_J \left(\int_I |u(t,r)|\, dt \right) dr < \infty.$$

Då gäller att

$$\int_I \left(\int_J u(t,r)\, dr \right) dt = \int_J \left(\int_I u(t,r)\, dt \right) dr. \qquad \square$$

Svar till övningar

Föreläsning 1

1A (a) $3\varphi(2) - \int_{-\infty}^{\infty} 4e^t \varphi(t)\,dt$ (b) $\varphi(0) + \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt$ (c) 0

1B (a) $2\delta_1 + (\cos t)\big(\chi(t+1) - \chi(t-2)\big)$ (b) $-\delta$ (c) $e^6\delta_3 - 2e^{2t}\chi(3-t)$

1C (a) Ja; $\langle u, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{-1/2}\varphi(t)\,dt$ (b) Nej (c) Ja; $\langle u, \varphi\rangle = \int_{0}^{\infty} t^{-1}\varphi(t)\,dt$

1D δ **1E** (a) – (b) – (c) Nej, ty $f \notin \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(\mathbb{R})$

1F $-\varphi'(0)$ **1G** – **1H** –

1I (a) Till exempel något med area 1 som drar sig ut mot en kant
(b) Till exempel något med höjd 1 vars area går mot 0 medan den åker omkring
(c) Till exempel något med area 1 som flyter ut och vars höjd går mot 0

1J – **1K** Nej, kontinuitetsvillkoret kan inte uppfyllas

Föreläsning 2

2A Derivatan är $\delta - (\sin t)\chi$

2B (a) Funktioner på I som är oändligt deriverbara (se 2.8), och konstanter (se 1.15)
(b) Enbart $|t|\chi$. Produkterna $\chi\delta$, $t^{-1}\delta$, $\underline{t}^{-1}\delta$, $\underline{t}^{-1}\underline{t}^{-1}$ och $|t|\delta'$ saknar mening
(c) Uttrycket $\underline{t}^{-1}t\delta$ saknar mening, så det är varken lika med 1δ eller $\underline{t}^{-1}0$

2C (a) $-\delta$ (b) $-2\delta'$ (c) $9\delta_3'' - 12\delta_3' + 2\delta_3$ (d) $3\delta_2$
(e) $\frac{1}{27}\delta''$ (f) δ (g) $t + 2 + 2\underline{(t-1)}^{-1}$ (h) $\frac{1}{2}\underline{t}^{-1}$

2D (a) $e^{-t^2}\chi + Ce^{-t^2}$, där $C \in \mathbb{C}$ (b) $t + C\underline{t}^{-1} + D\delta$, där $C, D \in \mathbb{C}$
(c) $-2\delta' + C\chi + D$, där $C, D \in \mathbb{C}$ (d) $-\underline{t}^{-2} + C\chi + D\delta + E$, där $C, D, E \in \mathbb{C}$
(e) $2\underline{t}^{-1} - \underline{(t+1)}^{-1} - \delta' + C\delta + D\delta_{-1}$, där $C, D \in \mathbb{C}$
(f) $\underline{t}^{-1} - \underline{(t-3)}^{-1} + 3\underline{(t-3)}^{-2} + C\delta + D\delta_3 + E\delta_3'$, där $C, D, E \in \mathbb{C}$

2E – **2F** – **2G** – **2H** – **2I** – **2J** –

Föreläsning 3

3A (a) $e^t - 1 - t$ då $t \geq 0$, 0 då $t \leq 0$ (b) $2 - e^{t-3}$ då $t \leq 3$, e^{3-t} då $t \geq 3$

3B $(\cos 2t - \sin 2t)\chi(t) + C\cos 2t + D\sin 2t$, där $C, D \in \mathbb{C}$

3C $(u * \rho)(t)$ är lika med: 0 då $t \leq -h$, $\dfrac{1}{4h}(t+h)^2$ då $-h \leq t \leq h$, t då $t \geq h$

3D (a) $\dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})\chi(t) + Ce^t + De^{-t}$, där $C, D \in \mathbb{C}$

(b) Ja; $\dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})\chi(t)$; $y(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \big(e^{t-r} - e^{-(t-r)}\big)x(r)\,dr$

(c) Ja; $-\dfrac{1}{2}e^{-|t|}$

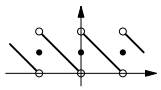
3E – **3F** $\delta' + 2\delta - (t+3)e^t\chi(-t)$ **3G** –

3H π **3I** $u = f * v$ **3J** – **3K** Till exempel $x \mapsto \tau_1 x$, $x \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

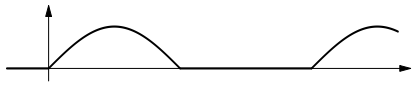
Föreläsning 4

4A –

4B (a) $\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\pi i n} e^{2\pi i n t}$;



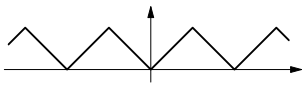
(b) $\dfrac{1}{4i}e^{it} - \dfrac{1}{4i}e^{-it} - \displaystyle\sum_{n \neq \pm 1} \frac{1 + (-1)^n}{2\pi(n^2 - 1)} e^{int}$;



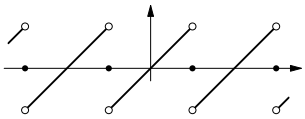
4C – **4D** $y(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2\pi t + 2\pi \sin 2\pi t}{2 + 8\pi^2}$

4E $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n t}{n^2}$; (a) – (b) $\dfrac{\pi^2}{6}$ (c) $\dfrac{\pi^2}{12}$

4F (a) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n \geq 1 \text{ udda}} \frac{\cos nt}{n^2}$;



(b) $2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$;



4G $\hat{v}(n) = \dfrac{4n}{i(n^2 - 4)^2}$ då $n \neq \pm 2$, $\hat{v}(\pm 2) = \mp \dfrac{1}{32i}$

4H $n^k \hat{u}(n) \to 0$ då $n \to \infty$ **4I** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} i^n e^{int}$ **4J** – **4K** –

Föreläsning 5

5A $\dfrac{\sin 6t - 6\cos 6t}{e^{\pi} - 1}$

5B $Pu = \dfrac{\langle u \,|\, f_1\rangle}{\langle f_1 \,|\, f_1\rangle} f_1 + \ldots + \dfrac{\langle u \,|\, f_N\rangle}{\langle f_N \,|\, f_N\rangle} f_N$

5C $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-2n)(1+2n)} e^{in2t}; \quad \frac{\pi - 2}{4}; \quad \frac{\pi^2 - 8}{16}$

5D (a) $c_0 = \dfrac{1}{3}, \;\; c_1 = c_{-1} = -\dfrac{2}{\pi^2}, \;\; c_2 = c_{-2} = \dfrac{1}{2\pi^2}$

(b) $a_0 = \dfrac{1}{3}, \;\; a_1 = -\dfrac{4}{\pi^2}, \;\; b_1 = 0, \;\; a_2 = \dfrac{1}{\pi^2}, \;\; b_2 = 0$

5E $\|u - S_N u\|_{2,T} \leq \dfrac{1}{\sqrt{6}\,\pi^2 N^{3/2}}$

5F – **5G** – **5H** – **5I** –

Föreläsning 6

6A 5/2

6B (a) $u' = -1 + \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ (b) $(u')\hat{}(n) = \begin{cases} 1, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$ (c) $\displaystyle\sum_{n \neq 0} e^{2\pi i n t}$; Ja

6C – **6D** $\pi \dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}}; \quad \dfrac{\pi}{2} \dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{e^{\pi} - e^{-\pi}} - \dfrac{1}{2}$

6E $\displaystyle\sum_{n \text{ udda}} \frac{\operatorname{sgn} n}{i} e^{int}$, där $\operatorname{sgn} n = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$

6F Summan har period 2π och ges av $\dfrac{t^2}{2} - \pi t + \dfrac{\pi^2}{3}$ då $0 \leq t < 2\pi$

6G – **6H** – **6I** –

Föreläsning 7

7A $\hat{u}(\omega) = \dfrac{6}{9+\omega^2}$

7B e^{2-2t} då $t \geq 1$, e^{t-1} då $t \leq 1$

7C t då $|t| < 1$, $\pm 1/2$ då $t = \pm 1$, 0 då $|t| > 1$

7D (a) $\pi e^{i3\omega - 2|\omega|}$ (b) $\dfrac{\pi}{6i}\big(e^{-|\omega-1|/3} - e^{-|\omega+1|/3}\big)$ (c) $-\dfrac{i\pi\omega}{2}e^{-|\omega|}$

(d) $\dfrac{\pi(1+2|\omega|)}{16}e^{-2|\omega|}$

7E – **7F** $y(t) = 2e^{-|t|} - e^{-2|t|}$

7G (a) $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4}$ (b) $\dfrac{1}{3}e^{-5t/3}\chi(t)$ (c) $\dfrac{it}{4\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4}$

(d) $\begin{cases} 1/2, & -1 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

7H $y(t) = -\dfrac{6t+5}{18}e^{-t}$ då $t \geq 0$, $y(t) = \dfrac{2}{9}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{t}$ då $t < 0$

7I $y(t) = e^{(1-t^2)/2}$ **7J** $\hat{\rho}(n\Omega) = \begin{cases} T, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ **7K** Nej

Föreläsning 8

8A $u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|t|}$

8B $\hat{u}(\omega) = \dfrac{4\sin^2\omega}{\omega^2}$ då $\omega \neq 0$, $\hat{u}(0) = 4$; π; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{3\pi}{4}$

8C $u(x,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\xi^2/4t}\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$

(Man kan under vissa förutsättningar visa att $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = f(x)$)

8D $u(t) = 2(1-t)e^{-t^2}$ **8E** 2^n

8F $u(t) = e^{-|t|}$ **8G** –

8H $u(t) = t+3$ då $-3 \leq t \leq -1$, $u(t) = -2t$ då $-1 \leq t \leq 1$, $u(t) = t-3$ då $1 \leq t \leq 3$, och $u(t) = 0$ då $|t| \geq 3$

8I – **8J** –

Föreläsning 9

9A (a) $2\pi(-\delta'' + i\delta' + \delta)$ (b) $2\pi i\delta' + 4\pi\delta + \pi e^{-|\omega|}$ (c) $i\pi\delta'(\omega-1) + i\pi\delta'(\omega+1)$

(d) $\underline{(\omega+1)}^{-1} - \underline{(\omega-1)}^{-1}$

9B – **9C** (a) $\delta - \frac{a}{2}e^{-a|t|}$ (b) $\frac{1}{2}\delta + \frac{i}{2\pi}\underline{t}^{-1}$ (c) $-\frac{1}{\pi}\underline{t}^{-2}$ (d) $\frac{i}{2}e^{3it}\operatorname{sgn} t$

9D (a) $y = 1 + \frac{1}{2}e^{-|t|} + Ce^t + De^{-t}$; $\mathcal{S}'$: $C = D = 0$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $C, D \in \mathbb{C}$

(b) $y = i(1-e^{it})\chi(t) + Ce^{it}$; $\mathcal{S}', \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $C \in \mathbb{C}$

(c) $y = -(\cos t)\chi(t) - e^t\chi(-t) + C\cos t + D\sin t + Ee^t$; $\mathcal{S}'$: $C, D \in \mathbb{C}$, $E = 0$,
$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $C, D, E \in \mathbb{C}$

9E $\hat{h}(\omega) = \dfrac{3i\omega - 5}{(i\omega)^2 - 2i\omega - 3}$; $h(t) = 2e^{-t}\chi(t) - e^{3t}\chi(-t)$; S är inte kausalt

9F – **9G** $\hat{u}(\omega) = -i\pi\left(\underline{\omega}^{-1} + \dfrac{e^{-|\omega|} - 1}{\omega}\right)$ **9H** – **9I** – **9J** –

Föreläsning 10

10A $\hat{u}(s) = -\dfrac{1}{(s-2)(s-3)}$, $2 < \operatorname{Re} s < 3$

10B (a) $\dfrac{24}{s^5} + \dfrac{4}{s^3} + \dfrac{1}{s}$, $\operatorname{Re} s > 0$ (b) $\dfrac{e^s\big(\cos 1 - (\sin 1)s\big)}{s^2+1}$, $\operatorname{Re} s > 0$

(c) $-\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$, $\operatorname{Re} s < -1$ (d) $\dfrac{e^s - e^{-s}}{s}$, $s \in \mathbb{C}$ (lika med 2 då $s = 0$)

(e) $-\dfrac{e^{-s}}{s}$, $\operatorname{Re} s < 0$ (f) Ej definierad i någon punkt $s \in \mathbb{C}$ **10C** –

10D (a) $\begin{cases} 0, & t \geq 1 \\ -e^{t-1} + t, & t \leq 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -t, & t \geq 1 \\ -e^{t-1}, & t \leq 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} e^{t-1} - t, & t \geq 1 \\ 0, & t \leq 1 \end{cases}$

10E (a) $\big(1 - (2t+1)e^{-2t}\big)\chi(t)$ (b) $e^{2t}(\cos 3t - 2\sin 3t)\chi(t)$

(c) $e^{-t}\chi(t) + (\cos t - \sin t)\chi(-t)$ (d) $-e^{3(t+2)}\chi(-t-2)$

10F $u(t) = (t-1)\chi(-t)$ **10G** $\hat{u}(s) = \dfrac{1}{s(1-e^{-s})}$, $\operatorname{Re} s > 0$

10H $u(t) = 2(1-t)\chi(t) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\chi(t-2n)$ eller $u(t) = 2(1+t)\chi(-t) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\chi(-t-2n)$

10I $\dfrac{2(1-\cos t)}{t}\chi(t)$ **10J** – **10K** –

Föreläsning 11

11A (a) $u = \delta' + 3\delta + (-2e^t + e^{-t})\chi(-t)$ (b) $u = \delta' + 3\delta - 2e^t\chi(-t) - e^{-t}\chi(t)$

(c) $u = \delta' + 3\delta + (2e^t - e^{-t})\chi(t)$

11B $y(t) = (t+1)e^{2t}\chi(t) + (e^{2(t-3)} - 1)\chi(3-t) + Ce^{2t}$, där $C \in \mathbb{C}$

11C (a) $y(t) = e^t + \cos t + \sin t,\ \ t \geq 0$ (b) $y(t) = \dfrac{3}{2}e^{-2t} - \dfrac{1}{2}e^{-t}(\cos t + \sin t),\ \ t \geq 0$

(c) $y(t) = 1 - e^{-t} - \big(1 - 2e^{-(t-3)} + e^{-2(t-3)}\big)\chi(t-3),\ \ t \geq 0$

(d) $x(t) = e^t,\ \ y(t) = t - e^t,\ \ t \geq 0$

11D $u(t) = te^t,\ \ t \geq 0$ **11E** –

11F $\hat{h} = \left(\dfrac{s+1}{2s+1}, \operatorname{Re} s > -\dfrac{1}{2}\right)_{\mathcal{H}'} + C\delta_{-1/2};\ \ h = \dfrac{1}{2}\delta + \dfrac{1}{4}e^{-t/2}\chi + \dfrac{C}{2\pi}e^{-t/2}$, där $C \in \mathbb{C}$

11G Ja (Se definitionen av Σ_u i 11.22, och sats 11.24) **11H** –

11I $v = 0$ **11J** – **11K** –

Föreläsning 12

12A $\hat{u}(z) = \dfrac{2z}{(1-z)(3z-1)},\ \ \dfrac{1}{3} < |z| < 1$

12B (a) $2z^4,\ \ z \neq 0$ (b) $\dfrac{2z^2 + z}{(z-1)^4},\ \ |z| > 1$ (c) $-\dfrac{8(z-1)}{z(z-2)^2},\ \ 0 < |z| < 2$

(d) $\dfrac{z^2}{z^2+4},\ \ |z| > 2$

12C – **12D** (a) $3\delta(n+1) + (n+2)2^{n-1}\chi(n)$ (b) $2^{-|n|}$

12E $u(n) = 2^n + 4\cos\dfrac{n\pi}{2} - 2\sin\dfrac{n\pi}{2},\ \ n \in \mathbb{N}$

12F (a) $y(n) = (n^2 + 7n + 8)2^{n-3},\ \ n \in \mathbb{N}$

(b) $y(n) = 3\cdot 2^n + 2^{n/2}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4} - 2\sin\dfrac{n\pi}{4}\Big),\ \ n \in \mathbb{N}$

(c) $y(n) = 2^{n+1} - 3 + (-1)^n - \dfrac{1}{4}\big(2n - 11 - (-1)^n\big)\chi(n-5),\ \ n \in \mathbb{N}$

12G – **12H** $y(n) = (2^n - 1)\chi(n) + 2^n,\ \ n \in \mathbb{Z}$ **12I** –

12J $u(n) = \pm\dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}\chi(n)$ **12K** –

Litteraturförteckning

[1] S. Abbott, *Understanding analysis*, Springer, 2015

[2] L. Alexandersson, *TATA45 Komplex analys*, Bokab, 2021

[3] G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1992

[4] G. Forsling, M. Neymark, *Matematisk analys, en variabel*, Liber, 2011

[5] F.G. Friedlander, M. Joshi, *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge University Press, 1998

[6] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer-Verlag, 1990

[7] U. Janfalk, *Linjär algebra*, Matematiska institutionen, 2021

[8] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press, 2004

[9] A. Persson, L.-C. Böiers, *Analys i flera variabler*, Studentlitteratur, 2005

[10] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1976

[11] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987

[12] E.B. Saff, A.D. Snider, *Fundamentals of complex analysis*, Pearson, 2003

[13] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966

[14] A.H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis*, Dover, 1987

Index

$\check{}$ 19
$\hat{}$ 42, 67, 75, 102, 111, 126, 132, 145
$*$ 27, 32, 33, 107, 150
$*_T$ 53, 70
$\| \ \|_1$ 5
$\| \ \|_{1,T}$ 42
$\| \ \|_2$ 89
$\| \ \|_\infty$ 6
$\langle \ , \ \rangle$ 8, 98, 128
$\langle \ | \ \rangle_2$ 89
$\langle \ | \ \rangle_{2,T}$ 59
f_T 40, 66
δ 10, 100, 130, 146
Σ 112, 134
σ^-, σ^+ 112, 134
τ 19
χ 9
Ω 39
$\underline{\omega}^{-1}$ 22
Arctan 118
$\mathcal{C}, \mathcal{C}^k, \mathcal{C}^\infty$ 3
$\mathcal{C}_{\text{sty}}, \mathcal{C}^k_{\text{sty}}$ 3
$\mathcal{D}$ 6
$\mathcal{D}'$ 8, 12
$_{\mathcal{D}'}$ 9
$^{\mathcal{D}'}$ 99
$\mathcal{D}'_T$ 65
$\mathscr{F}$ 75, 102
$\mathscr{F}^{-1}$ 81
$\mathscr{F}_T$ 42, 67
$\mathcal{H}$ 126
$\mathcal{H}'$ 128
$_{\mathcal{H}'}$ 129
$^{\mathcal{H}'}$ 130
$_{\mathcal{H}',\sigma}$ 128
inf 158
$\mathscr{L}$ 111, 132
$\mathscr{L}_+$ 138, 138
$\mathcal{L}^1$ 4, 5
$\mathcal{L}^1_{\text{lok}}$ 4
$\mathcal{L}^1_T$ 42
$\mathcal{L}^2$ 89
$\mathcal{L}^2_T$ 59
$\mathcal{L}^\infty$ 4, 6
Log 71
R 146
r^-, r^+ 146
$\mathcal{S}$ 97
$\mathcal{S}'$ 98
$_{\mathcal{S}'}$ 99
S_N 42
$\bar{S}_N$ 49
sgn 106
sup 158
T 39
$\underline{t}^{-1}, \underline{t}^{-k}$ 22
V 56
$\mathscr{Z}$ 145
$\mathscr{Z}_+$ 152

absolutkonvergens
  för fourierserie 54
  för integral 163
  för numerisk serie 161
affint variabelbyte
  för analytisk distribution 130
  för distribution i $\mathcal{D}'$ 18
  för tempererad distribution 101
d'Alemberts formel 94
analytisk distribution 128
  given av funktion 128
analytisk testfunktion 126

begränsad funktion 4
begränsad mängd 158
Bessels olikhet 57

Cauchy–Schwarz olikhet 55
cosinusserie 51

deltafunktionen 10
derivata
  av analytisk distribution 130
  av distribution i $\mathcal{D}'$ 15
  av tempererad distribution 101
  högre ordningens 17
  i distributionsmening 16
  punktvis 16
diracimpulsen 10, 100, 130, 146
dirichletkärnan 47, 82
diskreta diracimpulsen 146
distribution 8
  analytisk 128
  given av funktion 9
  med kompakt stöd 24
  periodisk 65
  tempererad 98, 99
distributionsderivata 16
distributionsmening
  derivata i 16
  fouriertransform i 102
  konvergens i 12

distributionsmening
laplacetransform i 132
likhet i 10
divisionsproblemet 21, 131
dubbelsidig laplacetransform 111
dubbelsidig z-transform 145

enkelsidig laplacetransform
av distribution 138
av funktion 138
enkelsidig z-transform 152
etta över en period 65
Eulers formler 40
Eulers konstant 114

faltning
av distributioner 33
av funktioner 27
av $u \in \mathcal{D}'$ och $\varphi \in \mathcal{D}$ 32
av $u \in \mathcal{S}'$ och $\varphi \in \mathcal{S}$ 107
av $u, v : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 150
periodisk 53, 70
fejérkärnan 49
fourierkoefficienter
för periodisk distribution 67
för periodisk funktion 42
Fouriers inversionsformel 81
fourierserie
absolutkonvergens för 54
för periodisk distribution 67
för periodisk funktion 42
konvergens för 42
i distributionsmening 68
i medel 61
punktvis 47
summa av 42
symmetrisk delsumma till 42
fouriertransform
av funktion 75
av tempererad distribution 102
i distributionsmening 102
frekvensfunktion 108
fullständig ON-mängd 58
fundamentallösning 35
funktional 8
funktionsrum 3
funktionsserie 161

generaliserad högerderivata 46
generaliserad vänsterderivata 46
Gibbs fenomen 48
glidande medelvärde 27
grundvinkelfrekvens 39

harmonisk svängning 40
heavisidefunktionen 9
högergränsvärde 159
högst polynomiell tillväxt 66, 99

impulssvar 34
infimum 158
integral
av $f \in \mathcal{C}_{\text{sty}}$ 162
över en period 40
integrerbar funktion 4
intervall 158
invers fouriertransform 81
inversionsformel
Fouriers 81
för laplacetransformen 120
för z-transformen 151

jämn distribution 25

karakteristisk funktion 88
kausalt LTI-system 36
kompakt mängd 158
komplex form 40
konjugatlinjär 15
konjugering
av analytisk distribution 130
av analytisk testfunktion 128
av distribution i $\mathcal{D}'$ 19
av tempererad distribution 101
kontinuerlig inklusion 98
kontinuitetsvillkor
för analytisk distribution 128
för distribution i $\mathcal{D}'$ 8
för LTI-system 34
för tempererad distribution 98
konvergens
för fourierserie 42

konvergens
- för integral 162
- för numerisk serie 161
- i distributionsmening 12
- i unitärt rum 55
- likformig 4
- punktvis 4

konvergensabskissa 112, 134
konvergensbegrepp 4
konvergensradie 146

laplacetransform
- av distribution 132
- av funktion 111
- dubbelsidig 111
- enkelsidig 138
- i distributionsmening 132

likformig konvergens 4
likhet
- i distributionsmening 10
- på öppet intervall 11

linjärt rum 157
lokalt integrerbar funktion 4
LTI-system 34

maclaurinutveckling 159
medelvärde
- av periodisk distribution 66
- av periodisk funktion 40

multiplikator på $\mathcal{H}'$ 130
multiplikator på $\mathcal{S}'$ 101

nedåt begränsad mängd 158
norm 157
- på unitärt rum 55

normerad vektor 56
numerisk serie 161

omskalning 19
ON-mängd 56
- fullständig 58

operation
- på analytiska distributioner 130
- på analytiska testfunktioner 128
- på distributioner i $\mathcal{D}'$ 15
- på tempererade distributioner 101

ortogonal projektion 56
ortogonala vektorer 56

paritetsbevarande operation 44
Parsevals formel
- för $u, v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ 90
- för $u, v \in \mathcal{L}^2_T$ 61

periodisering 69
periodisk distribution 65
periodisk faltning
- för distributioner 70
- för funktioner 53

periodisk funktion 39
periodisk utvidgning 39
Plancherels formel 90
Poissons summationsformel 95
polarisationsidentiteten 58
primitiv till distribution 20
principalvärde 25
produkt, av funktion och
- analytisk distribution 130
- distribution i $\mathcal{D}'$ 18
- tempererad distribution 101

pulståg 65
punktvis derivata 16
punktvis konvergens 4
- av fourierserie 47

”Pythagoras sats” 56

reell form 40
regularisering 30
regularitet och avtagande 81
restriktion av distribution 11
Riemann–Lebesgues lemma 46
räkneregler
- för fourierkoefficienter 44, 70
- för fouriertransformen 77, 105
- för laplacetransformen 116, 136
- för z-transformen 148

samplingsteoremet 89
satsen om punktvis konvergens 47
schwartzklassen 97
schwartztestfunktion 97
seminorm 157
signumfunktionen 106

sinusserie 51
skalärprodukt 55
sluten mängd 158
slutvärdessatsen 122
snabbt avtagande 97
spegling 19
startvärdessatsen 121
stegfunktionen 9
styckvis konstant funktion 3
styckvis kontinuerlig funktion 3
stöd
    för distribution 24
    för funktion 6
summa
    av fourierserie 42
    av funktionsserie 161
    av numerisk serie 161
supremum 158
supremumnormen 6
symmetrisk delsumma 42
system 34
    LTI- 34
    tidsinvariant 34
systemfunktion 137

tempererad distribution 98, 99
    given av funktion 99
testfunktion 6
    analytisk 126
    schwartz- 97
translation 19
translationsinvariant operator 34
triangelolikheten 157
trigonometrisk serie 41
trigonometriskt polynom 40

udda distribution 25
undantagspunkt 3
unitärt rum 55
uppåt begränsad mängd 158
utvidgning
    av $u \in \mathcal{D}'$ med kompakt stöd 24
    periodisk 39

vektorrum 157
verkan på testfunktioner 8
vågekvationen 93
vänstergränsvärde 159
värde av integral 162
väsentligen tillhör 3

Weierstrass majorantsats 162

z-transform 145
    dubbelsidig 145
    enkelsidig 152

öppen mängd 158
överföringsfunktion 108, 137