Fö 4

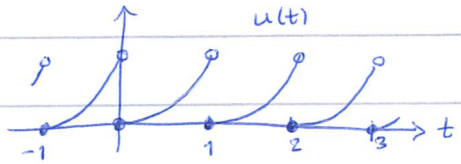
Fourierserier

Periodiska funktioner

Def $T > 0$ (periodlängd). $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ är <u>T-periodisk</u> om $u(t) = u(t-T)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\Omega = \frac{2\pi}{T}$: <u>grundvinkelfrekvensen</u>.

Ex $u(t) = t^2$, $0 \le t < 1$ och period 1 :



Ex Harmoniska svängningar :

$$\ldots,\ e^{-i2\Omega t},\ e^{-i\Omega t},\ 1,\ e^{i\Omega t},\ e^{i2\Omega t},\ \ldots$$

$$1,\ \cos\Omega t,\ \cos 2\Omega t,\ \ldots,\ \sin\Omega t,\ \sin 2\Omega t,\ \ldots$$

Eulers formler

Medelvärde av en T-periodisk funktion u:

$$\fint_T u(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} u(t)\,dt \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ godt.})$$

Trigonometriska polynom T.ex. $P(t) = 7 - 2i\sin\Omega t + \sqrt{2}e^{-i3\Omega t}$.

Allmänt: $$P(t) = \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\Omega t}}_{\text{komplex form}} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)}_{\text{reell form}}$$

En formel för c_n : $$c_n = \fint_T P(t)e^{-in\Omega t}\,dt, \quad -N \le n \le N,$$

som hänger på att $$\fint_T e^{im\Omega t}e^{-in\Omega t}\,dt = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \ne n. \end{cases}$$

Fourierkoefficienter och fourierserier

Rummet $\mathcal{L}^1_T = \{u \in C_{sty}(\mathbb{R});\ u\ T\text{-per. och } \int_0^T |u(t)|\,dt < \infty\}$,

med norm $\|u\|_{1,T} = \fint_T |u(t)|\,dt$.

Def Låt $u \in \mathcal{L}^1_T$. u:s fourierkoefficienter, $\hat{u}$ eller $\mathcal{F}_T u$:

$$\hat{u}(n) = (\mathcal{F}_T u)(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

u:s fourierserie: $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}$,

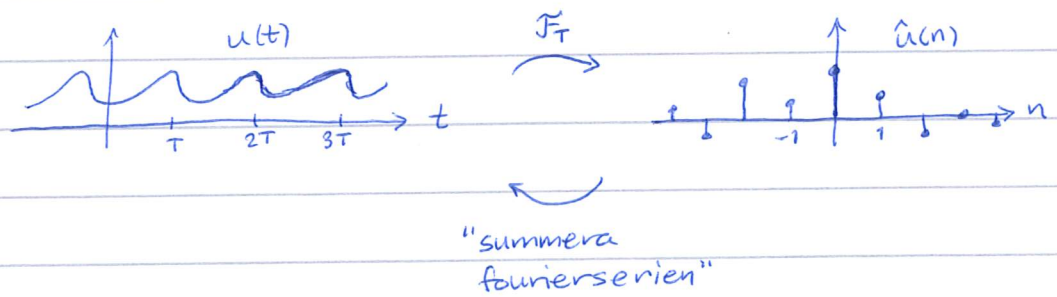
med reell form $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$,

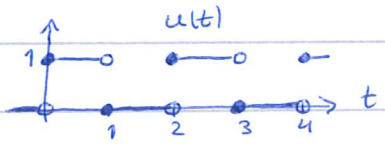
där $a_n = \hat{u}(n) + \hat{u}(-n)$, $n \geq 0$, och $b_n = i(\hat{u}(n) - \hat{u}(-n))$, $n \geq 1$.

N:te symmetriska delsumman $S_N u$ av u:s f.s.:

$$(S_N u)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}.$$

u:s f.s. sägs vara konvergent i en punkt $a \in \mathbb{R}$ om gränsvärdet $\lim_{N\to\infty} (S_N u)(a)$ existerar ändligt, och gränsvärdet kallas då fourierseriens summa i a.



Ex 

$T = 2 \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{T} = \pi.$

Bestäm u:s fourierserie.

$$\hat{u}(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 u(t) e^{-in\pi t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 1 e^{-in\pi t}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 0\,dt =$$

$n \neq 0$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-in\pi t}}{-in\pi}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-in\pi}}{2in\pi} = \frac{1-(-1)^n}{2in\pi}, \quad n \neq 0.$$

$$\hat{u}(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 1 e^{-i0\pi t}\,dt = \frac{1}{2}.$$

$\left(\frac{1}{2} e^{i0\pi t}\right)$

u:s f.s.: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}$, dvs: $\underline{\underline{\frac{1}{2} + \sum_{n\neq 0} \frac{1-(-1)^n}{2in\pi} e^{in\pi t}}}$

Reell form: $\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)\right)$

$a_0 = \hat{u}(0) + \hat{u}(0) = 1,$

$a_n = \hat{u}(n) + \hat{u}(-n) = \frac{1-(-1)^n}{2in\pi} + \frac{1-(-1)^{-n}}{2i(-n)\pi} = 0, \quad n \geq 1,$

$b_n = i(\hat{u}(n) - \hat{u}(-n)) = i\left(\frac{1-(-1)^n}{2i\pi n} - \frac{1-(-1)^{-n}}{2i(-n)\pi}\right) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}, \quad n \geq 1,$

så vi får:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t + \dots.$$

Se kompendiet (4.9) för några grafer för $S_N u$.

Räkneregler

"har fourierkoeff."

Sats (4.10)

$$u(t)+v(t) \xrightarrow{\mathcal{F}_T} \hat{u}(n)+\hat{v}(n)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$u(t-a) \qquad\qquad e^{-in\Omega a}\hat{u}(n) \quad (a\in\mathbb{R})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$u'(t) \qquad\qquad in\Omega\hat{u}(n)$$

B (av regeln för $u(t-a)$) Låt $u\in\mathcal{L}^1_T$ och $a\in\mathbb{R}$.

Sätt $v(t)=u(t-a)$. Då är

$$\hat{v}(n)=\fint_T v(t)e^{-in\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t-a)e^{-in\Omega t}\,dt = /r=t-a/$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-a}^{T-a} u(r)e^{-in\Omega(r+a)}\,dr = e^{-in\Omega a}\frac{1}{T}\int_{-a}^{T-a}u(r)e^{-in\Omega r}\,dr =$$

$$= e^{-in\Omega a}\hat{u}(n), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Ex Bestäm en π-per. lösn. y till

$$y'(t)-2y(t-\tfrac{\pi}{2}) = 20\cos 6t, \quad t\in\mathbb{R}.$$

$T=\pi \Rightarrow \Omega = 2\pi/T = 2.$

$$VL \xrightarrow{\mathcal{F}_T} in2\hat{y}(n) - 2e^{-in2(\pi/2)}\hat{y}(n).$$

$$HL = 20\cos 6t = 10e^{i6t}+10e^{-i6t} \xrightarrow{\mathcal{F}_T} \begin{cases} 10, & n=\pm 3 \\ 0, & \text{annars}\end{cases}$$

$$\widehat{VL}(n) = \widehat{HL}(n) \text{ ger} \ldots \quad \hat{y}(n) = \begin{cases} \frac{10}{2+6i}, & n=3, \\ \frac{10}{2-6i}, & n=-3, \\ 0, & \text{annars.}\end{cases}$$

y:s f.s. är $\frac{10}{2+6i}e^{i6t}+\frac{10}{2-6i}e^{-i6t} = \ldots = \cos 6t + 3\sin 6t,$

och $y(t)=\cos 6t + 3\sin 6t$ är en lösning.

Punktvis konvergens

Sats(er) $u \in \mathcal{L}^1_T \Rightarrow |\hat{u}(n)| \leq \int_T |u(t)|\,dt, \; n \in \mathbb{Z},$

och $\hat{u}(n) \to 0$ då $n \to \pm\infty$.

Riemann-Lebesgues lemma

$$u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t}\,dt \to 0 \quad \text{då } \omega \to \pm\infty.$$

B Genom approximation med styckvis konstanta fkn... se komp.

Satsen om punktvis konvergens $u \in \mathcal{L}^1_T$ s.a. u har generaliserad höger- och vänsterderivata (se 4.15) i en punkt $a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{in\Omega a} = \frac{u(a+) + u(a-)}{2}.$$

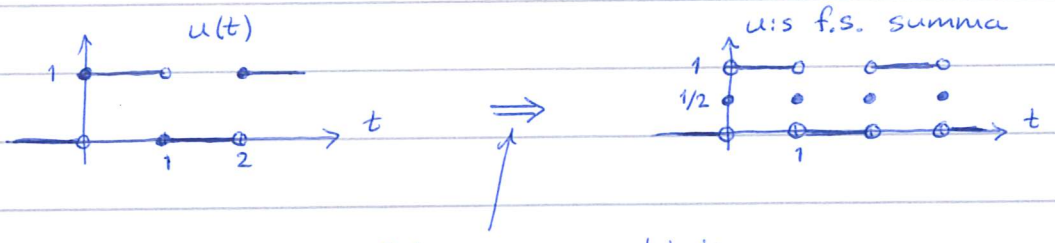
B Se komp.

Alltså: Fourierseriens summa i a $= \dfrac{u(a+) + u(a-)}{2} = u(a)$

om u har gen. hö- och vä-deriv. i a

om u är kont. i a

Ex



Satsen om punktvis konvergens

Entydighet

<u>Sats</u> $u, v \in L^1_T$, $\hat{u}(n) = \hat{v}(n)$ för alla $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $u(t) = v(t)$ i alla punkter t där både u och v är kontinuerliga.

Satsen följer av sats 4.19 som också ger:

"Om fourierserien är konvergent så har den rätt summa" (se 4.20),

och: om u är T-per. och kont. så kan u approximeras likformigt med trigonometriska polynom (se 4.21).