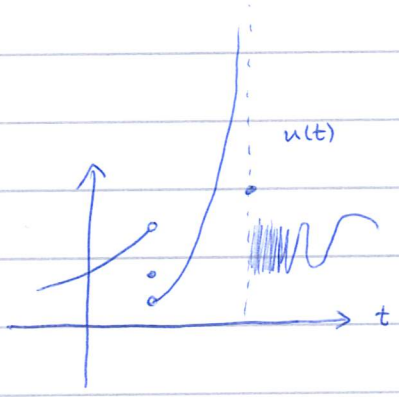
Fö 1

Distributioner

Läs Inledning själva.

Funktionsrum och konvergensbegrepp



intervall

Rum av funktioner $u: I \to \mathbb{C}$:

$C(I)$, $C^k(I)$, $C^\infty(I)$.

$C_{sty}(I)$ styckvis kont. fkn.

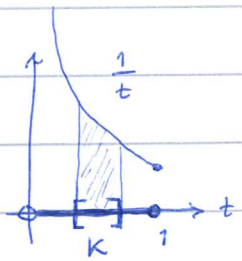
$L^1(I)$ integrerbara fkn: $u \in C_{sty}(I)$ s.a. $\int_I |u(t)|\,dt < \infty$.

$L^1_{lok}(I)$ lokalt integrerbara fkn: $u \in C_{sty}(I)$ s.a. $\int_K |u(t)|\,dt < \infty$ om $K \subseteq I$ är ett kompakt intervall.

$L^\infty(I)$: $u \in C_{sty}(I)$ som är begränsade på I.

Ex $I =]0,1]$. $\frac{1}{\sqrt{t}} \in L^1(I)$ ty $\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\right| dt < \infty$.

$\frac{1}{t} \notin L^1(I)$, men $\frac{1}{t} \in L^1_{lok}(I)$:

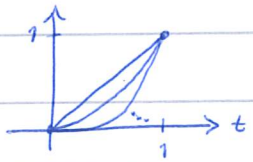


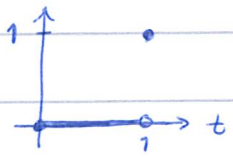
Konvergensbegrepp:

Punktvis konv. på I: $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$ för varje $t \in I$.

Likformig konv. på I: $\sup_{t\in I} |u_n(t) - u(t)| \to 0$ då $n \to \infty$.

Ex $u_n(t) = t^n$, $0 \le t \le 1$ $\qquad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$





Normer:

L^1-normen: $\|u\|_1 = \int_I |u(t)|\,dt$.

$u_n \to u$ i $L^1(I)$ om $\|u_n - u\|_1 \to 0$ då $n \to \infty$.

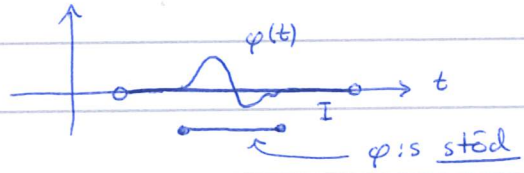
Supremumnormen: $\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} |u(t)|$.

$u_n \to u$ i $L^\infty(I)$ om $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ då $n \to \infty$,

dvs om $u_n \to u$ likformigt.

Testfunktioner och distributioner

$D(I) = \{$testfkn på $I\} = \{\varphi \in C^\infty(I)$ som har kompakt stöd$\}$



$\varphi_n \to \varphi$ i $D(I)$ om det finns ett kompakt intervall $K \subseteq I$ som innehåller stöden för alla φ_n och om $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ likformigt för alla $k \geq 0$.

Konstruktion av testfunktioner: se 1.14.

$D'(I) = \{$distributioner på $I\}$

$= \{u : D(I) \to \mathbb{C}$ som är linjära och uppfyller ett kontinuitetsvillkor$\}$ (se 1.15, 1.16)

$u(\varphi)$ betecknas $\langle \underset{\in D'(I)}{u}, \underset{\in D(I)}{\varphi} \rangle \in \mathbb{C}$.

Linjäritet hos u: $\langle u, \varphi + \psi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle u, \psi \rangle$

$\langle u, c\varphi \rangle = c \langle u, \varphi \rangle \quad (c \in \mathbb{C})$

Definition av $u+v$ och cu för $u, v \in D'(I)$, $c \in \mathbb{C}$:

$\langle u+v, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle + \langle v, \varphi \rangle$

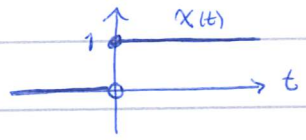
$\langle cu, \varphi \rangle = c \langle u, \varphi \rangle$

Sats $u \in L^1_{lok}(I)$ ger en distr. $u_{D'} \in D'(I)$:

$$\langle u_{D'}, \varphi \rangle = \int_I u(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in D(I).$$

B Se komp.

Ex **Stegfunktionen** $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



$$\langle \chi, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,\varphi(t)\,dt + \int_0^{\infty} 1\,\varphi(t)\,dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt.$$

Ex Funktionen 0:

$$\langle 0, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,\varphi(t)\,dt = 0.$$

Def $u, v \in L^1_{lok}(I)$ är <u>lika i distributionsmening</u> om $u_{D'} = v_{D'}$.

Sats Om $u = v$ i distributionsmening så är $u(t) = v(t)$ för varje $t \in I$ där både u och v är kontinuerliga.

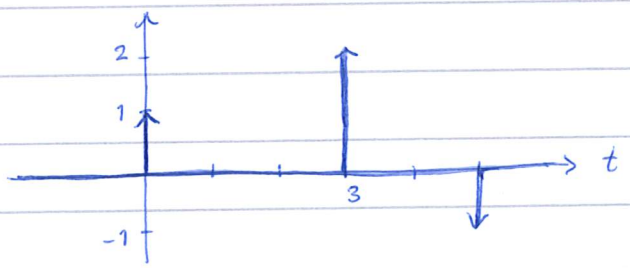
B Se komp.

Diracimpulsen δ: $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

$\delta \in D'(\mathbb{R})$, och δ "är inte en funktion".

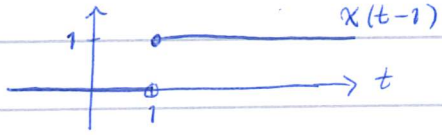
Diracimpulsen i a δ_a: $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$, $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

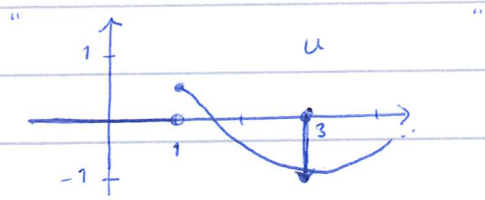
En "bild" av $\delta + 2\delta_3 - \delta_5$:



Ex Låt $u = (\cos t)\chi(t-1) - \delta_3$ och $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Vad blir $\langle u, \varphi \rangle$?

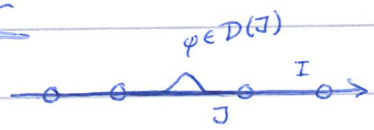




$$\langle u, \varphi \rangle = \langle (\cos t)\chi(t-1) - \delta_3, \varphi \rangle$$
$$= \langle (\cos t)\chi(t-1), \varphi \rangle - \langle \delta_3, \varphi \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\cos t)\chi(t-1)\varphi(t)\,dt - \varphi(3)$$
$$= \int_{1}^{\infty} (\cos t)\varphi(t)\,dt - \varphi(3).$$

Restriktion av distributioner

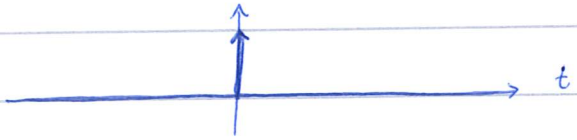
$J \subseteq I$ öppna intervall:



$u \in \mathcal{D}'(I)$. u:s <u>restriktion</u> u_J <u>till J</u>: $\langle u_J, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(J)$.

$u, v \in \mathcal{D}'(I)$ är <u>lika på J</u> om $u_J = v_J$.

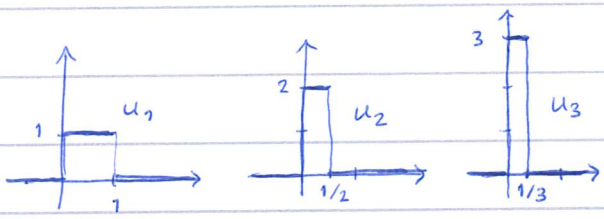
Ex $\delta = 0$ på $]-\infty, 0[$ och på $]0, \infty[$.



Konvergens av distributioner

$u_n \to u$ i $D'(I)$ om $\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle$, $\varphi \in D(I)$.

Ex



... $u_n \to ?$ i $D'(\mathbb{R})$?

Låt $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

$$\langle u_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{1/n} n\varphi(t)\,dt = \Big/ \begin{matrix}\text{Maclaurin,}\\ \text{se A.8}\end{matrix} \Big/$$

$$= \int_0^{1/n} n\left(\varphi(0) + \varphi_1(t)\,t\right)dt$$

$$= \varphi(0) + n\int_0^{1/n} \varphi_1(t)\,t\,dt.$$

$\exists C$ s.a. $|\varphi'(t)| \le C$ så (se A.8) $|\varphi_1(t)| \le C$, så

$$\left|n\int_0^{1/n} \varphi_1(t)\,t\,dt\right| \le n\int_0^{1/n} |\varphi_1(t)|\cdot t\,dt \le n\cdot C\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} \to 0.$$

Så $\langle u_n, \varphi\rangle \to \varphi(0)$ då $n\to\infty$, dvs

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi\rangle = \langle \delta, \varphi\rangle, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Alltså: $u_n \to \delta$ i $D'(\mathbb{R})$.