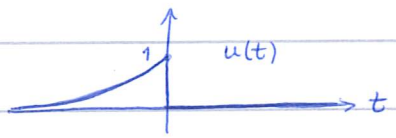
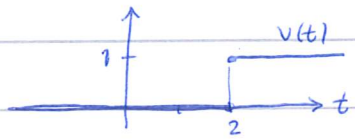
Fö3

Faltning

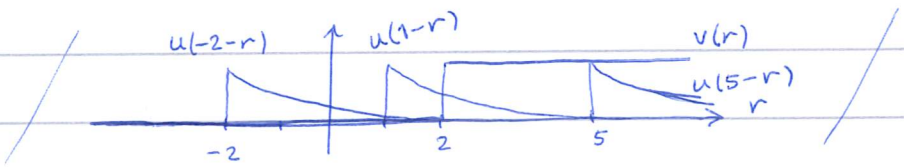
Def $(u*v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\,dr \qquad (u,v \in C_{sty}(\mathbb{R}))$

Ex $u(t) = e^t \chi(-t)$, $v(t) = \chi(t-2)$. $(u*v)(t) = ?$



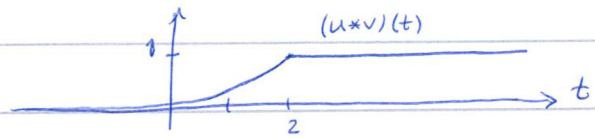


$$(u*v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)v(r)\,dr =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-r}\chi(-(t-r))\chi(r-2)\,dr = \int_2^{\infty} e^{t-r}\chi(r-t)\,dr =$$

$$= \begin{cases} t \le 2: & \int_2^{\infty} e^{t-r}\,dr = \left[-e^{t-r}\right]_2^{\infty} = e^{t-2} \\ t \ge 2: & \int_t^{\infty} e^{t-r}\,dr = \left[-e^{t-r}\right]_t^{\infty} = 1 \end{cases}$$



Räkneregler:

$$(u+v)*w = u*w + v*w$$

$$(cu)*v = c(u*v)$$

$$u*v = v*u$$

$$(u*v)*w = u*(v*w) \quad \text{ofta, men inte alltid.}$$

$$(\tau_a u)*v = \tau_a(u*v)$$

translation med a, dvs $\tau_a u = u(t-a)$

Sats $u \in L^1(\mathbb{R})$, $v \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow u * v \in C(\mathbb{R})$ och är begränsad.

B Se komp.

Sats $u, v \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$ och $u(t) = v(t) = 0$ då $t < 0$

$\Rightarrow u * v \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$ och $(u*v)(t) = 0$ då $t < 0$.

B Se komp.

Regularisering

Sats $u \in L^1_{lok}(\mathbb{R})$, $v \in C^k(\mathbb{R})$ $(1 \le k \le \infty)$ och v har kompakt stöd

$\Rightarrow u * v \in C^k(\mathbb{R})$ och $(u*v)'(t) = (u * v')(t)$.

"B" $(u*v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r) v(t-r) dr$.

Derivera m.a.p. t under integraltecknet....

Låt $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ ha kompakt stöd, och $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt = 1$.

$u * \rho$ kallas då en <u>regularisering</u> av u, ty:

$u * \rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, och

$(u*\rho)(t) =$ "vägt medelvärde av u:s värden kring t".

Med $\rho_n(t) = n\rho(nt)$ $\left(\text{så } \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t) dt = 1\right)$ fås i

många funktionsrum att $u * \rho_n \longrightarrow u$ då $n \to \infty$.

Se t.ex. sats 3.10.

Faltning och distributioner

Def För $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$(u*\varphi)(t) = \langle u(t-r), \varphi(r) \rangle = \langle u(r), \varphi(t-r) \rangle, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Speciellt: $(u*\varphi)(0) = \langle u, \check{\varphi} \rangle$.

Ex $\delta * \varphi = ?$

$(\delta*\varphi)(t) = \langle \delta(r), \varphi(t-r) \rangle = \varphi(t-0) = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Så $\delta*\varphi = \varphi$.

Sats $u*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ och $(u*\varphi)' = u*\varphi'$.

B Se komp.

För funktioner u, v och testfkn φ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u*v)(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(r) v(t-r)\,dr \right) \varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(r) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \check{v}(r-t)\varphi(t)\,dt \right) dr, \text{ så:}$$

Def $\langle u*v, \varphi \rangle = \langle u, \check{v}*\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, där $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ och minst en av u och v har kompakt stöd.

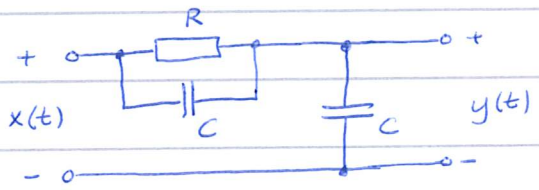
Ex $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $u*\delta = ?$

Låt $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. $\langle u*\delta, \varphi \rangle = \langle u, \check{\delta}*\varphi \rangle \underset{\check{\delta}=\delta}{=} \langle u, \delta*\varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$,

så $u*\delta = u$.

LTI-system

Ex



$x(t)$ insignal
$y(t)$ utsignal

$$\Rightarrow \quad 2RCy' + y = RCx' + x.$$

Def Ett LTI-system S är en linjär operator $S : D(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ s.a. $\tau_a S = S \tau_a$, plus ett kontinuitetsvillkor. ← (se komp.)

Sats S LTI-system $\Rightarrow$ Det finns precis en distribution $h \in D'(\mathbb{R})$, impulssvaret för S, s.a. $Sx = h * x$, $x \in D(\mathbb{R})$.

B Om h finns så $\langle h, x \rangle = (h * \check{x})(0) = (S\check{x})(0) \Rightarrow h$ ent. best.

Sätt $\langle h, x \rangle = (S\check{x})(0)$, $x \in D(\mathbb{R})$. Då gäller $h \in D'(\mathbb{R})$,

och $(Sx)(0) = (S\check{\check{x}})(0) = \langle h, \check{x} \rangle = (h * x)(0)$,

så $(Sx)(t) = (\tau_{-t}(Sx))(0) = (S(\tau_{-t}x))(0) =$

$= (h * (\tau_{-t}x))(0) = (\tau_{-t}(h * x))(0) = (h * x)(t)$, $t \in \mathbb{R}$,

dvs: $Sx = h * x$, $x \in D(\mathbb{R})$.

Diracimpulsen ger impulssvaret: $S\delta = h * \delta = h$.

Ex Vilka LTI-system ger diffekvationen för kretsen (med $RC = 1$) upphov till?

Om $y = Sx$ så är $2y' + y = x' + x$.

$h = S\delta$ ger alltså $2h' + h = \delta' + \delta$, så vi bestämmer alla lösningar $h \in D'(\mathbb{R})$ till denna ekvation.

Alla lösningar till homogena ekv. $2h' + h = 0$ ges av $h_h = Ce^{-t/2}$, $C \in \mathbb{C}$.

En partikulärlösning fås mha sats 3.20:

$L = c_m D^m + \dots + c_1 D + c_0 \quad (D = \frac{d}{dt})$.

Låt y_f s.a. $Ly_f = 0$ och s.a.

$y_f(0) = 0,\ y_f'(0) = 0, \dots, y_f^{(m-2)}(0) = 0,\ y_f^{(m-1)}(0) = c_m^{-1}$,

och sätt $f(t) = y_f(t)\chi(t)$

$\Longrightarrow Lf = \delta$ $\quad$ $\underline{B}$ Se komp.

Nu: $L = 2D + 1$, $m = 1$, så $h_f = C_1 e^{-t/2}$ och $h_f(0) = 2^{-1}$, dvs $h_f(t) = 2^{-1}e^{-t/2}$. Sätt $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\chi(t)$ så ger satsen (3.20) att $Lf = \delta$, dvs $2f' + f = \delta$.

För att matcha högerledet $\delta' + \delta$ sätter vi $h_p = f' + f$

(ty: $L(f' + f) = L((D+1)f) = (D+1)Lf = (D+1)\delta = \delta' + \delta$).

h_p är alltså en partikulärlösning, och

$$h_p = \left(\tfrac{1}{2}e^{-t/2}\chi(t)\right)' + \tfrac{1}{2}e^{-t/2}\chi(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t/2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\chi(t) + \tfrac{1}{2}e^{-t/2}\delta + \tfrac{1}{2}e^{-t/2}\chi(t) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{4}e^{-t/2}\chi(t)$$

Alla impulssvar ges alltså av:

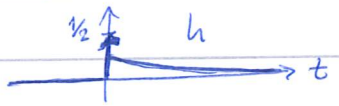
$$h = h_p + h_h = \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{4}e^{-t/2}\chi(t) + Ce^{-t/2}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Ett LTI-system S kallas <u>kausalt</u> om utsignalen Sx värden inte beror på "framtida" värden hos insignalen x (eller mer precist: se komp.).

$$S \text{ kausalt} \iff h = 0 \text{ på }]-\infty, 0[$$

Den kausala kretsen: C måste vara 0, så

$$h = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}e^{-t/2}\chi(t)$$



$$\Rightarrow \quad y = Sx = h * x = \left(\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{4}e^{-t/2}\chi(t)\right) * x =$$
$$= \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}e^{-t/2}\chi(t)\right) * x,$$

så $$y(t) = \frac{1}{2}x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}e^{-(t-r)/2}\chi(t-r)\,x(r)\,dr$$

$$= \frac{1}{2}x(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{4}e^{-(t-r)/2}\,x(r)\,dr.$$