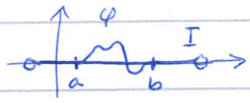
Fö 2

Operationer på distributioner

$u \mapsto u'$, fu, $u(at+b)$, $\bar{u}$: linjära och kont. operationer.

Derivering Om $u \in C^1(I)$, $\varphi \in D(I)$:

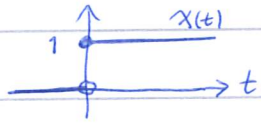


$$\int_I u'(t)\varphi(t)\,dt = \left[u(t)\varphi(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt = 0 - \int_I u(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Så def. för $u \in D'(I)$: $\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle$, $\varphi \in D(I)$ //

$u' \in D'(I)$, och $u \mapsto u'$ linj. och kont. : se kompendiet.

Ex Distributionsderivatan av χ.



(Punktvis derivata : 0 då $t \neq 0$, odef. då $t = 0$.)

Låt $\varphi \in D(\mathbb{R})$. $\langle \chi', \varphi \rangle = -\langle \chi, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\varphi'(t)\,dt =$

$$= -\int_0^{\infty} \varphi'(t)\,dt = -\left[\varphi(t)\right]_0^{\infty} = -(0-\varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Så $\chi' = \delta$:

Se sats 2.5 för hur exemplet generaliseras.

Högre ordningens derivator : upprepad derivering.

Ex $\delta, \delta', \delta'', \ldots$:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$
$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$$
$$\langle \delta'', \varphi \rangle = -\langle \delta', \varphi' \rangle = (-1)^2 \langle \delta, \varphi'' \rangle = \varphi''(0)$$
$$\vdots$$

Multiplikation med C^∞-funktioner

För funktioner: $\int_I (f(t)u(t))\varphi(t)\,dt = \int_I u(t)(f(t)\varphi(t))\,dt$,

så def. för $u \in \mathcal{D}'(I)$, $f \in C^\infty(I)$: $\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. ‖

Ex $f\delta_a = ?$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R}))$. Låt $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$\langle f\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, f\varphi\rangle = (f\varphi)(a) = f(a)\varphi(a) = f(a)\langle \delta_a, \varphi\rangle =$

$= \langle f(a)\delta_a, \varphi\rangle$, så $f\delta_a = f(a)\delta_a$.

T.ex: $e^t\delta = e^0\delta = \delta$, $(\sin t)\delta_\pi = (\sin\pi)\delta_\pi = 0$.

Ex $t\delta^{(k)} = -k\delta^{(k-1)}$ (se komp.). T.ex: $t\delta' = -\delta$, $t\delta'' = -2\delta'$.

Sats (Produktregeln) $(fu)' = f'u + fu'$, $u \in \mathcal{D}'(I)$, $f \in C^\infty(I)$.

B Se komp.

Affina variabelbyten $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

För funktioner: $\int_{-\infty}^{\infty} u(at+b)\varphi(t)\,dt = \ldots = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$,

så def. för $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $\langle u(at+b), \varphi(t)\rangle = \frac{1}{|a|}\langle u(t), \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)\rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ‖

Specialfall:

Spegling:	$u(-t)$	(eller $\check{u}$)
Omskalning:	$u(at)$	(för $a>0$)
Translation:	$u(t-a)$	(eller $\tau_a u$, för $a \in \mathbb{R}$)

Ex Förenkling av $\delta(2t-6)$: se komp.

Konjugering

För funktioner: $\int_I \overline{u(t)}\,\varphi(t)\,dt = \int_I \overline{u(t)\overline{\varphi(t)}}\,dt = \overline{\int_I u(t)\overline{\varphi(t)}\,dt}$,

så def. för $u \in D'(I)$: $\langle \bar{u}, \varphi \rangle = \overline{\langle u, \bar{\varphi} \rangle}$, $\varphi \in D(I)$. $\|$

Ex $t\delta'(4t) = ?$ Låt $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

$$\langle t\delta'(4t), \varphi \rangle = \langle \delta'(4t), t\varphi(t) \rangle = \quad / \text{Obs: } \delta'(4t) \neq (\delta(4t))' /$$

$$= \frac{1}{|4|} \langle \delta'(t), \tfrac{t}{4}\varphi(\tfrac{t}{4}) \rangle = -\frac{1}{4} \langle \delta(t), (\tfrac{t}{4}\varphi(\tfrac{t}{4}))' \rangle =$$

$$= -\frac{1}{4} \langle \delta(t), \tfrac{1}{4}\varphi(\tfrac{t}{4}) + \tfrac{t}{4}\varphi'(\tfrac{t}{4}) \cdot \tfrac{1}{4} \rangle =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\varphi(0) + 0\right) = -\frac{1}{16}\varphi(0) = \langle -\tfrac{1}{16}\delta, \varphi \rangle$$

Alltså: $t\delta'(4t) = -\frac{1}{16}\delta$.

Diffekvationer och distributioner

Sats $u \in D'(I)$. $\quad u' = 0 \iff u = C$, ngt $C \in \mathbb{C}$.

B Se komp.

Ex Lös $u' - 3u = \delta$ i $D'(\mathbb{R})$.

Integrerande faktor: e^{-3t}, så:

$$e^{-3t}u' - 3e^{-3t}u = e^{-3t}\delta \qquad / e^{-3t}\delta = e^{-3\cdot 0}\delta = \delta /$$

$$(e^{-3t}u)' = \delta \qquad / \delta = \chi' /$$

$$e^{-3t}u = \chi + C \qquad / \text{ty } (e^{-3t}u - \chi)' = 0, \text{ så satsen ger } e^{-3t}u - \chi = C /$$

Alltså: $\quad u = e^{3t}\chi + Ce^{3t}, \quad C \in \mathbb{C}$.

Sats (2.16) Homogena linjära diffekv. med konstanta koeff. har samma distributionslösningar som klassiska lösningar.

Divisionsproblemet

Sats $u \in D'(I)$. $\quad (t-a)u = 0 \iff u = C\delta_a$, ngt $C \in \mathbb{C}$.

B Se komp.

Ex Lös $(t^2 + 2t)u = 0$, $u \in D'(\mathbb{R})$.

$t((t+2)u) = 0 \overset{\text{Satsen}}{\iff} (t+2)u = C\delta$. Men $C\delta = (t+2)\boxed{?}$...

Obs: $(t+2)\delta = 2\delta$, så $C\delta = (t+2)(\frac{C}{2}\delta)$. Vi har alltså:

$$(t+2)u = (t+2)(\tfrac{C}{2}\delta)$$

$$u = \tfrac{C}{2}\delta + D\delta_{-2} \qquad / \text{ty } (t+2)(u - \tfrac{C}{2}\delta) = 0, \text{ så satsen ger } u - \tfrac{C}{2}\delta = D\delta_{-2} /$$

Alltså: $\quad u = \frac{C}{2}\delta + D\delta_{-2}, \quad C, D \in \mathbb{C}$.

Sats (2.19) $(t-a_1)^{m_1}\dots(t-a_k)^{m_k}u = 0 \iff u = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} C_{i,j}\,\delta_{a_i}^{(j)}$, $C_{i,j}\in\mathbb{C}$.

Distributionerna $\underline{t}^{-k}$ Finns $u\in D'(\mathbb{R})$ s.a. $tu = 1$?

I så fall: $u = \frac{1}{t}$ på $]-\infty,0[$ och $]0,\infty[$; men: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\varphi(t)dt$ div!

Def: $\underline{t}^{-1}$ = distributionsderivatan av $\ln|t|$.

Då fås $t\underline{t}^{-1} = 1$, genom icke-trivial beräkning (se komp.)

Def: $\underline{t}^{-2} = \frac{1}{-1}(\underline{t}^{-1})'$, $\underline{t}^{-3} = \frac{1}{-2}(\underline{t}^{-2})'$, ...

Sats $t\underline{t}^{-k} = \underline{t}^{-(k-1)}$, och $t^k\underline{t}^{-k} = 1$. B Se komp.

Ex Lösning av $(t-1)^2(t+2)u = 6t+3$ i $D'(\mathbb{R})$: se komp.

Ex Bestäm alla $u\in D'(\mathbb{R})$ s.a. $(t^2-2t)u = 6\delta + 2$.

Hom. lösn.: $(t^2-2t)u = 0$, dvs $t(t-2)u = 0$ har lösningar $u_h = C\delta + D\delta_2$, $C,D\in\mathbb{C}$.

Part. lösn.:

$6\delta = (t^2-2t)\boxed{?}$: $6\delta = (t-2)(-3\delta) = (t-2)(t(3\delta'))$,

ty $(t-2)\delta = -2\delta$ ty $t\delta' = -\delta$

så $(t^2-2t)(3\delta') = 6\delta$.

$2 = (t^2-2t)\boxed{?}$:

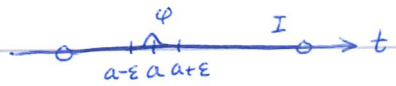
$$\frac{2}{t^2-2t} = \frac{2}{t(t-2)} = \frac{-1}{t} + \frac{1}{t-2},\ t\neq 0,2,$$ ← (Ej räkning med distr., bara vanlig PBU!)

vilket ger att $(t^2-2t)(-\underline{t}^{-1} + \underline{(t-2)}^{-1}) = 2$ (i $D'(\mathbb{R})$).

Alltså: $u = 3\delta' - \underline{t}^{-1} + \underline{(t-2)}^{-1} + C\delta + D\delta_2$, $C,D\in\mathbb{C}$.

Stöd för distributioner

Def $u \in D'(I)$. u:s <u>stöd</u> är mängden av de punkter $a \in I$ s.a. för varje $\varepsilon > 0$ finns en testfkn $\varphi \in D(I)$ med stöd i $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ s.a. $\langle u, \varphi \rangle \neq 0$.



Ex δ har stödet $\{0\}$.

Sats $u \in D'(I)$, $\varphi \in D(I)$ s.a. stöden för u och φ inte har någon gemensam punkt $\Rightarrow$ $\langle u, \varphi \rangle = 0$.

B Se komp.

En distribution $u \in D'(I)$ som har <u>kompakt</u> stöd kan verka på alla $\varphi \in C^\infty(I)$ (inte bara på $\varphi \in D(I)$), genom definitionen $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \rho\varphi \rangle$, $\varphi \in C^\infty(I)$, där $\rho \in D(I)$ är s.a. $\rho = 1$ i en omgivning av ett intervall som innehåller stödet för u.