Fö 5

Periodisk faltning

Def $u, v \in C_{sty}(\mathbb{R})$, T-periodiska.

$$(u *_T v)(t) = \fint_T u(t-r)\, v(r)\, dr$$

$u *_T v$ är T-periodisk, och $*_T$ är bilinjär, kommutativ, associativ och kommuterar med translationer.

Sats $u, v \in \mathcal{L}^1_T \implies u *_T v \in \mathcal{L}^1_T$ och

$$(u *_T v)^\wedge(n) = \hat{u}(n)\hat{v}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

B $u *_T v \in \mathcal{L}^1_T$: se komp.

$$(u *_T v)^\wedge(n) = \fint_T (u *_T v)(t)\, e^{-in\Omega t}\, dt$$

$$= \fint_T \left(\fint_T u(t-r)\, v(r)\, dr \right) e^{-in\Omega t}\, dt$$

$$= \fint_T \fint_T u(t-r)\, e^{-in\Omega(t-r)}\, v(r)\, e^{-in\Omega r}\, dr\, dt$$

(se A.20)

$$= \fint_T \underbrace{\left(\fint_T u(t-r)\, e^{-in\Omega(t-r)}\, dt \right)}_{\hat{u}(n)} v(r)\, e^{-in\Omega r}\, dr$$

$$= \hat{u}(n)\hat{v}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Ex</u> Bestäm en lösning $u \in L^1_{2\pi}$ till

$$\int_{-\pi}^{\pi} r\, u(t-r)\,dr = \sin 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$T = 2\pi$, så $\Omega = 1$. Sätt $f(t) = t$, $-\pi \le t < \pi$, och f 2π-per.

$$VL = 2\pi (f *_T u) \xrightarrow{\mathcal{F}_T} 2\pi \hat{f}(n)\hat{u}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$HL = \sin 2t = \frac{1}{2i} e^{i2t} - \frac{1}{2i} e^{-i2t} \xrightarrow{\mathcal{F}_T} \begin{cases} \pm \frac{1}{2i}, & n = \pm 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

$\widehat{VL}(n) = \widehat{HL}(n)$ ger alltså: $2\pi \hat{f}(n)\hat{u}(n) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2i}, & n = \pm 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int}\,dt = \ldots = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-1}}{in}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

Så $\hat{u}(n)$ bestämd då $n \neq 0$ (ty då är $\hat{f}(n) \neq 0$), medan $\hat{u}(0)$ är godtycklig (ty $\hat{f}(0) = 0$ och $\widehat{HL}(0) = 0$), säg $\hat{u}(0) = 0$.

"$\Rightarrow$" $u(t) = -\frac{1}{2\pi} e^{i2t} - \frac{1}{2\pi} e^{-i2t} = -\frac{1}{\pi}\cos 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$

Satsen ovan: $(u *_T v)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}_T} \hat{u}(n)\hat{v}(n)$.

Vi har också: $u(t)v(t) \xrightarrow{\mathcal{F}_T} (\hat{u} * \hat{v})(n)$,

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n-k)\hat{v}(k)$$

t.ex. om u, v är kont. och T-per. och s.a. deras fourierserier är absolutkonvergenta, se 5.4, 5.5.

Unitära rum

Def V komplext linjärt rum.

$\langle \, | \, \rangle$ är en skalärprodukt på V om

$\langle u+v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$, $\langle u|v+w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$,

$\langle cu|v\rangle = c\langle u|v\rangle$, $\langle u|cv\rangle = \bar{c}\langle u|v\rangle$,

$\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$,

$\langle u|u\rangle \geq 0$.

Tillhörande norm: $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$.

Konvergens: $u_n \to u$ i V om $\|u_n - u\| \to 0$ då $n \to \infty$.

Sats $\| \, \|$ är en norm, och $|\langle u|v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$

(Cauchy-Schwarz olikhet).

B Se komp.

Def u normerad om $\|u\| = 1$.

u, v ortogonala om $\langle u|v\rangle = 0$.

$M \subseteq V$ en ON-mängd om $\langle e|f\rangle = \begin{cases} 1, & e = f, \\ 0, & e \neq f, \end{cases}$ alla $e, f \in M$.

"Pythagoras sats" $u_1, \ldots, u_n$ parvis ortogonala

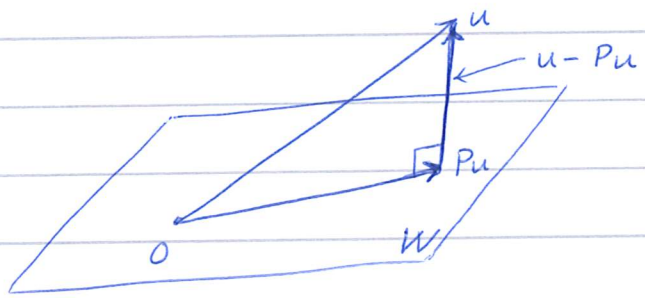
$\Longrightarrow \|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2$.

B Se komp.

Ortogonal projektion

$\{e_1, \dots, e_N\}$ ON-mängd i V, $W = [e_1, \dots, e_N]$, $u \in V$.

(Distinkta!)



Då finns en unik vektor $Pu \in W$ s.a. $u - Pu$ är ortogonal mot W, ty:

Ansätt $Pu = c_1 e_1 + \dots + c_N e_N$.

$$\langle u - Pu \mid e_n \rangle = 0 \iff \langle u \mid e_n \rangle - c_n = 0,$$

så: $$Pu = \langle u \mid e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u \mid e_N \rangle e_N.$$

Pyth. ger $$\|u\|^2 = \|u - Pu + Pu\|^2 = \underbrace{\|u - Pu\|^2}_{\geq 0} + \|Pu\|^2,$$

så $$\|Pu\| \leq \|u\|.$$

Pyth. ger också $$\|Pu\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|\langle u \mid e_n \rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle u \mid e_n \rangle|^2,$$

så $$\sum_{n=1}^{N} |\langle u \mid e_n \rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

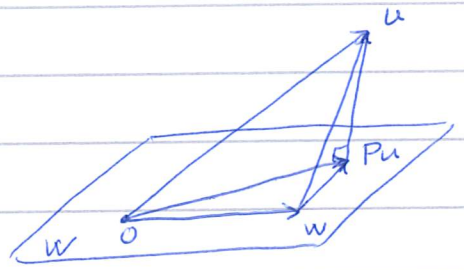
Satsen om bästa approximation

Med beteckningar som ovan:

$$\|u - Pu\| \leq \|u - w\|, \quad w \in W,$$

med likhet omm $w = Pu$.

B



(se komp.)

Def En ON-mängd $M \subseteq V$ kallas <u>fullständig</u> om det för varje $u \in V$ och $\varepsilon > 0$ finns $w \in [M]$ s.a. $\|u - w\| < \varepsilon$.

(Distinkta!)

Sats $M = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ fullständig ON-mängd

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{N \to \infty} \left\| u - \sum_{n=1}^{N} \langle u | e_n \rangle e_n \right\| = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u | e_n \rangle|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle u | v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u | e_n \rangle \overline{\langle v | e_n \rangle}$$

B Se komp.

Konvergens i medel, Parsevals formel

Rummet $\mathcal{L}_T^2 = \left\{ u \in C_{sty}(\mathbb{R});\ u \text{ T-per. och } \int_0^T |u(t)|^2 dt < \infty \right\}$.

$\mathcal{L}_T^2$ är ett linjärt rum, och $\mathcal{L}_T^2 \subseteq \mathcal{L}_T^1$.

Skalärprodukt på $\mathcal{L}_T^2$: $\langle u | v \rangle_{2,T} = \fint_T u(t)\overline{v(t)}\,dt$.

Norm: $\|u\|_{2,T} = \sqrt{\langle u | u \rangle_{2,T}} = \left(\fint_T |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}$.

$\mathcal{L}_T^2$ - tolkning av $\hat{u}(n)$, $S_N u$

$$\langle e^{im\Omega t} | e^{in\Omega t} \rangle_{2,T} = \fint_T e^{im\Omega t} e^{-in\Omega t} dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$\Rightarrow \{ e^{in\Omega t};\ n \in \mathbb{Z} \}$ ON-mängd i $\mathcal{L}_T^2$.

Låt $u \in \mathcal{L}_T^2$.

$$\hat{u}(n) = \fint_T u(t) e^{-in\Omega t} dt = \langle u | e^{in\Omega t} \rangle_{2,T}.$$

$$(S_N u)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{in\Omega t} = \sum_{n=-N}^{N} \langle u | e^{in\Omega t} \rangle_{2,T} e^{in\Omega t},$$

så $S_N u$ är ort. proj. av u på $[e^{-iN\Omega t}, \dots, 1, \dots, e^{iN\Omega t}]$, dvs på rummet av T-per. trig. pol. med vinkelfreku. $\leq N\Omega$.

$\Rightarrow$ $S_N u$ är bästa approximation av u i detta rum.

Ex Se 5.17 i komp.

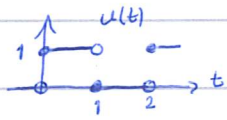
Sats(er) $\{e^{in\Omega t};\ n\in\mathbb{Z}\}$ är fullständig i L^2_T.

Så om $u, v \in L^2_T$:

$$\|u - S_N u\|_{2,T} \to 0 \quad \text{då } N\to\infty,$$

$$\left.\begin{aligned} \fint_T |u(t)|^2\,dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{u}(n)|^2, \\ \fint_T u(t)\overline{v(t)}\,dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)}. \end{aligned}\right\} \text{"Parsevals formel"}$$

B Se komp.

Ex Vad ger Parseval för 

?

$$\hat{u}(n) \overset{(4.9)}{=} \begin{cases} 1/2, & n=0, \\ 0, & n\neq 0 \text{ jämn}, \\ 1/in\pi, & n \text{ udda}. \end{cases}$$

Parseval: $\frac{1}{2}\int_0^1 |1|^2\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 |0|^2\,dt = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \sum_{n \text{ udda}} \left|\frac{1}{in\pi}\right|^2,$

så $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{n \text{ udda}} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{4} + 2\sum_{n\geq 1 \text{ udda}} \frac{1}{n^2\pi^2},$

eller: $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.$

Ex u som ovan. Uppskatta $\|u - S_N u\|_{2,T}$.

Obs: $(S_N u)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{u}(n) e^{in\Omega t}$, så $\widehat{S_N u}(n) = \begin{cases} \hat{u}(n), & |n|\leq N, \\ 0, & |n|>N. \end{cases}$

$$\|u - S_N u\|_{2,T}^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(u - S_N u)^\wedge(n)|^2 = \sum_{|n|>N} |\hat{u}(n)|^2 =$$

$$= \sum_{|n|>N \text{ udda}} \left|\frac{1}{in\pi}\right|^2 = 2\sum_{\substack{n=N+1 \\ n \text{ udda}}}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \leq \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq$$

integral-uppskattning $\leq \frac{2}{\pi^2}\int_N^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{\pi^2 N}.$

Alltså: $\|u - S_N u\|_{2,T} \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}.$